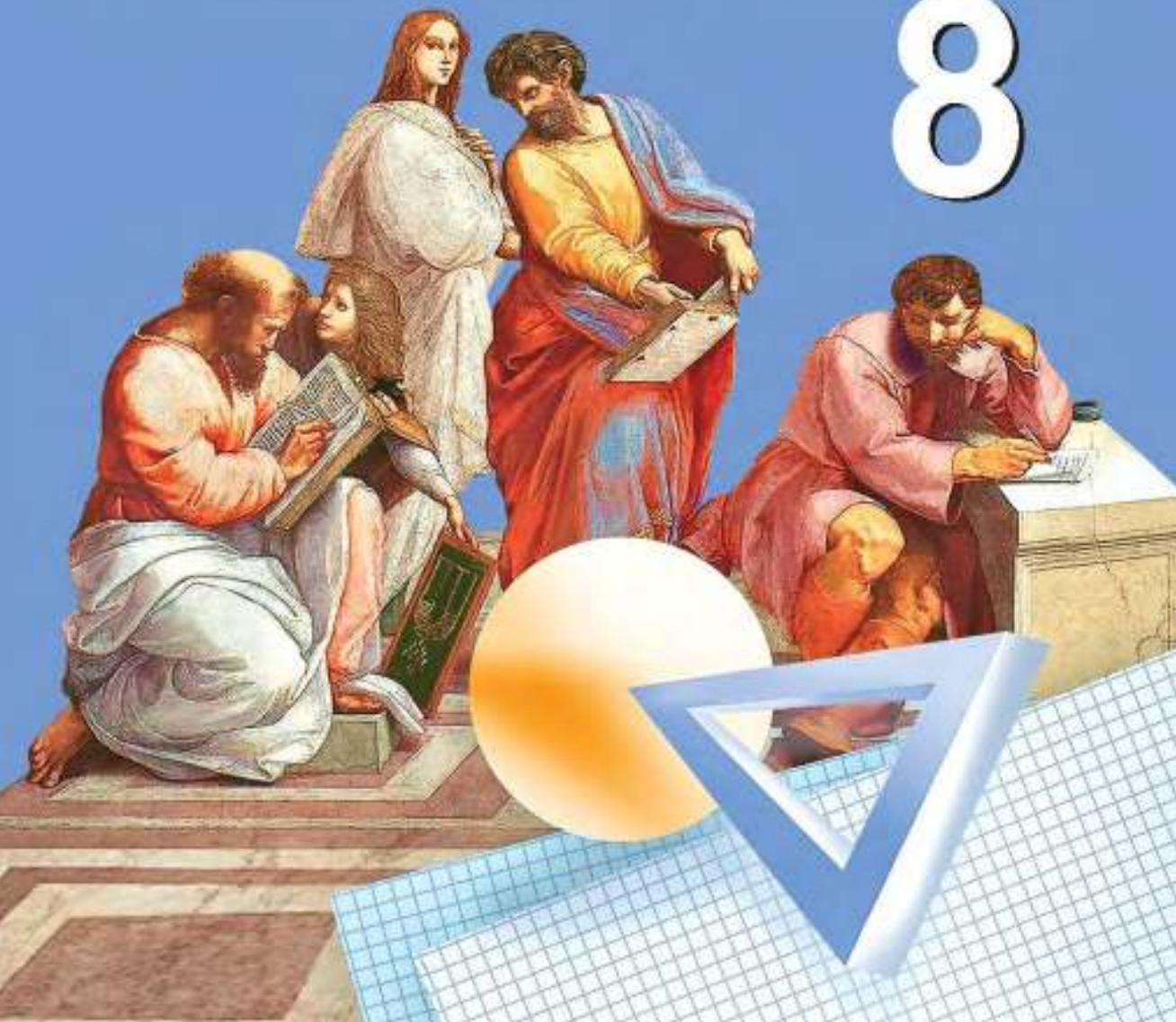
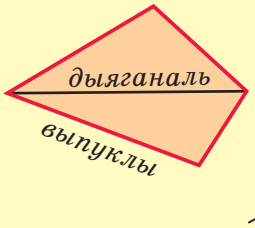
В. У. Казакоў

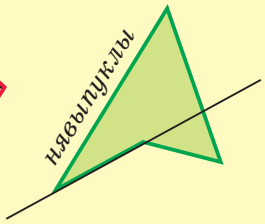
ГЕАМЕТРЫЯ

8

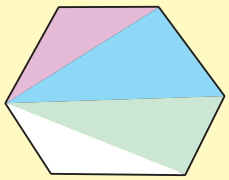


Многавугольнікі

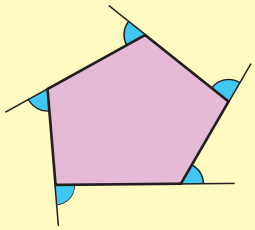




СУМА ВУГЛОЎ

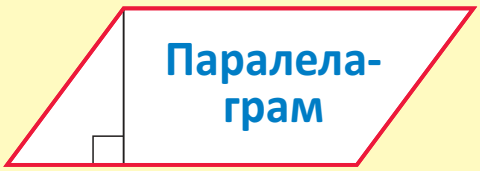


$180° \cdot (n - 2)$

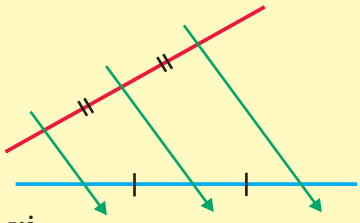


сума знешніх 360°

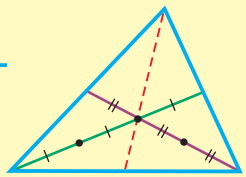
4-вугольнікі



ФАЛЕС (VI ст. да. н. э.)



МЕДЫЯНЫ 2 : 1



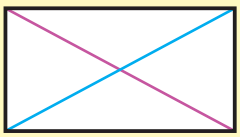
УЛАСЦІВАСЦІ

1. Сума суседніх вуглоў 180°.
2. Дыяганаль дзеліць на два роўныя тр-кі.
3. Процілеглыя стораны роўныя.
4. Процілеглыя вуглы роўныя.
5. Дыяганалі дзеляцца папалам.

ПРЫМЕТЫ

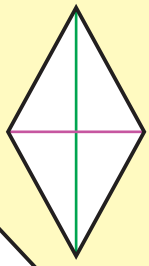
1. Калі дзве стараны 4-ка роўныя і паралельныя…
2. Калі процілеглыя стораны 4-ка роўныя…
3. Калі дыяганалі 4-ка дзеляцца папалам…

ПРАМАВУГОЛЬНІК



дыяганалі роўныя

РОМБ



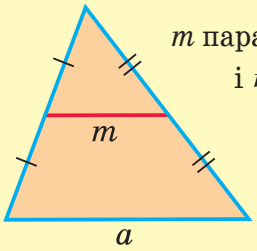
дыяганалі

1) $\perp$

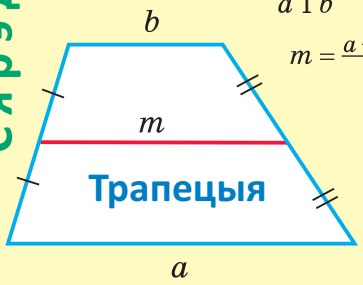
2) біс.

КВАДРАТ

Сярэдняя лінія



m паралельна a і $m = \frac{a}{2}$

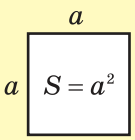


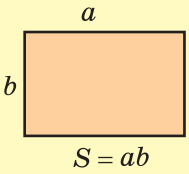
m паралельна a і b

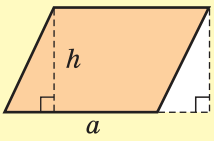
$m = \frac{a+b}{2}$

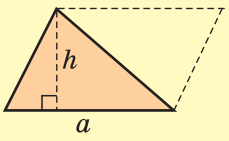
1. Выпуклыя мн-кі. Дыяганаль. Перыметр.
2. Сума вуглов выпуклага многавугольніка.
3*. Сума знешніх вуглоў выпуклага мн-ка.
4. Паралелаграм.
5. Уласцівасці паралелаграма.
6. Прыметы паралелаграма.
7. Прамавугольнік. Уласцівасці дыяганалей.
8*. Прымета прамавугольніка.
9. Ромб. Уласцівасць дыяганалей ромба. Прыметы ромба.
10. Квадрат. Уласцівасці квадрата.
11. Тэарэма Фалеса. Дзяленне адрэзка на роўныя часткі.
12. Уласцівасць медыян трохвугольніка.
13. Уласцівасць сярэдняй лініі трохвугольніка.
14. Трапецыя. Уласцівасць сярэдняй лініі.
15. Уласцівасць вуглоў і дыяганалей раўнабедранай трапецыі.
16*. Прыметы раўнабедранай трапецыі.

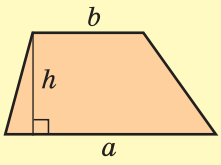
Плошчы

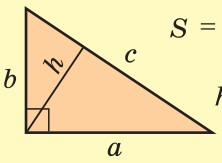


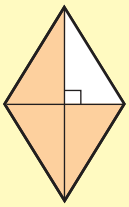




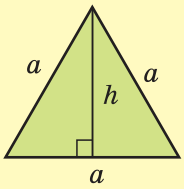


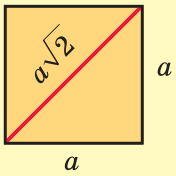






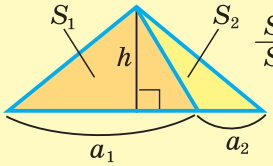
Роўнастаронні



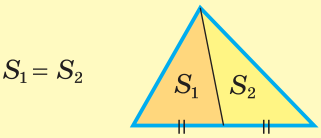


дыяганаль квадрата

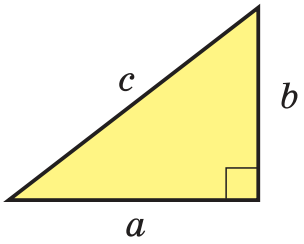
Агульная вышыня



плошчы адносяцца як асновы



медыяна дзеліць на два роўнавялікія



ПІФАГОР

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Адваротная

Піфагоравы тройкі:

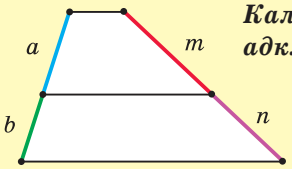
(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17)

1. Плошча квадрата.
2. Плошча прамавугольніка.
3. Плошча паралелаграма.
4. Плошча трохвугольніка.
5. **Плошча трапецыі.**
6. Плошча ромба.
7. Плошча прамавугольнага трохвугольніка.
8. **Вышыня, праведзеная да гіпатэнузы.**
9. Трохвугольнікі з агульнай вышынёй.
10. Уласцівасці медыяны для плошчаў.
11. **Тэарэма Піфагора.**
12. S і h роўнастаронняга трохвугольніка.
13. Дыяганаль квадрата.
14. Адваротная тэарэма Піфагора.
15. **Піфагоравы тройкі.**

Падобныя трохвугольнікі

Тэарэма Фалеса (абагульн.)

1. Вуглы – *роўныя.*
2. Стораны – *прапарцыянальныя.*

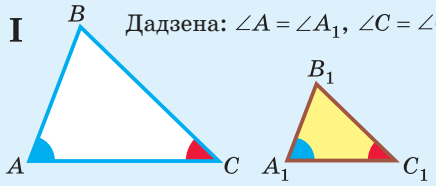


Калі на адной старане вугла адкласці...

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

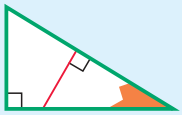
Прыметы падобнасці

I Дадзена: $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$

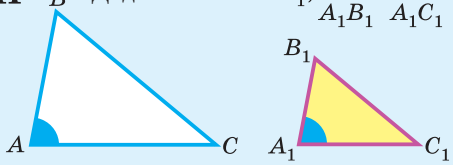


ПА ДВУХ ВУГЛАХ

Прамавугольныя падобныя па вострым вугле

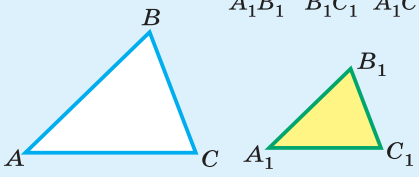


II Дадзена: $\angle A=\angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$



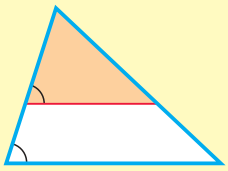
ПА ДЗВЮХ СТАРАНАХ І ВУГЛЕ ПАМІЖ ІМІ

III Дадзена: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$

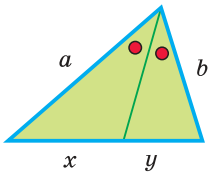


ПА ТРОХ СТАРАНАХ

Прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае трохвугольнік, падобны дадзенаму



Уласцівасць бісектрысы трохвугольніка



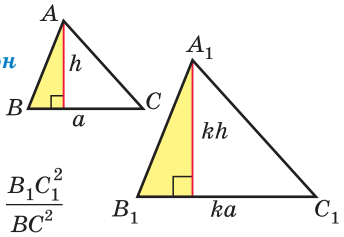
Бісектрыса дзеліць...

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

...прапарцыянальныя прылеглым старанам

Плошчы падобных трохвугольнікаў

...як квадраты адпаведных старон

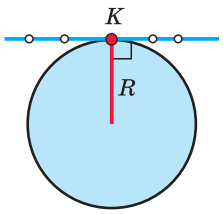


$$\frac{S_1}{S}=\frac{\frac{1}{2}\cdot ka\cdot kh}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}=k^2=\frac{B_1C_1^2}{BC^2}$$

1. **Тэарэма Фалеса (абагульненая).**
2. Дзяленне адрэзка ў адносіне $m:n$.
3. Азначэнне падобных трохвугольнікаў.
4. Уласцівасць прамой, паралельнай старане тр-ка.
5. **1-я прымета падобнасці. Вынік.**
6. **2-я прымета падобнасці.**
7. **3-я прымета падобнасці.**
8. Уласцівасць бісектрысы трохвугольніка.
9. Адносіна плошчаў падобных трохвугольнікаў.

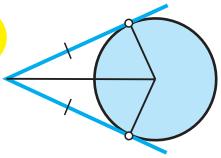
Акружнасці

1

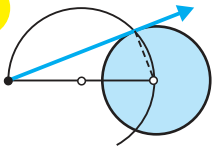


2

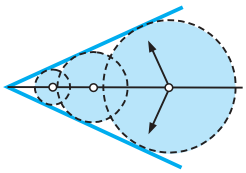
3



4

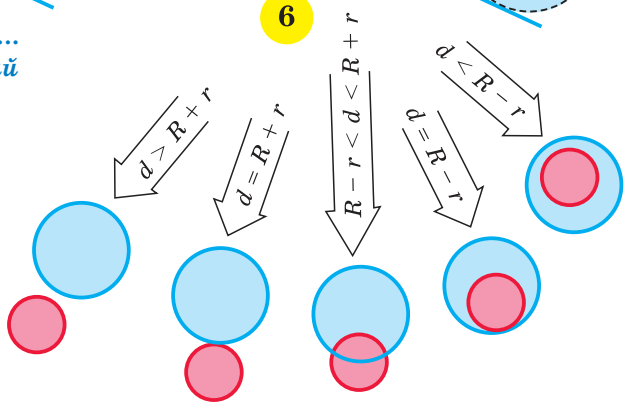


5

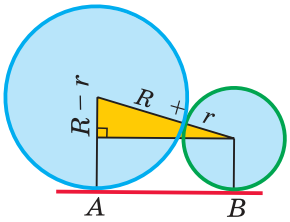


Датычная мае адзіны агульны пункт...
Радыус перпендыкулярны да датычнай

6



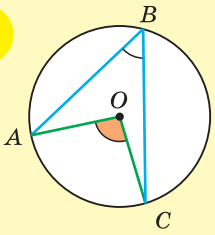
7



$$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

Упісаны – палавіне цэнтральнага вугла!

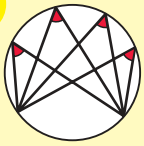
8



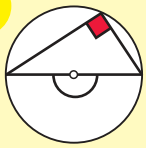
9

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$$

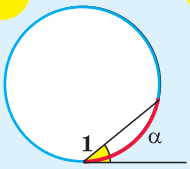
10



11

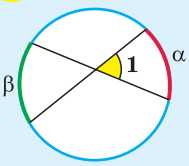


12



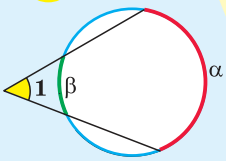
$$\angle 1 = \frac{1}{2}\,\alpha$$

13



$$\angle 1 = \frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)$$

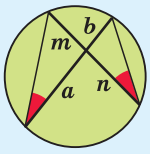
14



$$\angle 1 = \frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)$$

15

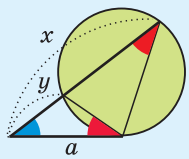
$$\frac{a}{m} = \frac{n}{b}$$



$$ab = mn$$

16

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{a}$$



$$a^2 = xy$$

1. Датычная. Прымета датычнай.
2. Уласцівасць датычнай.
3. Уласцівасць датычных, праведзеных з аднаго пункта.
4. Пабудова датычнай.
5. Уласцівасць акружнасцей, упісаных у вугал.
6. Узаемнае размяшчэнне акружнасцей.
7. Даўжыня адрэзка агульнай знешняй датычнай.
8. Цэнтральны вугал. Градусная мера дугі. Упісаны вугал.
9. Уласцівасць упісанага вугла.
10. Упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу.
11. Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр.
12. Вугал паміж датычнай і хордай.
13. Вугал паміж хордамі.
14. Вугал паміж сякучымі.
15. Уласцівасць перасякальных хорд.
16. Уласцівасць датычнай і сякучай.

В. У. Казакоў

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 8 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2018

Правообладатель Народная асвета

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
К14

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

У афармленні вокладкі выкарыстаны фрагмент фрэскі
Рафаэля Санці «Афінская школа»

Рэцэнзенты:
кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі
механіка-матэматычнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
(кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык *Г. А. Кукрак*);
настаўнік матэматыкі вышэйшай кваліфікацыйнай катэгорыі
дзяржаўнай установы адукацыі «Нясвіжская гімназія»
П. М. Раманчук

Казакоў, В. У.

К14 Геаметрыя : вучэбны дапаможнік для 8-га класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / В. У. Казакоў ; пер. з рускай мовы Н. М. Алганавай. — Мінск : Народная асвета, 2018. — 199 с. : іл.

ISBN 978-985-03-2940-0.

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-2940-0

© Казакоў В. У., 2018
© Алганава Н. М., пераклад на беларускую мову, 2018
© Афармленне. УП «Народная асвета», 2018

Правообладатель Народная асвета

ПРАДМОВА

Сябры! У 8-м класе вы працягнеце вывучэнне геаметрыі. Вы ўжо ведаеце, што геаметрыя разглядае геаметрычныя фігуры і іх уласцівасці. Ніжэй мы ўспомнім, якія фігуры вы вывучылі ў 7-м класе. А пакуль паглядзіце навокал. Вокны, дзверы, сцены будынкаў — усе яны маюць прамавугольную форму. Прамавугольнік — самая распаўсюджаная рукатворная геаметрычная форма. Сонца, Месяц, планеты, у тым ліку і наша Зямля, зрэз ствала дрэва, яблык або апельсін маюць круглую форму. Гэта гаворыць аб тым, што для прыроды характэрны акруглыя формы. У 8-м класе мы будзем вывучаць і прамавугольнікі, і акружнасці.

Панарама геаметрыі 8-га класа

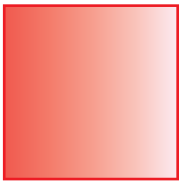
Вам давядзецца пазнаёміцца з двума важнымі відамі чатырохвугольнікаў: *паралелаграмам* і *трапецыяй*.

Паглядзіце на паралелаграм, паказаны на малюнку, і падумайце, чаму гэта фігура так называецца.

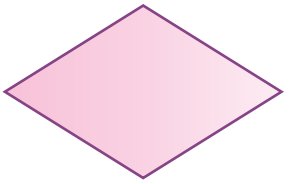
Згаданы намі *прамавугольнік* з'яўляецца прыватным відам паралелаграма. Прамавугольнік — гэта паралелаграм з прамымі вугламі. А *квадрат* — прыватны выпадак прамавугольніка. Гэта прамавугольнік з роўнымі старанамі.

паралелаграм

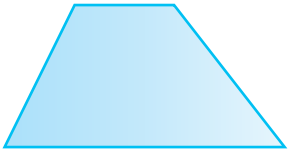
прамавугольнік



квадрат



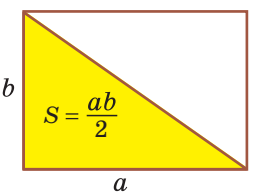
ромб



трапецыя

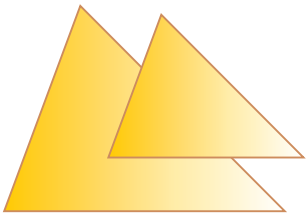
Яшчэ адным прыватным выпадкам паралелаграма з'яўляецца *ромб* — паралелаграм з роўнымі старанамі. *Трапецыя*, у адрозненне ад паралелаграма, мае толькі дзве паралельныя стараны.

У другой главе будуць выведзены *формулы плошчаў* некаторых плоскіх фігур: паралелаграма, трохвугольніка, трапецыі. У прыватнасці, вы даведаецеся, што плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна палавіне здабытку катэтаў, г. зн. $S = \frac{ab}{2}$. Гэта лёгка тлумачыцца, напрыклад, тым, што прамавугольнік



Правообладатель Народная асвета

са старанамі a і b, плошча якога $S = ab$, разбіваецца дыяганаллю на два роўныя прамавугольныя трохвугольнікі з катэтамі a і b.



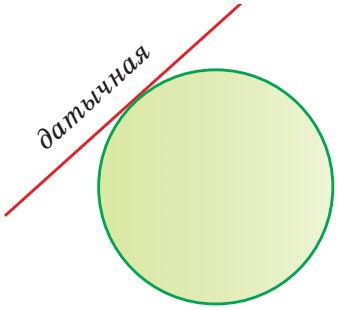
падобныя

Далей вы даведаецеся, якія трохвугольнікі называюць *падобнымі*. Гэта трохвугольнік і яго павялічаная або паменшаная копія.

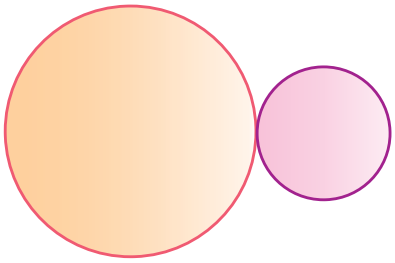
У роўных трохвугольнікаў адпаведныя сторана і вуглы роўныя. У падобных трохвугольнікаў адпаведныя вуглы роўныя, а сторана прапарцыянальныя.

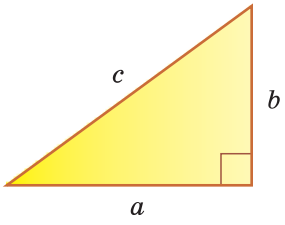
Напрыклад, кожная старана аднаго з падобных трохвугольнікаў можа быць у 2 разы большай за адпаведную старану другога трохвугольніка.

Завершыць курс геаметрыі 8-га класа глава «Акружнасць». Старажытныя грэкі лічылі акружнасць самай дасканалай фігурай, душой геаметрыі. Вы даведаецеся аб *датычнай* да акружнасці, аб акружнасцях, *якія датыкаюцца*, аб *упісаных* і *цэнтральных* вуглах акружнасці, пазнаёміцеся з некаторымі іншымі ўласцівасцямі акружнасцей.



датычныя акружнасці





$$a^2 + b^2 = c^2$$

Несумненна, галоўнай падзеяй у геаметрыі 8-га класа будзе ваша знаёмства з агульнавядомай ТЭАРЭМАЙ ПІФАГОРА аб уласцівасці старон прамавугольнага трохвугольніка, якая гучыць так: «*Сума квадратаў катэтаў роўна квадрату гіпатэнузы*».

Такім чынам, у вучэбным дапаможніку «Геаметрыя, 8 клас» чатыры главы. У кожнай главе некалькі параграфаў, кожны з якіх змяшчае:

а) тэарэтычны матэрыял: азначэнні, тэарэмы і вынікі з іх;

б) ключавыя задачы;

в) задачы для самастойнага рашэння.

Ключавыя задачы з'яўляюцца ўзорамі, дзе паказаны прыклады рашэння і варыянты афармлення задач. Таму яны разбіраюцца настаўнікам разам з класам. Акрамя гэтага, у ключавых задачах разглядаюцца дадатковыя ўласцівасці геаметрычных фігур.

Правообладатель Народная асвета

Усе ўласцівасці, даказаныя ў ключавых задачах, адносяцца да тэарэтычнай часткі. Пры рашэнні задач можна спасылацца на гэтыя ўласцівасці як на вядомыя геаметрычныя факты.

У пачатку кожнай главы прыводзіцца яе карта, дзе паказаны фігуры, вывучаемыя ў дадзенай главе. Усе главы змяшчаюць дадатковы матэрыял пад рубрыкамі: **«Рэальная геаметрыя»**, **«Мадэляванне»**, **«Геаметрыя 3D»**, з якімі вы ўжо знаёмы з курса геаметрыі 7-га класа.

Увага!

Задачы для самастойнага рашэння ў раздзеле «Рашаем самастойна», якія не маюць знака (*), прадстаўлены ва ўсіх пяці ўзроўнях засваення вучэбнага матэрыялу. Яны дастатковыя для ацэнкі вынікаў вучэбнай дзейнасці вучняў пры ажыццяўленні паўрочнага кантролю з выкарыстаннем дзесяцібальнай шкалы.

Задачы, адзначаныя знакам (*), з'яўляюцца задачамі павышанай складанасці, многія з іх носяць алімпіядны і даследчы характар. Яны могуць прапаноўвацца вучням, якія праяўляюць цікавасць да матэматыкі. Сказанае датычыцца і матэрыялу § 12*, 16*, 24*.

Тры сакрэты поспеху ў геаметрыі

Сакрэт 1. Веданне ЎСІХ тэарэм (у 8-м класе іх 39).

Сакрэт 2. Веданне ДОКАЗАЎ тэарэм, пералічаных у праграме па матэматыцы (спіс у канцы вучэбнага дапаможніка).

Сакрэт 3. Уменне рашаць любую КЛЮЧАВУЮ задачу дапаможніка.

На вокладцы вучэбнага дапаможніка паказаны фрагмент фрэскі выдатнага італьянскага мастака эпохі Адраджэння Рафаэля Санці «Афінская школа». Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, хто паказаны на гэтым фрагменце, як звалі дзяўчыну, намаляваную на карціне, і чым яна знакаміта.

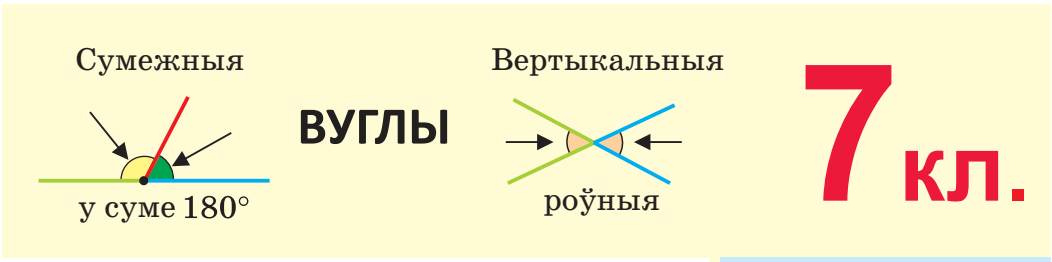
Жадаем вам поспехаў у засваенні геаметрыі ў 8-м класе.

Паўтарэнне курса геаметрыі 7-га класа

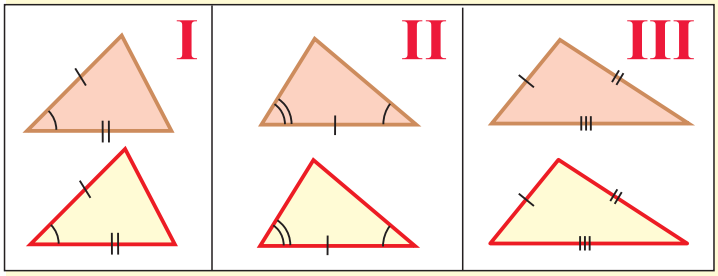
У 7-м класе мы пазнаёміліся з найпрасцейшымі геаметрычнымі фігурамі і іх уласцівасцямі. Успомнім некаторыя з іх.

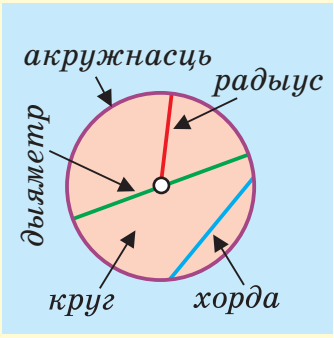
1) Уласцівасць сумежных і ўласцівасць вертыкальных вуглоў.
2) Прыметы роўнасці трохвугольнікаў.
3) Уласцівасці і прыметы раўнабедранага трохвугольніка.
4) Тэарэма аб суме вуглоў трохвугольніка.
5) Уласцівасці і прыметы паралельных прамых.
6) Акружнасць, радыус, хорда, дыяметр, круг.
7) Уласцівасць катэта прамавугольнага трохвугольніка з вуглом, роўным 30°.

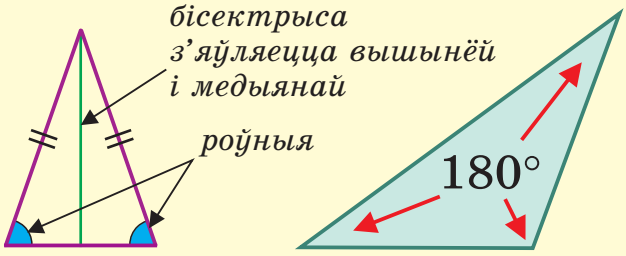
Правообладатель Народная асвета

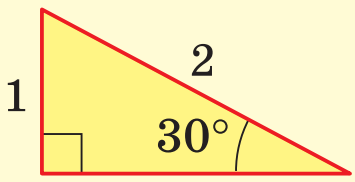


Прыметы роўнасці трохвугольнікаў

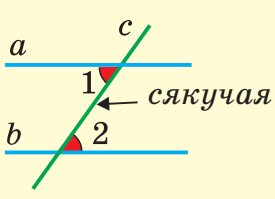


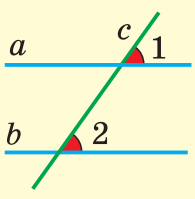


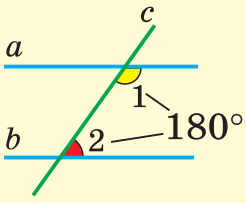




Уласцівасці і прыметы паралельных прамых







А зараз вы можаце праверыць узровень сваіх геаметрычных ведаў, атрыманых у 7-м класе, рашыўшы за 30 мінут тэст з 10 задач. Выпішыце нумары выбраных вамі адказаў, параўнайце іх з адказамі аднакласнікаў. Падлічыце набраную вамі колькасць балаў: кожная задача ацэньваецца ў 10 балаў. Калі вы набралі 60 балаў, то ваша адзнака «6» балаў, калі 100 балаў, то — «10» балаў. Паспяховага выканання тэста!

Правообладатель Народная асвета

Тэст па геаметрыі за 7-ы клас

№	Умовы задач	Адказы на выбар
1	Адзін з сумежных вуглоў роўны 30°. Знайдзіце градусную меру другога вугла.	1) 30°; 2) 130°; 3) 150°; 4) 170°.
2	Сума двух вертыкальных вуглоў роўна 100°. Знайдзіце велічыню аднаго з гэтых вуглоў.	1) 80°; 2) 50°; 3) 40°; 4) 100°.
3	Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 12 см, а бакавая старана — 8 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.	1) 28 см; 2) 20 см; 3) 30 см; 4) 32 см.
4	Два вуглы трохвугольніка роўны 30° і 50°. Знайдзіце трэці вугал.	1) 90°; 2) 130°; 3) 80°; 4) 100°.
5	Вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка роўны 40°. Знайдзіце вугал пры аснове.	1) 55°; 2) 85°; 3) 70°; 4) 140°.
6	Вуглы 1 і 2 — накрыжлеглыя пры паралельных прамых a і b і сякучай c. Вядома, што $\angle 1 + \angle 2 = 130°$. Знайдзіце велічыню $\angle 1$.	1) 65°; 2) 70°; 3) 50°; 4) 25°.
7	Знешнія вуглы пры дзвюх вяршынях трохвугольніка роўны 100° і 125°. Знайдзіце знешні вугал пры трэцяй вяршыні.	1) 225°; 2) 45°; 3) 145°; 4) 135°.
8	З вяршыні разгорнутага вугла AOB у адну паўплоскасць адносна прамой AB праведзены прамені OC і OD, прамень OC праходзіць унутры вугла AOD, $\angle COD = 70°$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі вуглоў AOC і BOD.	1) 60°; 2) 55°; 3) 110°; 4) 125°.
9	З вяршыні прамога вугла C прамавугольнага трохвугольніка ABC, у якога $\angle B = 30°$, $AB = 36$ см, праведзена вышыня CH. Знайдзіце даўжыню адрэзка HB.	1) 27 см; 2) 24 см; 3) 18 см; 4) 30 см.
10	На адрэзку AB пазначаны пункт C, дзе $AC > BC$. Адлегласць паміж сярэдзінай адрэзка AB і сярэдзінай адрэзка BC роўна 24 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AC.	1) 42 см; 2) 36 см; 3) 48 см; 4) нельга знайсці.

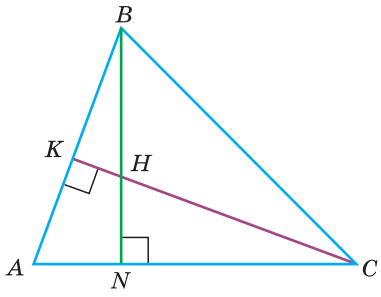
Зараз адкажам на пытанне: ЯК РАШЫЦЬ СКЛАДАНУЮ ГЕАМЕТРЫЧНУЮ ЗАДАЧУ? Для прыкладу разгледзім задачу 229* з вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя, 7 клас» і прааналізуем, як можа ісці пошук рашэння такой задачы.

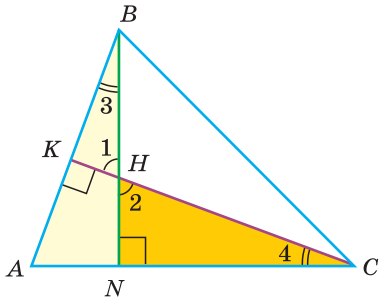
Правообладатель Народная асвета

Задача 229* (7-ы клас). У вастравугольным трохвугольніку ABC вышыні BN і CK перасякаюцца ў пункце H. Знайдзіце вугал ACB трохвугольніка ABC, калі $CH = AB$.

Дадзена: $\triangle ABC$, BN і CK — вышыні, $CH = AB$.

Знайсці: $\angle ACB$.





Аналіз пошуку рашэння задачы.

Пры рашэнні геаметрычнай задачы карысна знайсці велічыні ўсіх магчымых вуглоў і ўсіх магчымых адрэзкаў, а таксама вызначыць роўнасць якіх-небудзь вуглоў і якіх-небудзь адрэзкаў, якая не дадзена непасрэдна ва ўмове задачы. Звернемся да нашай задачы.

1) Самае простае, што можна пазначыць на рысунку, дык гэта роўнасць вертыкальных вуглоў 1 і 2. З прамавугольных трохвугольнікаў BKH і CNH вынікае, што $\angle 3 = \angle 4$ (сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна 90°).

2) Зноў вернемся да ўмовы задачы і падумаем, як аб'яднаць умовы: $AB = CH$ і $\angle 3 = \angle 4$. Можна прыйсці да ідэі разглядання прамавугольных трохвугольнікаў ANB і HNC. У іх роўныя вострыя вуглы 3 і 4 і роўныя гіпатэнузы AB і CH. Значыць, $\triangle ANB = \triangle HNC$ па гіпатэнузе і вострым вугле (прымета роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў).

3) Пасля доказу роўнасці трохвугольнікаў звычайна запісваюць, што вынікае з гэтай роўнасці. У нашым выпадку: $AN = HN$ і $BN = CN$.

4) Вернемся да таго, што трэба знайсці: $\angle ACB$. Як гэты вугал звязаны са старанамі BN і CN? Відавочна, трэба разгледзець $\triangle BNC$. Ён раўнабедраны ($BN = CN$) і прамавугольны (BN — вышыня). Тады $\angle NCB = \angle NBC = 45°$ (вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўныя).

Адказ: $\angle ACB = 45°$.

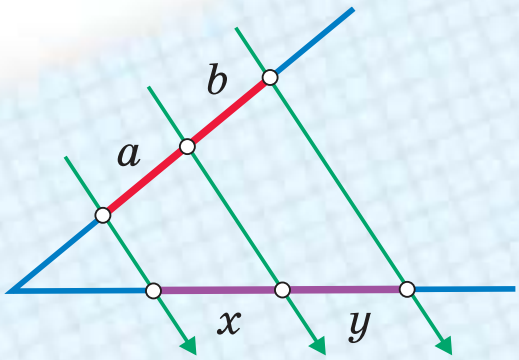
Правообладатель Народная асвета

Глава I

Чатырохвугольнікі

У гэтай главе вы даведаецеся:

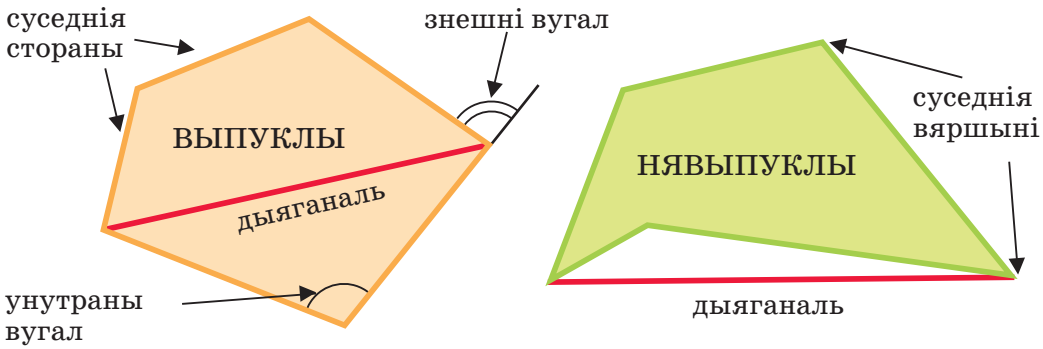
- Пра віды многавугольнікаў
- Пра ўласцівасці паралелаграма і трапецыі
- Аб чым гаворыць тэарэма Фале́са



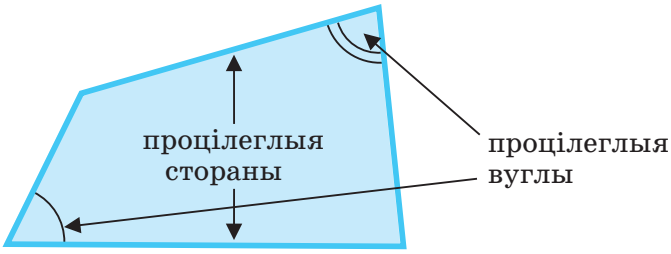
Калі a=b, то x=y

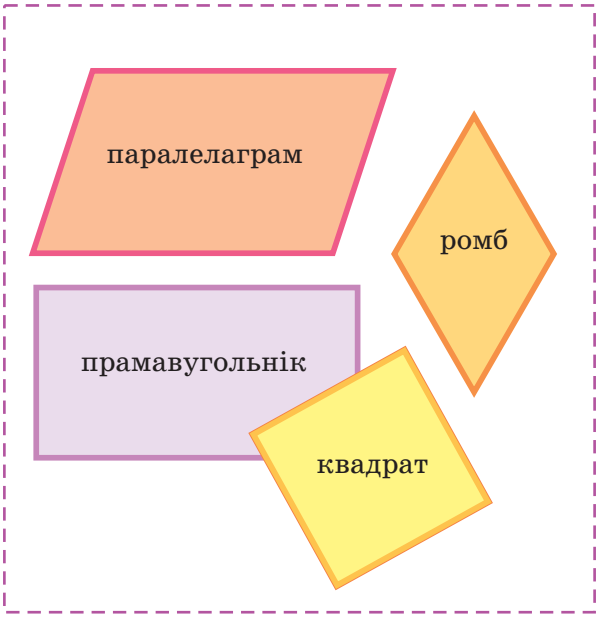
Правообладатель Народная асвета

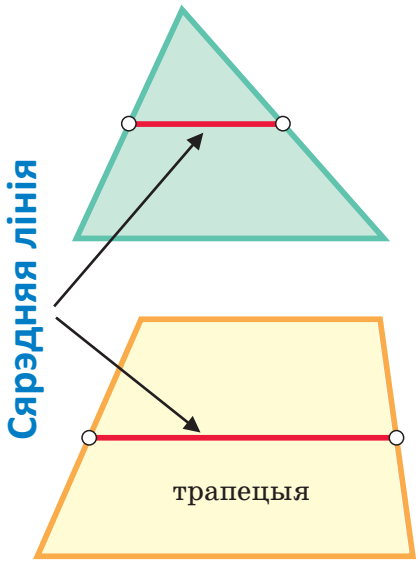
Многавугольнікі



Чатырохвугольнікі







Правообладатель Народная асвета

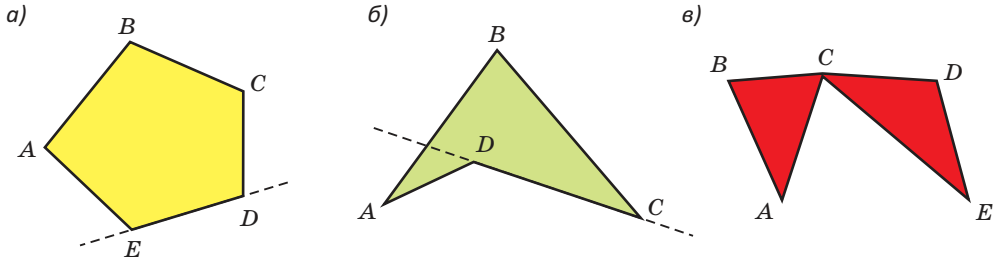
§ 1. Многавугольнік

Азначэнне. **Многавугольнікам** называецца простая замкнутая ломаная разам з частай плоскасці, якую яна абмяжоўвае.

Вяршыні гэтай ломанай называюцца *вяршынямі многавугольніка*, яе звёны — *старанамі многавугольніка*. *Перыметрам многавугольніка* называецца сума даўжынь яго старон. Па ўласцівасці ломанай даўжыня любой стараны многавугольніка меншая за суму даўжынь астатніх старон.

Азначэнне. **Многавугольнік называецца выпуклым, калі ён ляжыць у адной паўплоскасці адносна прамой, якая змяшчае любую яго старану. У адваротным выпадку ён называецца нявыпуклым.**

На рысунку 1, *а*) паказаны выпуклы пяцівугольнік $ABCDE$, на рысунку 1, *б*) — нявыпуклы чатырохвугольнік $ABCD$ (вяршыні A і B ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой CD). Фігура, паказаная на рысунку 1, *в*), не з'яўляецца многавугольнікам, паколькі ломаная $ABCDE$ няпростая.



Рыс. 1

Стораны многавугольніка, якія маюць агульную вяршыню, называюцца *суседнімі старанамі*; вяршыні, што з'яўляюцца канцамі адной стараны, — *суседнімі вяршынямі*, а вуглы пры гэтых вяршынях — *суседнімі вугламі* многавугольніка. Пры гэтым *вуглом выпуклага многавугольніка* (часам гавораць *унутраным вуглом*) называецца вугал паміж суседнімі старанамі, які змяшчае гэты многавугольнік.

Напрыклад, на рысунку 1, *а*) стораны AB і BC — суседнія, вяршыні A і B — суседнія, $\angle A$ і $\angle B$ — суседнія вуглы.

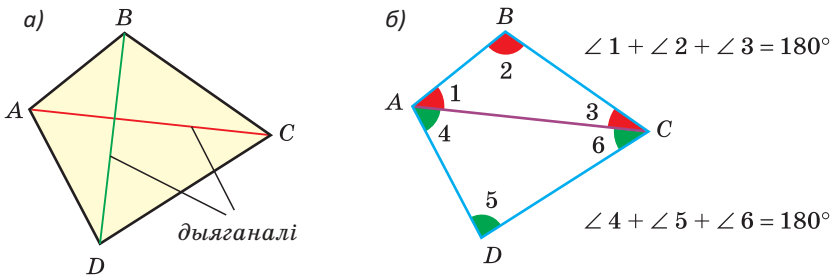
Кожны вугал выпуклага многавугольніка меншы за 180°. Нявыпуклы многавугольнік мае, прынамсі, адзін вугал, большы за 180°.

Правообладатель Народная асвета

Азначэнне. **Дыяганаллю** многавугольніка называецца адрэзак, які злучае дзве несуседнія вяршыні многавугольніка.

У любога чатырохвугольніка чатыры стараны, чатыры вяршыні, чатыры ўнутраныя вуглы, дзве дыяганалі. Дзве несуседнія стараны называюцца *процілеглымі* (або *супрацьлеглымі*) старанамі, дзве несуседнія вяршыні — *процілеглымі вяршынямі*, а вуглы пры гэтых вяршынях — *процілеглымі вугламі* чатырохвугольніка.

У чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 2, *а*) стораны AB і CD, AD і BC — процілеглыя, вяршыні A і C, B і D, а таксама вуглы пры гэтых вяршынях — процілеглыя. Адрэзкі AC і BD — дыяганалі чатырохвугольніка $ABCD$. Дыяганаль AC разбівае чатырохвугольнік $ABCD$ на два трохвугольнікі ABC і ADC (рыс. 2, *б*).

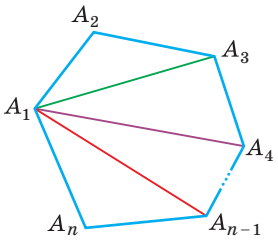


Рыс. 2

Сума вуглоў чатырохвугольніка $ABCD$ роўна суме вуглоў гэтых трохвугольнікаў. Паколькі сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°, то *сума вуглоў чатырохвугольніка роўна* $180° \cdot 2$, г. зн. 360°.

Многавугольнік, у якога n старон, мае n вяршынь, n вуглоў і называецца n-вугольнікам. Выведзем формулу, якая дазваляе знаходзіць суму вуглоў любога выпуклага n-вугольніка.

Тэарэма (аб суме вуглоў n-вугольніка).
Сума вуглоў выпуклага n-вугольніка роўна $180°(n - 2)$.



Рыс. 3

Дадзена: $A_1A_2...A_n$ — выпуклы n-вугольнік.
Даказаць: $\angle A_1 + \angle A_2 + ... + \angle A_n = 180°(n - 2)$.
Доказ. Правядзём з вяршыні A_1 дыяганалі A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} (рыс. 3). Наш n-вугольнік разаб'ецца на $n - 2$ трохвугольнікі (без уліку старон A_1A_2 і A_1A_n застанецца $n - 2$ стараны, і на кожную прыпадае па адным трохвугольніку). У кожным трохвугольніку сума вуглоў роўна 180°. Сума ўсіх вуглоў атрыма-

Правообладатель Народная асвета

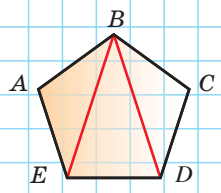
ных трохвугольнікаў роўна суме вуглоў дадзенага n-вугольніка, г. зн. $\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n = 180°(n - 2)$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Тэарэма справядлівая і для нявыпуклага многавугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2.**

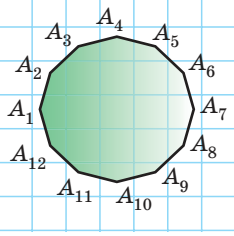
Тэст 1

Знайдзіце суму вуглоў 5-вугольніка, разбіўшы яго на трохвугольнікі.



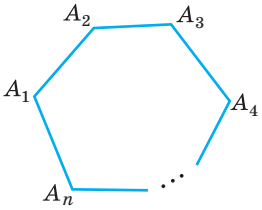
Тэст 2

Знайдзіце суму вуглоў 12-вугольніка пры дапамозе формулы сумы вуглоў n-вугольніка.



Заданні да § 1

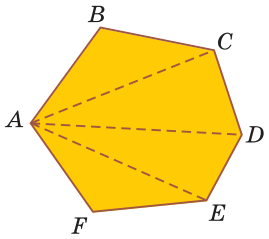
РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы



Рыс. 4

Задача 1. *Сума вуглоў выпуклага n-вугольніка роўна* 3600°. *Знайсці колькасць старон гэтага многавугольніка* (рыс. 4).

Рашэнне. Сума вуглоў выпуклага n-вугольніка роўна $180°(n - 2)$, дзе n — колькасць яго старон. Па ўмове $180°(n - 2) = 3600°$, адкуль $n - 2 = \frac{3600}{180}$, $n - 2 = 20$, $n = 22$. Адказ: 22.



Рыс. 5

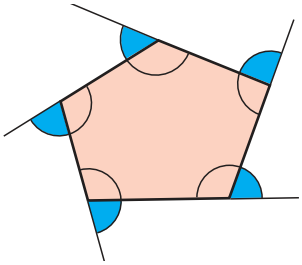
Задача 2. *Знайсці колькасць дыяганалей шасцівугольніка.*

Рашэнне. Няхай $ABCDEF$ — некаторы шасцівугольнік. З вяршыні A можна правесці 3 дыяганалі (рыс. 5). З вяршыні B таксама можна правесці 3 дыяганалі. Паколькі з кожнай з шасці вяршынь можна правесці па 3 дыяганалі, то атрымаем $6 \cdot 3 = 18$ дыяганалей, «якія выходзяць». Пры гэтым кожная дыяганаль шасцівугольніка ўлічваецца двойчы: спачатку для адной, а потым для другой вяршыні. Таму ўсяго дыяганалей у 2 разы менш, г. зн. $18 : 2 = 9$. Адказ: 9.

Правообладатель Народная асвета

Заўвага. Аналагічныя разважанні дазваляюць вывесці формулу колькасці дыяганалей n-вугольніка. З кожнай вяршыні n-вугольніка будзе выходзіць $(n - 3)$ дыяганалі (з дадзенай вяршыні ў яе саму і ў дзве суседнія вяршыні дыяганалі правесці нельга). Паколькі ўсяго вяршынь n, то колькасць дыяганалей $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Задача 3. *Знешнім вуглом выпуклага многавугольніка называецца вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом. Даказаць уласцівасць:* ***«Сума знешніх вуглоў выпуклага многавугольніка, узятых па адным пры кожнай вяршыні, роўна 360°».***



Рыс. 6

Д о к а з. Каб знайсці суму знешніх (зафарбаваных) вуглоў выпуклага n-вугольніка (рыс. 6), трэба ад сумы разгорнутых вуглоў, узятых па адным пры кожнай вяршыні, адняць суму яго ўнутраных вуглоў. Атрымаем:

$180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

1. Знайдзіце суму вуглоў выпуклага:

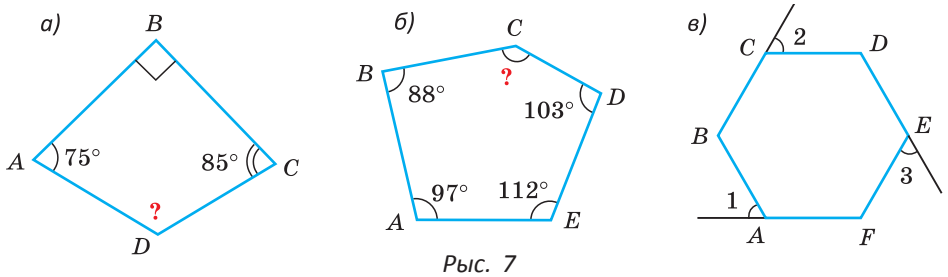
а) шасцівугольніка; б) дзесяцівугольніка; в) сямнаццацівугольніка.

2. Рашыце наступныя задачы:

а) Знайдзіце $\angle D$ чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 7, *а*);

б) Знайдзіце $\angle C$ пяцівугольніка $ABCDE$ (рыс. 7, *б*);

в) Знайдзіце суму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$, калі ў шасцівугольніка $ABCDEF$ усе ўнутраныя вуглы роўныя паміж сабой (рыс. 7, *в*).



Рыс. 7

3. Нарысуйце выпуклы пяцівугольнік $ABCDE$ і правядзіце ўсе яго дыяганалі. Пры дапамозе формулы $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$ знайдзіце колькасць дыяганалей пяцівугольніка і параўнайце яе з колькасцю дыяганалей, праведзеных вамі.

4. Сума вуглоў n-вугольніка роўна 900°. Усе яго сторны роўны па 6 см. Знайдзіце перыметр гэтага n-вугольніка.

Правообладатель Народная асвета

5. Вызначыце колькасць старон выпуклага многавугольніка, калі ў яго ўсе вуглы роўныя паміж сабой і кожны вугал роўны:

а) 60°; б) 108°; в) 120°.

6. Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка $MNPK$, калі вядома, што $\angle M : \angle N : \angle P : \angle K = 2 : 7 : 3 : 8$. Выкарыстаўшы транспарцір, пабудуйце такі чатырохвугольнік.

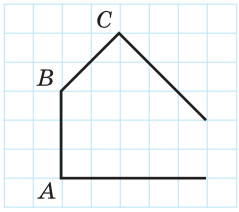
7. а) У чатырохвугольніка два процілеглыя вуглы прамыя, трэці вугал на 20° меншы за чацвёрты вугал. Знайдзіце найбольшы вугал чатырохвугольніка.

б) У чатырохвугольніка тры вуглы роўныя, а чацвёрты ў 2 разы большы за кожны з гэтых вуглоў. Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка.

8. а) Перыметр чатырохвугольніка роўны 6 м. Адна са старон роўна 120 см, а тры астатнія стараны роўныя паміж сабой. Знайдзіце невядомыя стораны чатырохвугольніка ў сантыметрах.

б) Перыметр чатырохвугольніка роўны 78 см, дзве суседнія яго стараны адносяцца як 1 : 3, трэцяя старана роўна 24 см, а чацвёртая складае 75 % трэцяй стараны. Знайдзіце меншую старану чатырохвугольніка.

9. Вяршыні A, B і C некаторага чатырохвугольніка знаходзяцца ў вузлах сеткі сшытка (рыс. 8). Знайдзіце двума спосабамі велічыню вугла пры чацвёртай вяршыні чатырохвугольніка, якая недаступна.

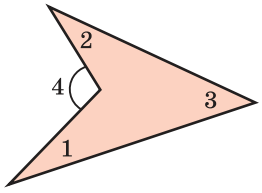


Рыс. 8

10. Дакажыце, што сума даўжынь дыяганалей выпуклага чатырохвугольніка большая за:

а) суму даўжынь дзвюх яго процілеглых старон;

б) яго паўперыметр.



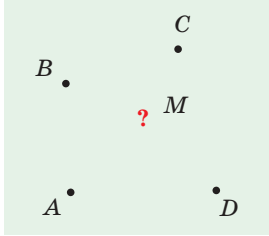
Рыс. 9

11. Дадзены нявыпуклы чатырохвугольнік (рыс. 9). Дакажыце, што $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

12. У некаторага выпуклага многавугольніка колькасць дыяганалей роўна колькасці яго старон. Знайдзіце суму вуглоў гэтага многавугольніка.

13*. $ABCD$ — выпуклы чатырохвугольнік, $\angle A = 80°$, $\angle D = 70°$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі вуглоў B і C, павернуты да стараны BC.

14*. У пунктах A, B, C і D размешчаны магазіны (рыс. 10). Знайдзіце месцазнаходжанне



Рыс. 10

Правообладатель Народная асвета

пункта M, у якім трэба размясціць склад, каб сума адлегласцей ад склада да магазінаў была найменшай.

15*. Даўжыні старон пяцівугольніка $ABCDE$ выражаны цэлымі лікамі. Вядома, што $AB = 1$ см, $BC = 3$ см, $CD = 5$ см, $DE = 10$ см. Якую найбольшую і якую найменшую даўжыню можа мець старана AE?

16*. Вызначыце, якую найбольшую колькасць вострых вуглоў можа мець выпуклы многавугольнік.

Рэальная геаметрыя

На рысунку 11 паказана карта з вуліцамі. Вуліцы Цяністая і Вінаградная перасякаюцца пад прамым вуглом, вуліца Абрыкосавая перасякаецца з вуліцай Вінаграднай пад вуглом 74°, а з вуліцай Вішнёвай — пад вуглом 80°.

Рыс. 11

Задача. Вызначыце, які вугал утвараюць вуліцы:

а) Вішнёвая і Цяністая;

б) Цяністая і Абрыкосавая;

в) Вінаградная і Вішнёвая.

Тры парады: *Як навучыцца рашаць задачы па геаметрыі*

Парада 1. Прыступаючы да рашэння задачы, пажадана прачытаць яе ўмову некалькі разоў, каб ясна зразумець, што ў задачы дадзена, а што трэба знайсці (даказаць). Далей неабходна зрабіць чарцёж (калі ён не даецца) як мага больш дасканала адпаведны ўмове задачы. Пры гэтым, калі сказана, што дадзены чатырохвугольнік, не варта чарціць прамавугольнік, а калі дадзены адвольны трохвугольнік, то пабудаваны вамі раўнабедраны або роўнастаронні трохвугольнік можа прывесці да няправільных разважанняў. Трэба быць гатовым да таго, што прыйдзецца пабудаваць некалькі чарцяжоў, каб выбраць найбольш прыдатны.

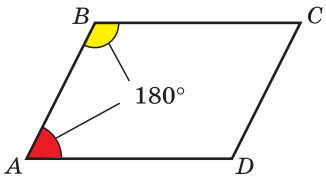
Парада 2. Калі адразу не атрымліваецца скласці план рашэння задачы, трэба атрымаць усе дадатковыя даныя, якія вынікаюць з умовы. Перш за ўсё неабходна знайсці велічыні ўсіх вуглоў і ўсіх адрэзкаў, якія толькі можна. Затым неабходна яшчэ раз прачытаць, што трэба знайсці або даказаць.

Парада 3. Старажытныя грэкі гаварылі: «Каб навучыцца плаваць, трэба лезці ў ваду». Аналагічна можна сказаць: «Каб навучыцца рашаць задачы па геаметрыі, трэба іх рашаць». У вучэбным дапаможніку колькасць простых задач абмежавана аб'ёмам дапаможніка. Дадатковыя задачы, а таксама развіваючыя пытанні размешчаны ў дадатку «Наглядная геаметрыя, 8 клас» (аўтар *В. У. Казакоў*). Рашэнне вялікай колькасці простых і сярэдніх па складанасці задач на гатовых чарцяжах — добры спосаб навучыцца рашаць больш складаныя задачы.

Правообладатель Народная асвета

§ 2. Паралелаграм і яго ўласцівасці

Азначэнне. **Паралелаграмам** называецца чатырохвугольнік, у якога процілеглыя стораны паралельныя.

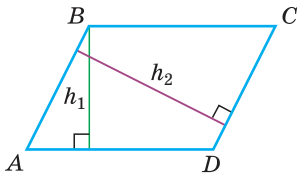


Рыс. 12

На рысунку 12 паказаны паралелаграм $ABCD$, у яго $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Па ўласцівасці аднастаронніх вуглоў пры паралельных прамых і сякучай $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Справядлівая ўласцівасць: ***«Сума суседніх вуглоў паралелаграма роўна 180°»***.

Азначэнне. **Вышынёй паралелаграма** называецца перпендыкуляр, праведзены з пункта прамой, якая змяшчае адну са старон паралелаграма, да прамой, якая змяшчае процілеглую старану (*да асновы паралелаграма*).



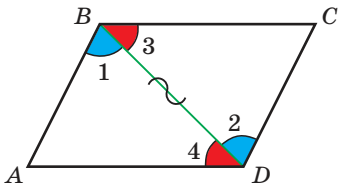
h_1, h_2 — *вышыні паралелаграма*

Рыс. 13

Вышынёй паралелаграма таксама называецца *даўжыня* пабудаванага перпендыкуляра. Усе вышыні паралелаграма, праведзеныя да дадзенай асновы, роўныя паміж сабой як адлегласці паміж паралельнымі прамымі.

На рысунку 13 вышыня h_1 паралелаграма $ABCD$ праведзена да асновы AD, вышыня h_2 — да асновы DC. З уласцівасцей паралельных прамых вынікае, што $h_1 \perp BC$, $h_2 \perp AB$.

Тэарэма (уласцівасць старон і вуглоў паралелаграма).
У паралелаграма процілеглыя стораны роўныя і процілеглыя вуглы роўныя.



Рыс. 14

Дадзена: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 14).
Даказаць: $AB = CD$, $BC = AD$; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
Доказ. Паколькі $ABCD$ — паралелаграм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Правядзём дыяганаль BD. Атрымаем два трохвугольнікі ABD і CDB, роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў (старана BD — агульная, $\angle 1 = \angle 2$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AB і CD і сякучай BD, $\angle 3 = \angle 4$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AD і BC і сякучай BD). З роўнасці гэтых

Правообладатель Народная асвета

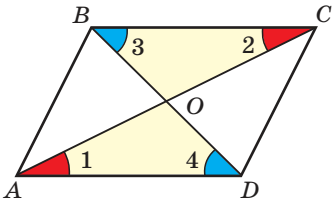
трохвугольнікаў вынікае, што $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$. Вуглы B і D паралелаграма роўныя як сумы роўных вуглоў: $\angle B = \angle 1 + \angle 3$, $\angle D = \angle 2 + \angle 4$. Тэарэма даказана.

Вынік.

Перыметр паралелаграма са старанамі a і b вылічваецца па формуле $P = 2(a + b)$.

Пры доказе тэарэмы атрымана яшчэ адна ўласцівасць паралелаграма: ***«Дыяганаль паралелаграма падзяляе яго на два роўныя трохвугольнікі»***.

Тэарэма (уласцівасць дыяганалей паралелаграма).
Дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца напалам.



Рыс. 15

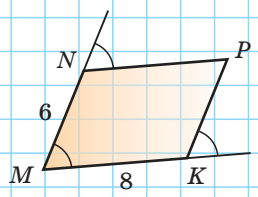
Дадзена: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 15).
Даказаць: $AO = OC$, $BO = OD$.
Доказ. Паколькі $ABCD$ — паралелаграм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Трохвугольнікі AOD і COB роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($\angle 1 = \angle 2$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AD і BC і сякучай AC, $\angle 3 = \angle 4$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AD і BC і сякучай BD, $AD = BC$ як процілеглыя стораны паралелаграма). З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $AO = OC$, $OD = BO$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма называецца *цэнтрам паралелаграма*.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

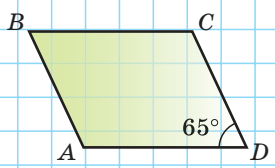
Тэст 1

Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $MNPK$.



Тэст 2

Знайдзіце вуглы A, B і C паралелаграма $ABCD$.



Правообладатель Народная асвета

Увага!

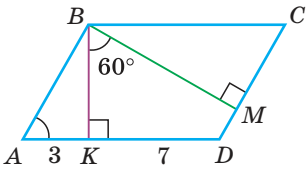
Калі на рысунку да задачы і ў яе ўмове не пазначана размернасць (напрыклад, як у **Тэсце 1**), то маецца на ўвазе, што даўжыні адрэзкаў выражаны ў адных і тых жа адзінках. Адказ для гэтай задачы даецца без размернасці.

Заданні да § 2

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *ABCD — паралелаграм, BK і BM — яго вышыні, ∠KBM = 60°, AK = 3 см, KD = 7 см. Знайсці: ∠ABK, ∠A, старану AB, перыметр паралелаграма ABCD* (рыс. 16).



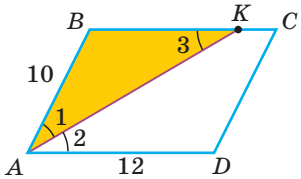
Рыс. 16

Рашэнне. Паколькі $BM \perp AB$, то $\angle ABM = 90°$, $\angle ABK = 90° - 60° = 30°$. У прамавугольным трохвугольніку ABK $\angle A = 90° - 30° = 60°$. Паколькі ў трохвугольніку ABK катэт AK ляжыць насупраць вугла ў 30°, то ён роўны палавіне гіпатэнузы. Адсюль гіпатэнуза $AB = 2AK = 6$ см. Паколькі $AD = AK + KD = 10$ см, то $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 + 10) = 32$ (см).

Адказ: 30°; 60°; 6 см; 32 см.

Заўвага. Паколькі $\angle A$ і $\angle KBM$ дапаўняюць $\angle ABK$ да 90°, то $\angle A = \angle KBM$. Карысна запомніць уласцівасць: ***«Вугал паміж вышынямі паралелаграма, праведзенымі з яго вяршыні, роўны вуглу пры суседняй вяршыні»***.

Задача 2. *Бісектрыса вугла A паралелаграма ABCD перасякае старану BC у пункце K, AD = 12 см, AB = 10 см. Знайсці даўжыню адрэзка KC* (рыс. 17).



Рыс. 17

Рашэнне.

1) $\angle 1 = \angle 2$ (AK — бісектрыса);

2) $\angle 2 = \angle 3$ (як накрыжлеглыя вуглы пры $AD \parallel BC$ і сякучай AK);

3) $\angle 1 = \angle 3$, $\triangle ABK$ — раўнабедраны (па прымеце раўнабедранага трохвугольніка);

4) $AB = BK = 10$ см (як бакавыя стораны раўнабедранага трохвугольніка);

5) $BC = AD = 12$ см (як процілеглыя стораны паралелаграма);

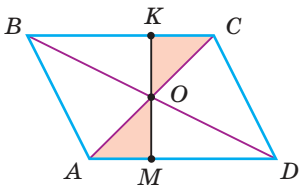
6) $KC = BC - BK = 12 - 10 = 2$ (см).

Адказ: 2 см.

Заўвага. Пры рашэнні задачы даказана ўласцівасць: ***«Бісектрыса вугла паралелаграма адсякае ад яго раўнабедраны трохвугольнік»***.

Правообладатель Народная асвета

Задача 3. *Даказаць, што любы адрэзак з канцамі на старанах паралелаграма, які праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей, дзеліцца гэтым пунктам папалам.*



Рыс. 18

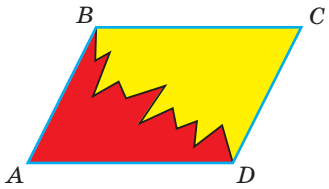
Доказ. Няхай $ABCD$ — паралелаграм, KM — дадзены адрэзак (рыс. 18). Дакажам, што $OK = OM$. Разгледзім $\triangle AOM$ і $\triangle COK$. У іх $AO = OC$ (дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца папалам), $\angle OAM = \angle OCK$ (як накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых AD і BC і сякучай AC), $\angle AOM = \angle COK$ (як вертыкальныя). Значыць, $\triangle AOM = \triangle COK$ (па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $OM = OK$. Сцверджанне даказана.

Вынік.

Паколькі пункты K і M сіметрычныя адносна пункта перасячэння дыяганалей, то можна зрабіць вывад, што паралелаграм — цэнтральна-сіметрычная фігура і цэнтр паралелаграма з'яўляецца яго цэнтрам сіметрыі (гл. § 12*).

Гімнастыка розуму

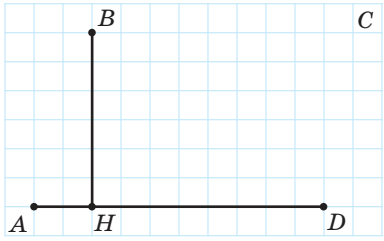
Паралелаграм $ABCD$ разрэзалі па ломанай лініі, якая злучае вяршыні B і D (рыс. 19). Вызначыце, перыметр якой часткі паралелаграма большы: жоўтай ці чырвонай.



Рыс. 19

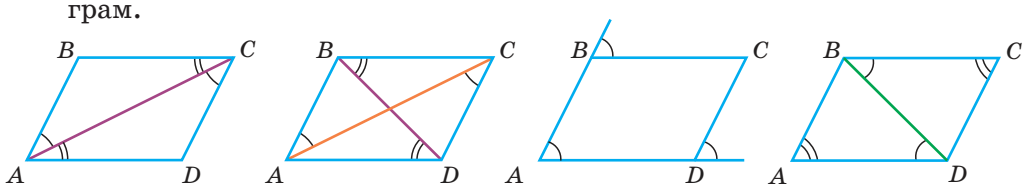
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

17. Перанясіце рысунак 20 у сшытак. Пабудуйце паралелаграм $ABCD$. Чаму роўна даўжыня стараны BC? Чым з'яўляецца адрэзак BH для паралелаграма $ABCD$? Правядзіце вышыню CM да стараны AD. Чаму з роўнасці $\triangle ABH$ і $\triangle DCM$ вынікае, што $AB \parallel CD$?



Рыс. 20

18. Па даных на рысунках 21, *а*)—*г*) дакажыце, што $ABCD$ — паралелаграм.



Рыс. 21

Правообладатель Народная асвета

19. Знайдзіце невядомыя вуглы паралелаграма $ABCD$, калі:

а) $\angle B = 130°$;
б) $\angle A + \angle C = 140°$;
в) вугал A на $20°$ меншы за вугал B;
г) $\angle C : \angle B = 2 : 7$;
д) $\angle BAC = 35°$, $\angle DAC = 25°$.

20. Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 48 см. Знайдзіце яго стораны, калі:

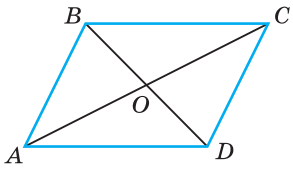
а) $CD = 10$ см;
б) старана AD на 2 см большая за старану AB;
в) $AB : AD = 3 : 5$;
г) $AB + BC + CD = 32$ см;
д) $\angle BAC = \angle DAC$.

21. Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O (рыс. 22). Знайдзіце:

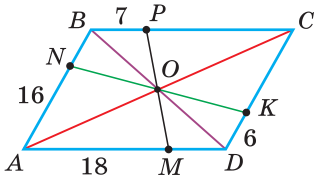
а) перыметр трохвугольніка AOB, калі $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, $CD = 10$ см;
б) перыметр паралелаграма $ABCD$, калі $AC = 14$ см, $BD = 12$ см, $P_{AOB} = 21$ см, $P_{ABD} = 33$ см.

22. У паралелаграме $ABCD$ $AN = 16$ см, $BP = 7$ см, $KD = 6$ см, $AM = 18$ см (рыс. 23). Знайдзіце перыметр паралелаграма.

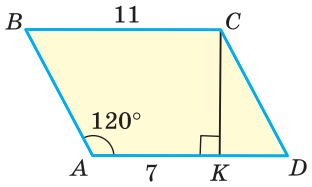
23. У паралелаграме $ABCD$ праведзена вышыня CK, $\angle A = 120°$, $BC = 11$ см, $AK = 7$ см (рыс. 24). Знайдзіце перыметр паралелаграма.



Рыс. 22



Рыс. 23



Рыс. 24

24. а) Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 36 см, перыметр трохвугольніка ABC роўны 28 см, $\angle ACB = 30°$. Знайдзіце: 1) старану AC; 2) вышыню CK, апушчаную на старану AD.

б) Дыяганаль BD паралелаграма $ABCD$ перпендыкулярна да стараны AB, $P_{ABCD} = 30$ см, $\angle ADC = 120°$. Знайдзіце стораны паралелаграма.

25. а) Дакажыце, што бісектрысы процілеглых вуглоў паралелаграма $ABCD$ ($AD \neq AB$) паралельныя паміж сабой.

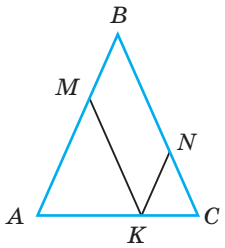
б) Дакажыце, што бісектрысы суседніх вуглоў паралелаграма ўзаемна перпендыкулярныя.

26. Бісектрыса вугла A паралелаграма $ABCD$ дзеліць старану BC на адрэзкі $BK = 6$ см, $KC = 4$ см. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

27. Бісектрысы вуглоў B і C паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце K, які належыць старане AD. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі $KD = 8$ см.

Правообладатель Народная асвета

28. Трохвугольнік ABC — раўнабедраны, $AB = BC = 12$ см (рыс. 25). Знайдзіце перыметр паралелаграма $MBNK$.

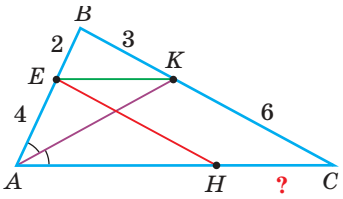


Рыс. 25

29. Пункт M — сярэдзіна стараны BC паралелаграма $ABCD$, $\angle ABC = 104°$, $\angle BAM = 38°$. Знайдзіце велічыню вугла CDM.

30. Дадзены паралелаграм $ABCD$ з вострым вуглом A, AH і AK — вышыні, праведзеныя да старон BC і CD адпаведна. Дакажыце, што $\angle HAK = \angle B$.

31*. У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AK, $KE \parallel AC$, $EH \parallel BC$ (рыс. 26). Па памерах на рысунку знайдзіце даўжыню адрэзка HC.



Рыс. 26

32*. Знайдзіце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі паралелаграма:
а) па дзвюх суседніх старанах і вугле паміж імі;
б) па дзвюх суседніх старанах і вышыні, праведзенай да адной са старон.

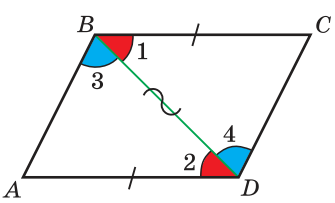
33*. Сфармулюйце якую-небудзь прымету роўнасці паралелаграмаў і дакажыце яе. (Фігуры роўныя, калі іх можна сумясціць накладаннем.)

34*. Дадзены вугал A і пункт M унутры яго. Пабудуйце пры дапамозе цыркуля і лінейкі адрэзак з канцамі на старанах вугла A, які праходзіць праз пункт M і дзеліцца гэтым пунктам папалам.

§ 3. Прыметы паралелаграма

Разгледзім тры прыметы паралелаграма.

Тэарэма (прымета паралелаграма).
Калі ў чатырохвугольніка дзве староны роўныя і паралельныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



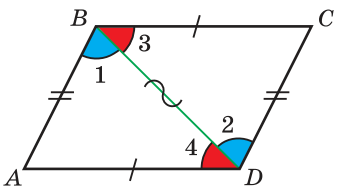
Рыс. 27

Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$,
$BC = AD$, $BC \parallel AD$.
Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 27).
Доказ. Правядзём у чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганаль BD. Трохвугольнікі ABD і CDB роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($AD = BC$ па ўмове, $\angle 1 = \angle 2$ як накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых BC і AD і сякучай BD, ста-

Правообладатель Народная асвета

рана BD — агульная). *З роўнасці трохвугольнікаў вынікае*, што $\angle 3 = \angle 4$. А паколькі $\angle 3$ і $\angle 4$ па сваім размяшчэнні — накрыжлеглыя вуглы пры прамых AB і CD і сякучай BD, то $AB \parallel CD$ (па прымеце паралельнасці прамых). Такім чынам, у чатырохвугольніка $ABCD$ процілеглыя стораны паралельныя. Таму $ABCD$ — паралелаграм (па азначэнні паралелаграма). Тэарэма даказана.

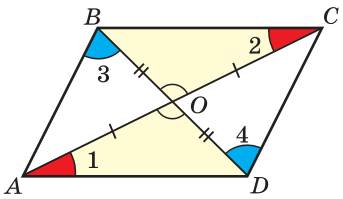
Тэарэма (прымета паралелаграма).
Калі ў чатырохвугольніка процілеглыя стораны роўныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 28

Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$, $BC = AD$, $AB = CD$.
Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 28).
Доказ. Правядзём дыяганаль BD. Трохвугольнікі ABD і CDB роўныя па трох старанах ($AD = BC$, $AB = CD$ па ўмове, старана BD — агульная). *З роўнасці трохвугольнікаў вынікае*, што $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. А паколькі $\angle 3$ і $\angle 4$ — накрыжлеглыя вуглы пры прамых BC і AD і сякучай BD, то $BC \parallel AD$ (па прымеце паралельнасці прамых). Аналагічна, паколькі $\angle 1$ і $\angle 2$ — накрыжлеглыя вуглы пры прамых AB і CD і сякучай BD, то $AB \parallel CD$. Паколькі ў чатырохвугольніка $ABCD$ процілеглыя стораны паралельныя, то $ABCD$ — паралелаграм (па азначэнні паралелаграма). Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета паралелаграма).
Калі ў чатырохвугольніка дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 29

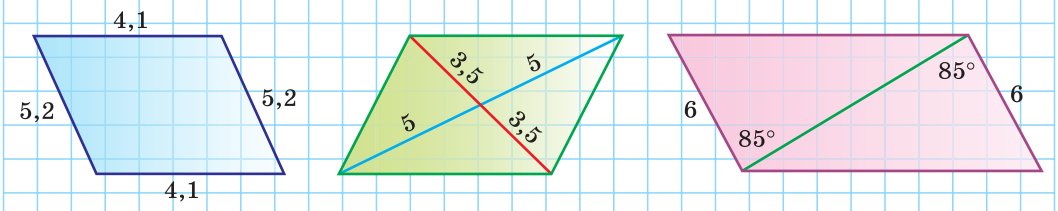
Дадзена: чатырохвугольнік $ABCD$, $AO = OC$, $BO = OD$.
Даказаць: $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 29).
Доказ. Трохвугольнікі AOD і COB роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($\angle AOD = \angle COB$ як вертыкальныя, $AO = OC$, $BO = OD$ па ўмове). *З роўнасці трохвугольнікаў вынікае*, што $\angle 1 = \angle 2$. Але вуглы 1 і 2 — накрыжлеглыя пры прамых AD і BC і сякучай AC. Па прымеце паралельнасці прамых $AD \parallel BC$. Аналагічна трохвугольнікі AOB і COD роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў, адкуль $\angle 3 = \angle 4$, $AB \parallel CD$. Паколькі ў чатырохвугольніка $ABCD$ процілеглыя стораны паралельныя, то ён — паралелаграм (па азначэнні паралелаграма). Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2.**

Тэст 1

Растлумачце, чаму кожны з паказаных на рысунках чатырохвугольнікаў з'яўляецца паралелаграмам.



Тэст 2

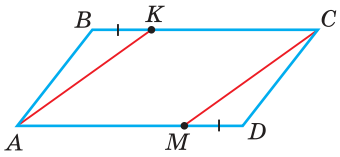
Ці правільнае сцверджанне: «Калі ў чатырохвугольніка дзве процілеглыя стараны роўныя, а дзве іншыя — паралельныя, то гэта паралелаграм»? Калі ваш адказ «не», то прывядзіце *контрпрыклад* (прыклад, які абвяргае гэта сцверджанне).

Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Дадзены паралелаграм ABCD. На яго старанах BC і AD адзначаны роўныя адрэзкі BK і DM. Даказаць, што AKCM — паралелаграм.*



Рыс. 30

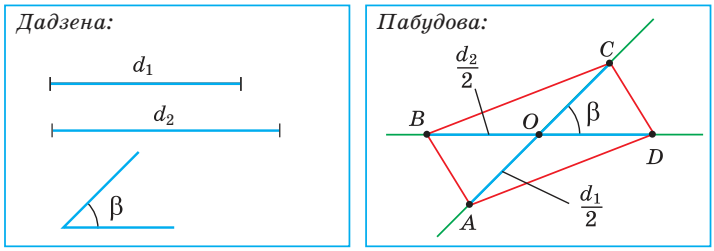
Доказ. У любога паралелаграма процілеглыя стораны роўныя і паралельныя. Таму $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (рыс. 30). Паколькі $KC = BC - BK$, $AM = AD - DM$ і па ўмове $BK = DM$, то $KC = AM$. Паколькі ў чатырохвугольніка $AKCM$ стораны KC і AM роўныя і паралельныя, то ён з'яўляецца паралелаграмам па прымеце паралелаграма.

Задача 2. *Пабудаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі паралелаграм па дзвюх дыяганалях і вугле паміж імі.*

Рашэнне. Няхай d_1 і d_2 — дадзеныя дыяганалі, β — вугал паміж імі (рыс. 31, *а*).

Пабудова. Дзелім кожную з дыяганалей d_1 і d_2 папалам (успомніце, як гэта робіцца пры дапамозе цыркуля і лінейкі). Будуем вугал O, роўны вуглу β (успомніце алгарытм пабудовы). На старанах вугла O і

Правообладатель Народная асвета



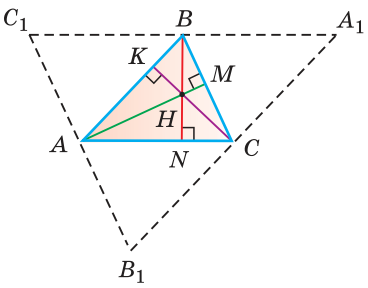
а) *б)*

Рыс. 31

на іх прадаўжэннях адкладваем адрэзкі $OC = OA = \frac{d_1}{2}$ і $OD = OB = \frac{d_2}{2}$ (рыс. 31, *б*). Праводзім адрэзкі AB, BC, CD і AD. Чатырохвугольнік $ABCD$ — шуканы паралелаграм.

Доказ. У чатырохвугольніка $ABCD$ дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам (паводле пабудовы), таму ён паралелаграм (па прымеце паралелаграма). Дыяганалі AC і BD роўны d_1 і d_2, і вугал AOB паміж дыяганалямі роўны β (паводле пабудовы).

Задача 3. *Даказаць, што вышыні трохвугольніка (або іх прадаўжэнні) перасякаюцца ў адным пункце.*



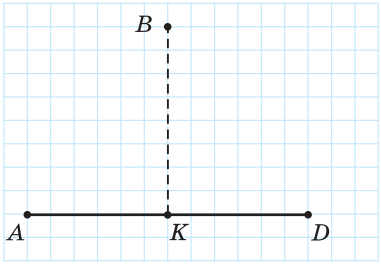
Рыс. 32

Доказ. Няхай AM, BN і CK — вышыні трохвугольніка ABC (рыс. 32). Праз вяршыні трохвугольніка ABC правядзём прамыя, паралельныя процілеглым старанам. У іх перасячэнні атрымаем трохвугольнік $A_1B_1C_1$. Паколькі $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, то ABA_1C — паралелаграм, адкуль $BA_1 = AC$. Аналагічна AC_1BC — паралелаграм і $C_1B = AC$. Тады $C_1B = BA_1$. Значыць, пункт B — сярэдзіна адрэзка A_1C_1. Паколькі $AC \parallel A_1C_1$ і $BN \perp AC$, то $BN \perp A_1C_1$ (прамая, перпендыкулярная да адной з дзвюх паралельных прамых, перпендыкулярна і да другой прамой). Прамая BN — пасярэдні перпендыкуляр да стараны A_1C_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$. Аналагічна даказваецца, што прамыя AM і CK — пасярэднія перпендыкуляры да старон B_1C_1 і A_1B_1 адпаведна. А мы ведаем, што пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце (7-ы кл., с. 81, задача **2**). Такім чынам, вышыні AM, BN і CK (або іх прадаўжэнні ў выпадку тупавугольнага трохвугольніка) перасякаюцца ў адным пункце. Што і трэба было даказаць.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як у матэматыцы называецца пункт перасячэння вышынь.

Правообладатель Народная асвета

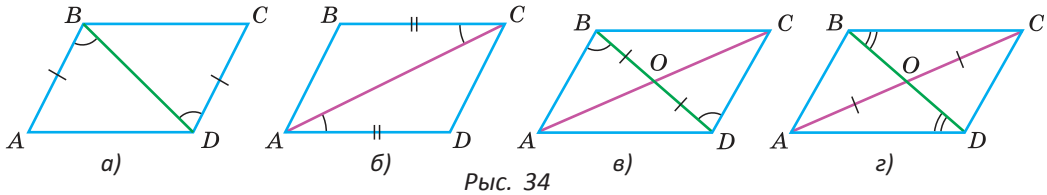
РАШАЕМ САМАСТОЙНА



Рыс. 33

35. Перанясіце рысунак 33 у сшытак. Правядзіце (управа) адрэзак BC, роўны і паралельны адрэзку AD. Растлумачце, чаму чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм. Знайдзіце прыбліжана перыметр паралелаграма $ABCD$ у сантыметрах.

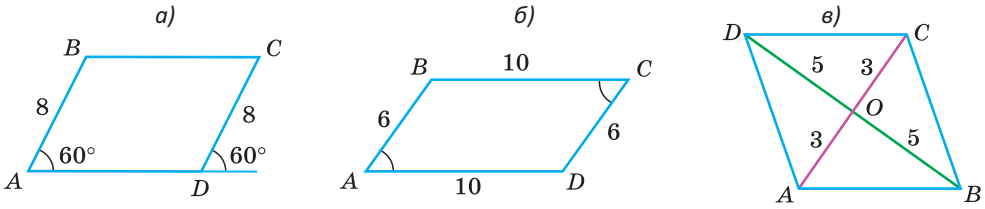
36. Дакажыце, што на рысунках 34, *а*)—*г*) $ABCD$ — паралелаграм.



Рыс. 34

37. Выкарыстаўшы даныя на рысунках 35, *а*)—*в*), адкажыце на наступныя пытанні:

а) Чаму на рысунку 35, *а*) $AD \parallel BC$?
б) Чаму на рысунку 35, *б*) $\angle A = \angle C$?
в) Чаму на рысунку 35, *в*) $\angle ADC + \angle DCB = 180°$?

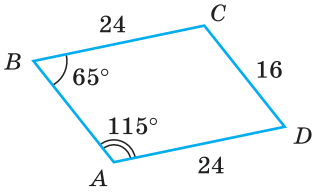


Рыс. 35

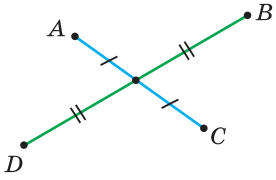
38. Па даных на рысунку 36 знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ABCD$.

39. Адрэзкі AC і BD (рыс. 37) перасякаюцца ў іх сярэдзінах. Вядома, што $\angle DAB = 126°$. Знайдзіце $\angle ADC$.

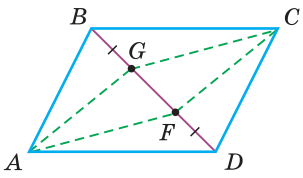
40. Дадзены паралелаграм $ABCD$ (рыс. 38). На яго дыяганалі BD адкладзены роўныя адрэзкі BG і DF. Дакажыце, што чатырохвугольнік $AGCF$ — паралелаграм.



Рыс. 36



Рыс. 37



Рыс. 38

Правообладатель Народная асвета

41. $ABCD$ — паралелаграм, K — сярэдзіна стараны AB, M — сярэдзіна стараны DC. Дакажыце, што:
а) $AKMD$ — паралелаграм; б) $KBMD$ — паралелаграм.

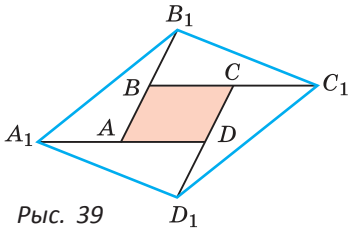
42. $MNPK$ — чатырохвугольнік, $MN = PK$, $NP = MK$, $\angle M = 72°$. Знайдзіце:
а) градусныя меры вуглоў MKP і NPK;
б) вугал паміж бісектрысай вугла K і прамой NP.

43. У выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ $AB = CD = 52$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, дыяганалі перасякаюцца ў пункце O, $P_{ABO} = 138$ см, $P_{BOC} = 188$ см. Знайдзіце перыметр гэтага чатырохвугольніка.

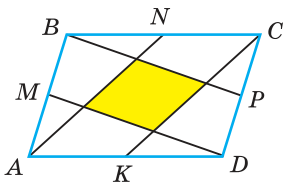
44. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка процілеглыя вуглы роўныя, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.

45. Медыяну BM трохвугольніка ABC прадоўжылі за пункт M на адрэзак MD, роўны адрэзку BM. Дакажыце, што $ABCD$ — паралелаграм.

46. Чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 39), $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$, $DD_1 = CD$, $AA_1 = DA$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграм.



Рыс. 39



Рыс. 40

47. Пункты M, N, P, K — сярэдзіны старон паралелаграма $ABCD$ (рыс. 40). Дакажыце, што зафарбаваны чатырохвугольнік — паралелаграм.

48. Пункты $P(-1; 1)$, $E(-3; 5)$, $K(4; 5)$ — вяршыні паралелаграма. Знайдзіце каардынаты чацвёртай вяршыні G. Разгледзьце ўсе варыянты.

49*. Дадзены паралелаграм $ABCD$, $AB = 10$ см, $AD = 16$ см. Бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце K, а бісектрысы вуглоў C і D — у пункце M. Пункты K і M ляжаць унутры паралелаграма. Знайдзіце даўжыню адрэзка MK.

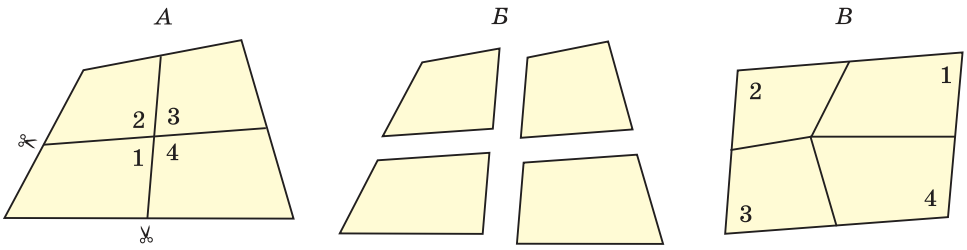
50*. Знайдзіце алгарытм пабудовы цыркулем і лінейкай паралелаграма $ABCD$:
а) па дзвюх дыяганалях і старане;
б) па дзвюх дыяганалях і вышыні паралелаграма.

51*. У трохвугольніку ABC вышыні BH і AF перасякаюцца ў пункце O. З пункта C да прамой AC у адну паўплоскасць з пунктам B узняты перпендыкуляр CK, роўны адрэзку BO. Дакажыце, што $BK \perp AB$.

Правообладатель Народная асвета

Мадэляванне

Вядома, што калі выпуклы чатырохвугольнік разрэзаць па сярэдніх лініях (адрэзках, якія злучаюць сярэдзіны процілеглых старон чатырохвугольніка), то з атрыманых частак заўсёды можна скласці паралелаграм.



Рыс. 41

Заданне.

1. Выражыце з ліста паперы адвольны выпуклы чатырохвугольнік. Адзначце пры дапамозе лінейкі сярэдзіны яго старон. Злучыце сярэдзіны процілеглых старон адрэзкамі (рыс. 41, *А*).

2. Разрэжце нажніцамі чатырохвугольнік па атрыманых сярэдніх лініях (рыс. 41, *Б*).

3. З атрыманых чатырох частак чатырохвугольніка складзіце паралелаграм (рыс. 41, *В*).

4*. Дакажыце, што з аналагічных частак любога выпуклага чатырохвугольніка заўсёды можна скласці паралелаграм.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне паралелаграма.
2. Азначэнне вышыні паралелаграма.
3. Уласцівасці паралелаграма.
4. Прыметы паралелаграма.

Умеем

1. Даказваць уласцівасці паралелаграма.
2. Даказваць прыметы паралелаграма.

Правообладатель Народная асвета

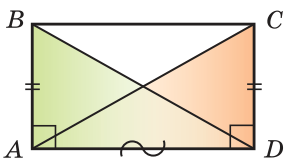
§ 4. Прамавугольнік

Азначэнне. **Прамавугольнікам** называецца паралелаграм, у якога ўсе вуглы прамыя.

Заўважым, што калі ў некаторага паралелаграма адзін вугал прамы, то і астатнія тры вуглы будуць прамымі, паколькі сума суседніх вуглоў паралелаграма роўна 180°. Такім чынам, *паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал, з'яўляецца прамавугольнікам.*

Паколькі прамавугольнік — прыватны выпадак паралелаграма, то ён валодае ўсімі ўласцівасцямі паралелаграма. Аднак у прамавугольніка ёсць і адметная ўласцівасць. Сфармулюем гэту ўласцівасць у выглядзе тэарэмы.

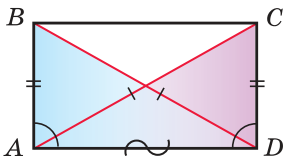
Тэарэма (уласцівасць дыяганалей прамавугольніка).
Дыяганалі прамавугольніка роўныя.



Рыс. 42

Дадзена: $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 42).
Даказаць: $AC = BD$.
Доказ. Прамавугольныя трохвугольнікі ABD і DCA роўныя па двух катэтах: катэты AB і CD роўныя як процілеглыя стораны паралелаграма, катэт AD — агульны. Адсюль $AC = BD$.
Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета прамавугольніка).
Калі ў паралелаграма дыяганалі роўныя, то гэта прамавугольнік.



Рыс. 43

Дадзена: $ABCD$ — паралелаграм, $AC = BD$.
Даказаць: $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 43).
Доказ. Трохвугольнікі ABD і DCA роўныя па трох старанах: $AB = CD$ па ўласцівасці паралелаграма, $AC = BD$ па ўмове, старана AD — агульная. Адсюль $\angle BAD = \angle CDA$. Паколькі сума суседніх вуглоў паралелаграма роўна 180°, то $\angle BAD = \angle CDA = 90°$, $\angle ABC = \angle BCD = 90°$. У паралелаграма $ABCD$ усе вуглы прамыя, таму ён — прамавугольнік.
Тэарэма даказана.

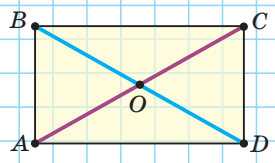
Заўвага. Прамавугольнікі, у прыватнасці, роўныя, калі роўныя іх стораны, паколькі ў гэтым выпадку прамавугольнікі можна сумясціць накладаннем.

Правообладатель Народная асвета

А цяпер выканайце **Тэст 1**, **Тэст 2** і **Тэст 3**.

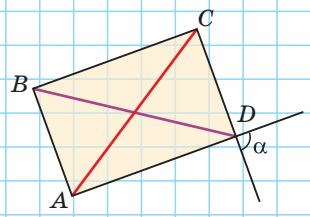
Тэст 1

Калі $ABCD$ — прамавугольнік і $AO + BO + CO = 24$ см, то $BD = \ldots$



Тэст 2

Калі $ABCD$ — паралелаграм і $AC = BD$, то $\alpha = \ldots$



Тэст 3

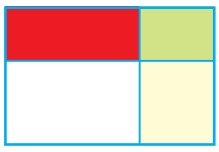
Ці правільнае сцверджанне: «Калі ў чатырохвугольніка дыяганалі роўныя, то гэта прамавугольнік»? Калі сцверджанне няправільнае, то прывядзіце контрпрыклад.

Гімнастыка розуму

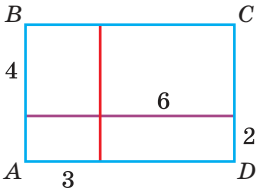
1. У прамавугольніку правялі два адрэзкі, перпендыкулярныя да яго старон (рыс. 44). Якую максімальную колькасць прамавугольнікаў можна налічыць на рысунку?

2. У прамавугольніку $ABCD$ правялі два адрэзкі (рыс. 45), паралельныя яго старанам. Па пазначанай даўжыні малых адрэзкаў знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$.

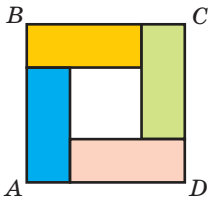
3. З чатырох роўных прамавугольнікаў з перыметрам 24 см кожны склалі квадрат $ABCD$ (рыс. 46). Знайдзіце перыметр квадрата $ABCD$.



Рыс. 44



Рыс. 45



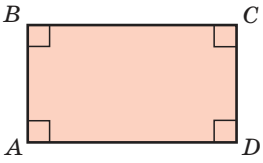
Рыс. 46

Правообладатель Народная асвета

Заданні да § 4

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што калі ў чатырохвугольніка ўсе вуглы прамыя, то ён з'яўляецца прамавугольнікам.*

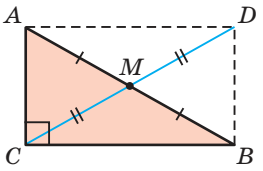


Рыс. 47

Доказ. Няхай у чатырохвугольніка $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle D = \angle C = 90°$ (рыс. 47). Паколькі $\angle A + \angle B = 180°$ і $\angle A + \angle D = 180°$, то $BC \parallel AD$ і $AB \parallel CD$ па прымеце паралельнасці прамых. Тады $ABCD$ — паралелаграм па азначэнні. А паралелаграм, у якога ўсе вуглы прамыя, — гэта прамавугольнік.

Заўвага. Такім чынам, многавугольнік з'яўляецца прамавугольнікам, калі гэта:
1) паралелаграм, у якога ўсе вуглы прамыя;
2) паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал;
3) чатырохвугольнік, у якога ўсе вуглы прамыя;
4) паралелаграм, у якога дыяганалі роўныя.

Задача 2. *Даказаць тэарэму:* ***«Медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы».***

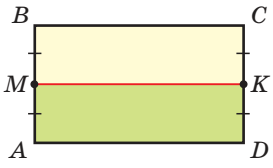


Рыс. 48

Доказ. Няхай CM — медыяна $\triangle ACB$, дзе $\angle C = 90°$ (рыс. 48). Прадоўжым медыяну CM за пункт M на яе даўжыню. Атрымаем $CM = \frac{1}{2}CD$. Паколькі ў чатырохвугольніка $CADB$ дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то гэта паралелаграм па прымеце паралелаграма. Паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал, з'яўляецца прамавугольнікам. Таму $CADB$ — прамавугольнік. Паколькі дыяганалі прамавугольніка роўныя, то $CD = AB$ і $CM = \frac{1}{2}AB$. Што і трэба было даказаць.

Дакажыце аналагічным спосабам адваротную тэарэму: **«Калі ў трохвугольніку медыяна роўна палавіне стараны, да якой яна праведзена, то трохвугольнік прамавугольны».**

Задача 3. *Даказаць, што адрэзак, які злучае сярэдзіны процілеглых старон прамавугольніка, разбівае гэты прамавугольнік на два роўныя прамавугольнікі.*



Рыс. 49

Доказ. Няхай $ABCD$ — прамавугольнік, M і K — сярэдзіны старон AB і CD (рыс. 49). Адрэзкі MB і CK роўныя як палавіны роўных старон AB і CD і паралельныя, паколькі $AB \parallel CD$. Таму чатырохвугольнік $MBCK$ з'яўляецца паралелаграмам па прымеце паралелаграма. А паколькі $\angle B = 90°$, то $MBCK$ —

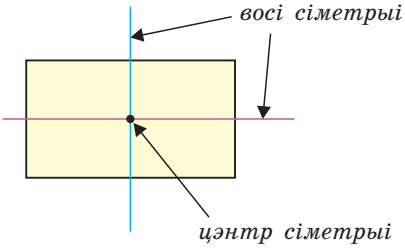
Правообладатель Народная асвета

прамавугольнік. Аналагічна даказваем, што $AMKD$ — прамавугольнік. Паколькі ў гэтых прамавугольнікаў стораны роўныя, то яны роўныя паміж сабой.

Вынік.

Калі прамавугольнік $ABCD$ мысленна перагнуць па прамой MK, то з-за таго, што $AB \perp MK$, $CD \perp MK$, $MB = MA$, $KC = KD$, пункт B супадзе з пунктам A, пункт C — з пунктам D, прамавугольнік $MBCK$ супадзе з прамавугольнікам $AMKD$. Прамая MK будзе воссю сіметрыі прамавугольніка $ABCD$ (гл. § 12*).

Такім чынам, у прамавугольніка ёсць цэнтр сіметрыі, як у любога паралелаграма (ён знаходзіцца ў пункце перасячэння дыяганалей), а таксама дзве восі сіметрыі, якія праходзяць праз сярэдзіны яго процілеглых старон (рыс. 50).



Рыс. 50

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

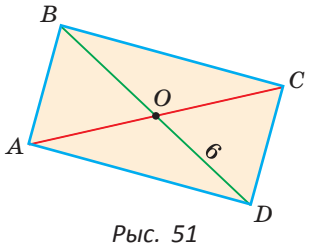
52. Дадзены прамавугольнік $ABCD$, O — пункт перасячэння яго дыяганалей. Знайдзіце даўжыню адрэзка BO, калі $AC = 8$ см.

53. $ABCD$ — прамавугольнік, яго дыяганалі перасякаюцца ў пункце O. Знайдзіце перыметр трохвугольніка AOD, калі $BC = 10$ см, $BD = 24$ см.

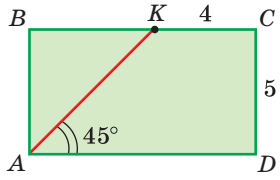
54. Знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$, калі перыметр трохвугольніка ABD роўны 30 см і $AC = 12$ см.

55. На рысунку 51 паказаны паралелаграм $ABCD$, $\angle ABC = 90°$, $OD = 6$ см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі AC.

56. Па даных на рысунку 52 знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$.



Рыс. 51

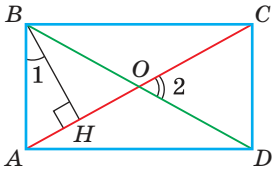


Рыс. 52

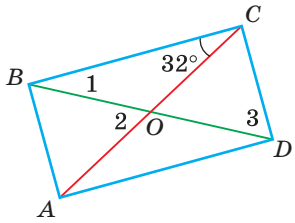
57. Дакажыце наступныя прыметы прамавугольніка:

а) «Калі ў чатырохвугольніка тры вуглы прамыя, то гэта прамавугольнік».
б) «Калі ў чатырохвугольніка ўсе вуглы роўныя, то гэта прамавугольнік».

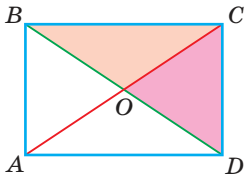
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 53



Рыс. 54



Рыс. 55

58. Дадзены прамавугольнік $ABCD$ (рыс. 53), $BH \perp AC$, $\angle 1 = 28°$. Знайдзіце $\angle 2$.

59. У паралелаграма $ABCD$ $AC = BD$, $\angle ACB = 32°$ (рыс. 54). Знайдзіце вуглы 1, 2 і 3 і ў адказе запішыце іх суму.

60. Дадзены прамавугольнік $ABCD$ (рыс. 55), $AB = 8$ см, рознасць перыметра трохвугольніка BOC і перыметра трохвугольніка COD роўна 4 см. Знайдзіце перыметр прамавугольніка $ABCD$.

61. У прамавугольніку $ABCD$ $AC = 12$ см, $\angle ADB = 15°$. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні A да прамой BD.

62. Дакажыце, што канцы двух дыяметраў акружнасці з'яўляюцца вяршынямі прамавугольніка.

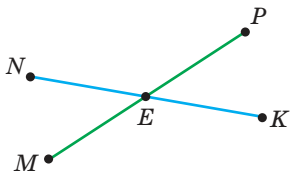
63. Пасярэдні перпендыкуляр да дыяганалі прамавугольніка дзеліць старану прамавугольніка ў адносіне $2 : 1$. Знайдзіце вуглы, якія дыяганаль прамавугольніка ўтварае з яго старанамі.

64. На рысунку 56 $ME = EP$, $NE = EK$, $\angle NPM = \angle MKN$. Знайдзіце $\angle MNP$.

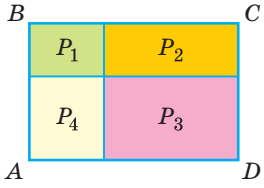
65*. Прамавугольнік разбілі прамымі, паралельнымі яго старанам, на чатыры прамавугольнікі (рыс. 57).

а) Ведаючы перыметры трох прамавугольнікаў: $P_1 = 8$ см, $P_2 = 14$ см, $P_3 = 24$ см, знайдзіце перыметр P_4 чацвёртага прамавугольніка.

б) Дакажыце, што пры любых значэннях P_1, P_2, P_3, P_4 правільная роўнасць $P_{ABCD} = P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.



Рыс. 56



Рыс. 57

66*. У паралелаграме $ABCD$ ($AD \neq AB$) правялі бісектрысы яго вуглоў. Якую фігуру ўтвараюць чатыры пабудаваныя бісектрысы? Дакажыце вашу гіпотэзу.

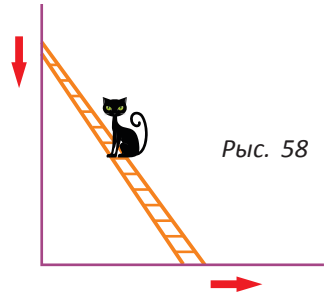
Правообладатель Народная асвета

67*. Знайдзіце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі прамавугольніка па наступных элементах:

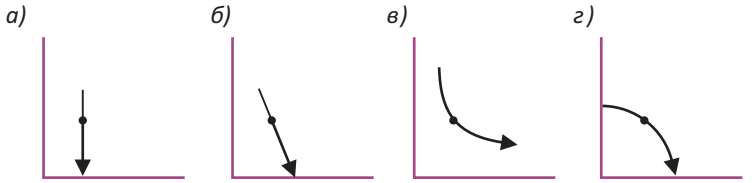
а) па дзвюх суседніх старанах a і b;
б) па старане a і дыяганалі d;
в) па дыяганалі d і вугле паміж дыяганалямі.

68*. На каардынатнай плоскасці пакажыце відарыс чатырохвугольніка $MNPK$, дзе $M(-1; -2)$, $N(-3; 4)$, $P(6; 7)$, $K(8; 1)$. Дакажыце, што $MNPK$: а) паралелаграм; б) прамавугольнік.

69*. Абыякавая кошка сядзіць на сярэдзіне драбін (рыс. 58). Драбіны пачынаюць падаць, слізгаючы канцамі па падлозе і сцяне. Па якой траекторыі будзе рухацца кошка: а), б), в) або г)?



Рыс. 58



Мадэляванне

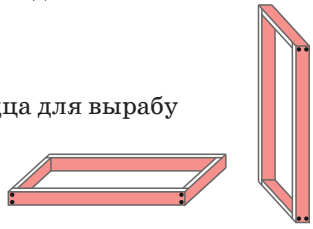
Бацька і сын хочуць зрабіць прамавугольную драўляную раму шырынёй 1 м і даўжынёй 1 м 80 см. У іх ёсць дошкі даўжынёй 2 м 20 см, шырынёй 12 см і таўшчынёй 2 см кожная.

1. Складзіце план вырабу такой рамы.

2. Як праверыць, ці мае выкананая па вашым плане рама форму прамавугольніка, пры дапамозе:

а) вугольніка;
б) рулеткі?

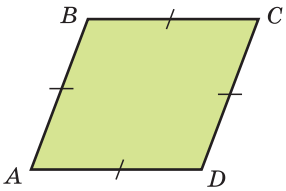
3. Падлічыце, колькі пагонных метраў дошкі спатрэбіцца для вырабу дзвюх такіх рам.



Правообладатель Народная асвета

§ 5. Ромб

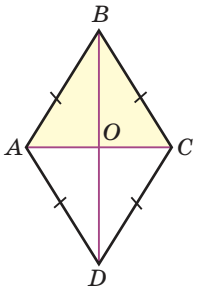
Азначэнне. **Ромбам** называецца параалелаграм, у якога ўсе стараны роўныя.



Рыс. 59

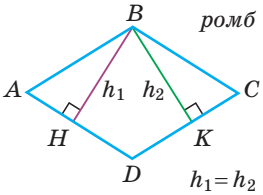
На рысунку 59 паказаны ромб $ABCD$. У яго $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ і $AB = BC = CD = AD$. Як прыватны выпадак паралелаграма ромб валодае ўсімі ўласцівасцямі паралелаграма. Акрамя гэтага, у яго ёсць адметныя ўласцівасці. Сфармулюем іх у выглядзе тэарэмы.

Тэарэма (уласцівасць ромба).
Дыяганалі ромба ўзаемна перпендыкулярныя і ляжаць на бісектрысах яго вуглоў.



Рыс. 60

Дадзена: $ABCD$ — ромб (рыс. 60).
Даказаць: $BD \perp AC$; BD — бісектрыса вугла ABC.
Доказ. Паколькі ў ромба ўсе стараны роўныя, то $AB = BC$ і $\triangle ABC$ — раўнабедраны. Дыяганалі любога паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Таму $AO = OC$ і BO — медыяна $\triangle ABC$. А медыяна раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца вышынёй і бісектрысай. Адсюль $BD \perp AC$ і BD — бісектрыса $\angle ABC$. Тэарэма даказана.



Рыс. 61

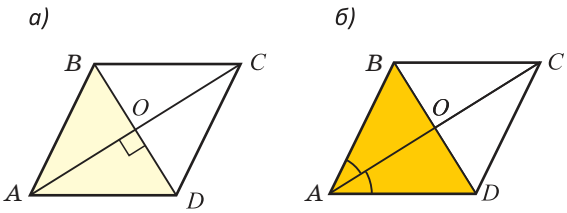
Для ромба таксама справядлівая ўласцівасць: **«Вышыні ромба, праведзеныя да суседніх старон, роўныя паміж сабой».**

Доказ вынікае з роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў ABH і CBK (рыс. 61) па гіпатэнузе ($AB = BC$) і вострым вугле ($\angle A = \angle C$).

Сфармулюйце і дакажыце сцверджанне, адваротнае дадзенаму.

Тэарэма (прыметы ромба).
Калі дыяганалі паралелаграма перпендыкулярныя, то гэта ромб.
Калі адна з дыяганалей паралелаграма ляжыць на бісектрысе яго вугла, то гэта ромб.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 62

Дадзена: $ABCD$ — паралелаграм, $AC \perp BD$ (рыс. 62, *а*) або AC — бісектрыса $\angle BAD$ (рыс. 62, *б*).

Даказаць: $ABCD$ — ромб.

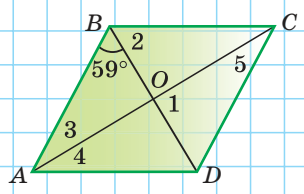
Доказ. Разгледзім $\triangle ABD$. Паколькі дыяганалі любога паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то $BO = OD$. Адсюль вынікае, што адрэзак AO — медыяна $\triangle ABD$. Калі $AC \perp BD$, то ў $\triangle ABD$ медыяна AO з'яўляецца вышынёй. Калі AC — бісектрыса $\angle BAD$, то ў $\triangle ABD$ медыяна AO з'яўляецца бісектрысай. У абодвух выпадках вынікае, што $\triangle ABD$ — раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка. Значыць, $AB = AD$. Тады ў паралелаграма $ABCD$ усе сторны роўныя. Такім чынам, ён — ромб. Тэарэма даказана.

Заўвага. Калі перагнуць ромб па дыяганалі AC, то вяршыня B сумесціцца з вяршыняй D ($BO \perp AC$, $BO = OD$), а, значыць, $\triangle ABC$ сумесціцца з $\triangle ADC$. *Ромб мае дзве восі сіметрыі, якія змяшчаюць яго дыяганалі.*

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

$ABCD$ — ромб. Знайдзіце вуглы 1, 2, 3, 4 і 5.



Тэст 2

1. Ці з'яўляецца любы ромб паралелаграмам?
2. Ці з'яўляецца любы паралелаграм ромбам?
3. Якой умове павінен адпавядаць паралелаграм, каб быць ромбам? Пералічыце ўсе вядомыя вам наборы ўмоў.

Пры дапамозе **Інтэрнэту**:
а) высветліце версію паходжання слова «ромб»;
б) знайдзіце, дзе ў тэхніцы выкарыстоўваюць паралелаграмы.

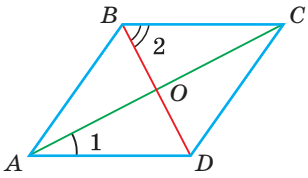
Заданні да § 5

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ABCD$* (рыс. 63), *у якога $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle 1 = 35°$, $\angle 2 = 55°$, $CD = 6$ см.*

Правообладатель Народная асвета

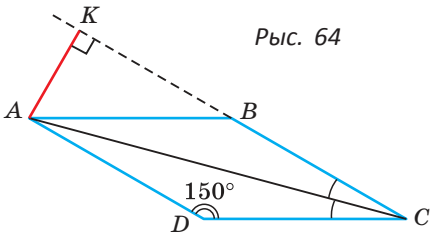
Р а ш э н н е. Паколькі дыяганалі чатырохвугольніка $ABCD$ пунктам O дзеляцца папалам, то гэта — паралелаграм (па прымеце паралелаграма). Тады $AD \parallel BC$ і $\angle ADB = \angle 2 = 55°$ (як накрыжлеглыя вуглы пры $AD \parallel BC$ і сякучай BD). У $\triangle AOD$ $\angle AOD = 180° - (\angle 1 + \angle ADO) = 180° - (35° + 55°) = 90°$. Значыць, $AC \perp BD$. Паколькі дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перпендыкулярныя, то гэта ромб (па прымеце ромба). Паколькі ў ромба ўсе стораны роўныя, то шуканы перыметр $P_{ABCD} = 4 \cdot CD = 4 \cdot 6 = 24$ (см).



Рыс. 63

А д к а з: 24 см.

Задача 2. *Дадзены паралелаграм $ABCD$ з перыметрам* 128 *см*, $\angle D = 150°$, $\angle ACD = \angle ACB$. *Знайдзіце адлегласць ад пункта A да прамой BC.*



Рыс. 64

Р а ш э н н е.

1) Правядзём $AK \perp BC$. Даўжыня перпендыкуляра AK — шуканая адлегласць (рыс. 64).

2) Паколькі $\angle ACD = \angle ACB$, то CA — бісектрыса вугла BCD і таму паралелаграм $ABCD$ — ромб (па прымеце ромба).

3) $\angle ABC = \angle D = 150°$ (у паралелаграма процілеглыя вуглы роўныя).

4) У прамавугольным трохвугольніку AKB $\angle ABK = 180° - 150° = 30°$ (па ўласцівасці сумежных вуглоў).

5) $AB = 128 : 4 = 32$ (см) (у ромба ўсе стораны роўныя).

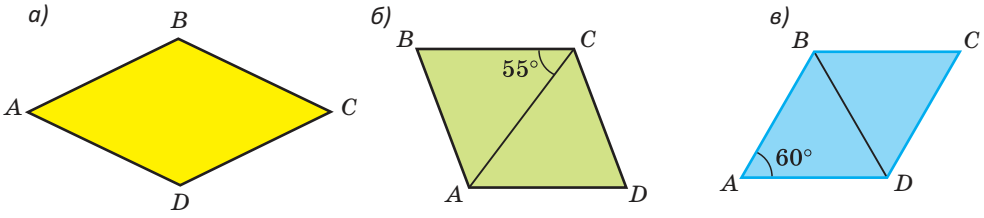
6) $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{32}{2} = 16$ (см) (катэт, які ляжыць насупраць вугла ў 30°, роўны палавіне гіпатэнузы).

А д к а з: 16 см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

70. Выкарыстаўшы транспарцір, пабудуйце роўнастаронні трохвугольнік. Дабудуйце яго да ромба. Правядзіце другую дыяганаль гэтага ромба. Пераканайцеся, што дыяганалі ромба перпендыкулярныя. Знайдзіце велічыню вугла, утворанага большай дыяганаллю ромба і яго стараной.

71. Па даных на рысунках 65, *а*)—*в*) рашыце наступныя задачы:



Рыс. 65

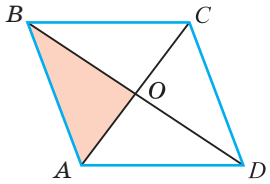
Правообладатель Народная асвета

а) Знайдзіце перыметр ромба $ABCD$ (рыс. 65, *а*), калі $AB + BC + AD = 36$ см;
б) $ABCD$ — ромб, $\angle ACB = 55°$ (рыс. 65, *б*). Знайдзіце $\angle ACD$ і $\angle ABC$.
в) Знайдзіце дыяганаль BD ромба $ABCD$ (рыс. 65, *в*) з перыметрам 64 см, калі $\angle A = 60°$.

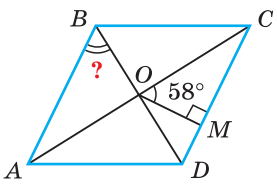
72. Дадзены ромб $ABCD$, $\angle DBC = 64°$. Знайдзіце:
а) $\angle ABC$; б) $\angle CDB$; в) $\angle BAD$; г) $\angle ACD$.

73. На рысунку 66 $ABCD$ — ромб з перыметрам 80 см, $AC = 24$ см, $BD = 32$ см. Знайдзіце:
а) перыметр трохвугольніка AOB;
б) перыметр трохвугольніка BCD;
в) перыметр трохвугольніка ABC.

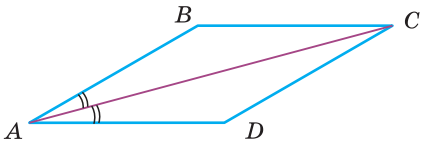
74. $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 67), $AB = BC$, $OM \perp DC$, $\angle COM = 58°$. Знайдзіце $\angle ABD$.



Рыс. 66



Рыс. 67



Рыс. 68

75. $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 68), $\angle BAC = \angle DAC = 15°$. Адлегласць ад пункта C да прамой AD роўна 12 см. Знайдзіце перыметр паралелаграма $ABCD$.

76. Адзін з вуглоў ромба роўны 120°, меншая дыяганаль роўна 8 см. Знайдзіце перыметр ромба.

77. BK і BM — вышыні ромба. Знайдзіце вуглы трохвугольніка KBM, калі:
а) вышыня BK у 2 разы меншая за старану AB;
б) вышыня BM дзеліць старану CD папалам.

78. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка ўсе стораны роўныя, то гэта — ромб.

79*. Знайдзіце алгарытм пабудовы ромба пры дапамозе цыркуля і лінейкі:
а) па дзвюх дыяганалях d_1 і d_2;
б) па адрэзку m, роўнаму перыметру ромба, і вострым вугле α ромба.

80*. Пры дапамозе двухбаковай лінейкі (звычайнай лінейкі з паралельнымі краямі) падзяліце дадзены вугал α папалам. Абгрунтуйце пабудову.

81*. На каардынатнай плоскасці пакажыце відарыс чатырохвугольніка $ABCD$, у якога $A(-2; 2)$, $B(4; 4)$, $C(2; -2)$, $D(-4; -4)$. Дакажыце, што $ABCD$ — ромб.

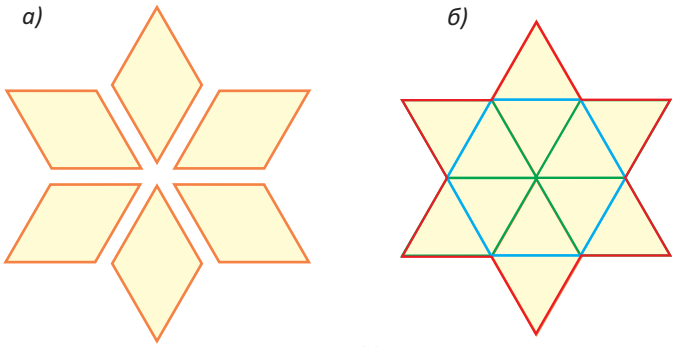
Правообладатель Народная асвета

Гімнастыка розуму

З шасці роўных ромбаў (рыс. 69, *а*) склалі многавугольнік (рыс. 69, *б*).

1. Колькі ўсяго ромбаў можна налічыць на рысунку 69, *б*)?

2. Калі перыметр аднаго маленькага ромба роўны 48 см, то чаму роўны перыметр складзенага многавугольніка?



Рыс. 69

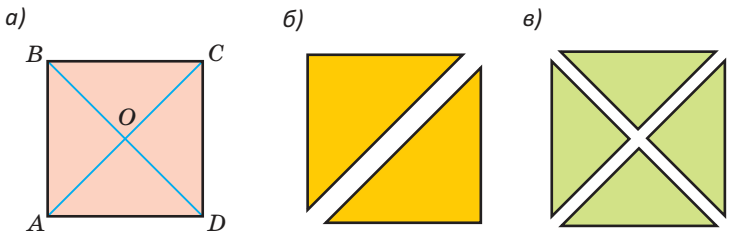
§ 6. Квадрат

Азначэнне. **Квадратам** называецца прамавугольнік, у якога ўсе сторы-ны роўныя.

На рысунку 70, *а*) паказаны квадрат *ABCD*. Паколькі любы прамавугольнік — гэта паралелаграм, то квадрат з'яўляецца паралелаграмам з роўнымі старанамі, у якога ўсе вуглы прамыя. Таму *квадрат валодае ўсімі ўласцівасцямі прамавугольніка і ромба*. У прыватнасці, дыяганалі квадрата роўныя, узаемна перпендыкулярныя і ляжаць на бісектрысах яго вуглоў.

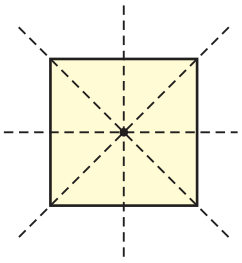
Дыяганаль квадрата дзеліць яго на 2 роўныя раўнабедраныя прамавугольныя трохвугольнікі (рыс. 70, *б*). А дзве дыяганалі дзеляць квадрат на 4 роўныя раўнабедраныя прамавугольныя трохвугольнікі (рыс. 70, *в*).

У квадрата, як у любога паралелаграма, ёсць адзін цэнтр сіметрыі (у пункце перасячэння дыяганалей) і чатыры восі сіметрыі (дзве з іх

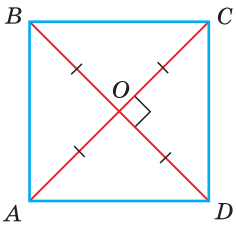


Рыс. 70

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 71



Рыс. 72

змяшчаюць дыяганалі, дзве праходзяць праз сярэдзіны процілеглых старон) (рыс. 71).

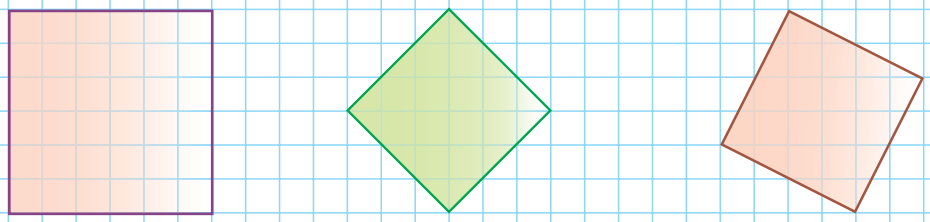
Для квадрата можна сфармуляваць прыметы квадрата. Напрыклад, «Калі ў ромба ёсць прамы вугал, то гэта квадрат», «Калі ў паралелаграма дыяганалі роўныя і перпендыкулярныя, то гэта квадрат». Дакажам наступную прымету квадрата: *«Калі ў чатырохвугольніка дыяганалі роўныя, перпендыкулярныя і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то гэта квадрат»*.

Доказ (рыс. 72). З таго, што дыяганалі дадзенага чатырохвугольніка пунктам перасячэння дзеляцца папалам, вынікае, што ён — паралелаграм (па прымеце паралелаграма). З таго, што ў гэтага паралелаграма дыяганалі роўныя, вынікае, што гэта прамавугольнік (па прымеце прамавугольніка). А з таго, што дыяганалі паралелаграма перпендыкулярныя, вынікае, што гэта ромб (па прымеце ромба). А паколькі ў ромба сторны роўныя, то дазены чатырохвугольнік з'яўляецца прамавугольнікам з роўнымі старанамі, г. зн. квадратам (па азначэнні квадрата).

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Дакажыце, што паказаныя на рысунку чатырохвугольнікі — квадраты.



Тэст 2

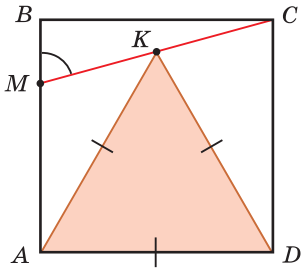
1. Ці з'яўляецца квадрат ромбам? Аргументуйце ваш адказ.
2. Ці можа ромб быць прамавугольнікам? Калі можа, то пры якой умове?

Правообладатель Народная асвета

Заданні да § 6

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *На рысунку 73 $ABCD$ — квадрат, AKD — роўнастаронні трохвугольнік. Знайсці $\angle BMC$.*

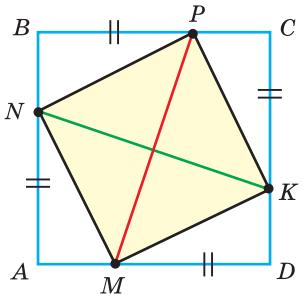


Рыс. 73

Р а ш э н н е. У роўнастаронняга трохвугольніка ўсе вуглы роўны па 60°, таму $\angle ADK = 60°$. Паколькі $\angle ADC = 90°$, то $\angle KDC = 90° - 60° = 30°$. Паколькі $KD = AD$ і $AD = CD$, то $KD = CD$. Значыць, $\triangle KDC$ — раўнабедраны з асновай KC. Вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўныя, таму $\angle KCD = \angle CKD = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Тады $\angle BMC = \angle DCM$ як накрыжлеглыя вуглы пры $AB \parallel CD$ і сякучай MC, $\angle BMC = 75°$.

А д к а з: 75°.

Задача 2. *На старанах квадрата $ABCD$ адзначаны пункты N, P, K, M так, што $AN = BP = CK = DM$ (рыс. 74). Даказаць, што $NK \perp PM$ і $NK = PM$.*

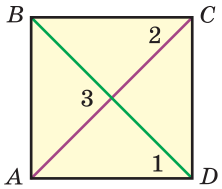


Рыс. 74

Д о к а з. Паколькі стораны квадрата роўныя і па ўмове $AN = BP = CK = DM$, то $NB = PC = KD = AM$. Тады прамавугольныя трохвугольнікі MAN, NBP, PCK і KDM роўныя па двух катэтах. Значыць, $MN = NP = PK = KM$. Паколькі ў чатырохвугольніка $MNPK$ стораны роўныя, то гэта ромб. У прамавугольнага трохвугольніка сума вострых вуглоў роўна 90°. Таму $\angle ANM + \angle AMN = 90°$. Але $\angle KMD = \angle ANM$, адкуль $\angle KMD + \angle AMN = 90°$ і $\angle NMK = 90°$. Паколькі ромб з прамым вуглом з'яўляецца квадратам, то $MNPK$ — квадрат. Мы ведаем, што ў квадрата дыяганалі роўныя і ўзаемна перпендыкулярныя. Значыць, $NK \perp PM$ і $NK = PM$. Што і трэба было даказаць.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

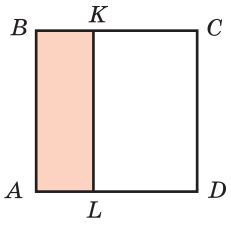
82. На рысунку 75 $ABCD$ — квадрат. Знайдзіце суму вуглоў 1, 2 і 3.



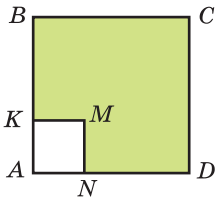
Рыс. 75

83. На рысунку 76 (гл. с. 42) $ABCD$ — квадрат, яго перыметр роўны 36 см. Знайдзіце суму перыметраў прамавугольнікаў $ABKL$ і $LKCD$, калі $BK = 3{,}5$ см.

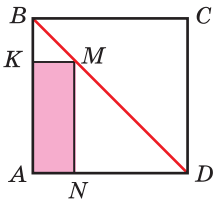
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 76



Рыс. 77



Рыс. 78

84. На рысунку 77 $ABCD$ і $AKMN$ — квадраты, перыметр квадрата $ABCD$ роўны 72 см, $AK = \frac{1}{2}KB$. Знайдзіце перыметр многавугольніка $KBCDNM$.

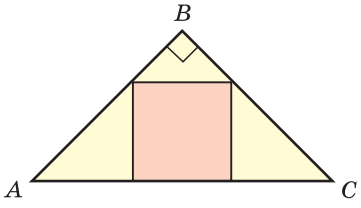
85. На рысунку 78 $ABCD$ — квадрат, яго старана роўна 12 см. Знайдзіце перыметр прамавугольніка $AKMN$.

86. Дакажыце, што калі ў акружнасці правесці два ўзаемна перпендыкулярныя дыяметры, то канцы гэтых дыяметраў будуць вяршынямі квадрата.

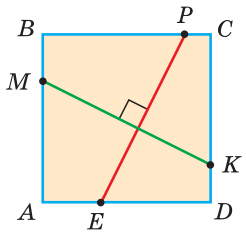
87. Перыметр квадрата роўны 48 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра квадрата да яго старон.

88. Дакажыце, што калі квадрат $ABCD$ з паперы скласці па дыяганалі AC, то вяршыні B і D супадуць.

89. У раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік змешчаны квадрат так, што дзве яго вяршыні знаходзяцца на гіпатэнузе, а дзве іншыя на катэтах (рыс. 79). Знайдзіце гіпатэнузу трохвугольніка, калі перыметр квадрата роўны 112 см.



Рыс. 79



Рыс. 80

90. Два адрэзкі MK і PE з канцамі на процілеглых старанах квадрата $ABCD$ узаемна перпендыкулярныя (рыс. 80). Дакажыце, што $MK = PE$.

91. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка ўсе стораны і ўсе вуглы роўныя, то гэта квадрат.

92*. Знайдзіце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі квадрата па яго дыяганалі d.

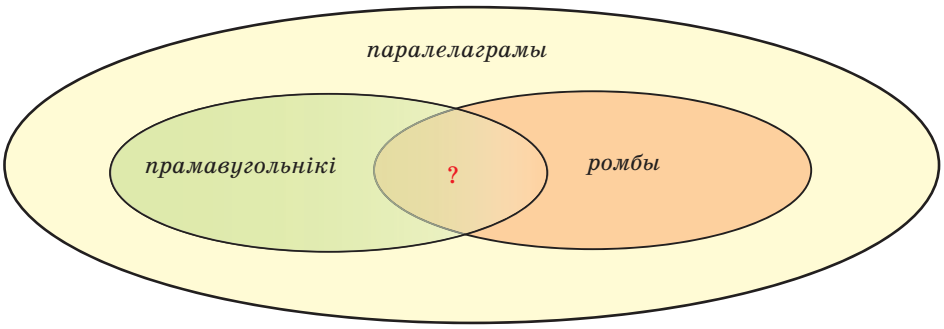
Правообладатель Народная асвета

93*. На старанах паралелаграма пабудаваны квадраты (старана кожнага квадрата роўна адпаведнай старане паралелаграма). Дакажыце, што цэнтры пабудаваных квадратаў з'яўляюцца вяршынямі квадрата.

94*. На старане AD квадрата $ABCD$ адзначаны пункт K, а на старане CD адзначаны пункт M так, што $\angle AKB = \angle DKM = 60°$. Дакажыце, што $\angle MBK = 45°$.

Мадэляванне

Часам мноства якіхсьці элементаў (лікаў, фігур, ...) паказваюць у выглядзе авалаў (кругоў Эйлера). На рысунку 81 паказаны суадносіны паміж мноствамі паралелаграмаў, прамавугольнікаў, ромбаў. Мноства якіх фігур знаходзіцца ў вобласці, абазначанай пытальнікам? Аргументуйце ваш адказ.



Рыс. 81

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне прамавугольніка, ромба, квадрата.
2. Уласцівасць дыяганалей прамавугольніка.
3. Прымету прамавугольніка.
4. Уласцівасць дыяганалей ромба.
5. Прыметы ромба.
6. Уласцівасці квадрата.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб уласцівасці дыяганалей прамавугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці дыяганалей ромба.

Правообладатель Народная асвета

Рэальная геаметрыя

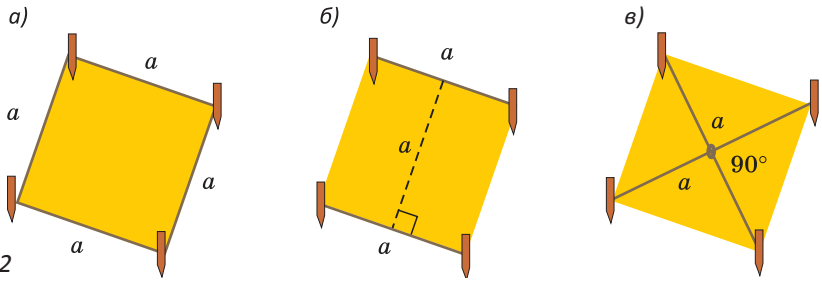
Дзяўчынкі Маша, Лера і Насця хочуць зрабіць квадратную клумбу.

Маша прапануе нацягнуць на чатырох калках па перыметры клумбы чатыры кавалкі вяроўкі аднолькавай даўжыні (рыс. 82, *а*).

Лера прапануе нацягнуць на чатырох калках паралельна два кавалкі вяроўкі аднолькавай даўжыні, адлегласць паміж якімі будзе роўна даўжыні нацягнутых кавалкаў (рыс. 82, *б*).

Насця прапануе ўзяць два кавалкі вяроўкі аднолькавай даўжыні, адзначыць вузельчыкам іх сярэдзіны і нацягнуць вяроўкі так, каб яны перасякаліся ў сярэдзінах і былі перпендыкулярнымі (рыс. 82, *в*).

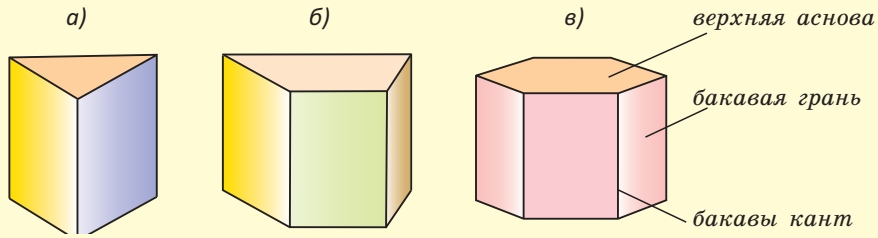
У якой з дзяўчынак абавязкова атрымаецца квадрат з вяршынямі ў месцах размяшчэння калкоў? Растлумачце ваш адказ.



Рыс. 82

Геаметрыя 3D

З паняццем *прызмы* мы пазнаёміліся ў 7-м класе. У прызмы дзве грані (*асновы*) — гэта роўныя многавугольнікі, якія ляжаць у паралельных плоскасцях, а астатнія грані (*бакавыя*) — паралелаграмы. Калі прызма прамая, то бакавыя грані — прамавугольнікі. На рысунках 83, *а*)—*в*) паказаны трохвугольная, чатырохвугольная, шасцівугольная прызмы.



Рыс. 83

Адрэзак, які злучае адпаведныя вяршыні верхняй і ніжняй асноў, называецца *бакавым кантам*. Паколькі бакавыя грані прызмы — паралелаграмы, а ў паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, то ўсе бакавыя канты прызмы роўныя паміж сабой.

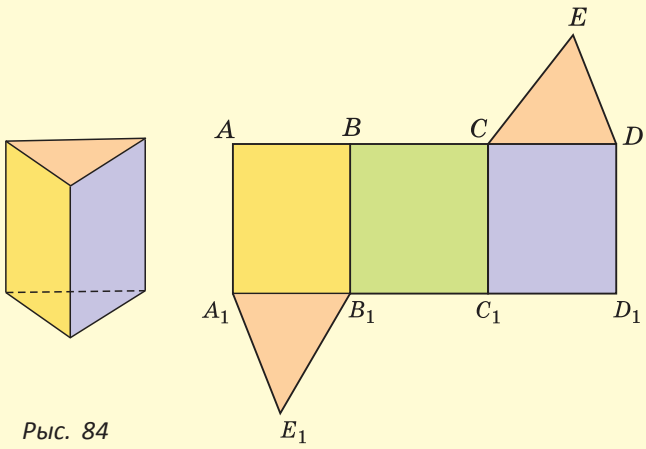
Правообладатель Народная асвета

Заданні

1. *Колькі ў шасцівугольнай прызмы: а) граней; б) кантаў (уключаючы бакавыя канты і стораны асноў)?*

Паверхня любой прызмы складаецца з дзвюх асноў і бакавой паверхні, якая складаецца з бакавых граней. На чарцяжы нябачныя канты паказваюць штрыхавымі лініямі. У трохвугольнай і чатырохвугольнай паказаных на рысунку прызм нябачны адна старана асновы і адна («задняя») грань.

2. *На рысунку 84 паказана прамая трохвугольная прызма і яе разгортка. З якім кантам супадзе кант ED, калі разгортку скласці ў прызму?*



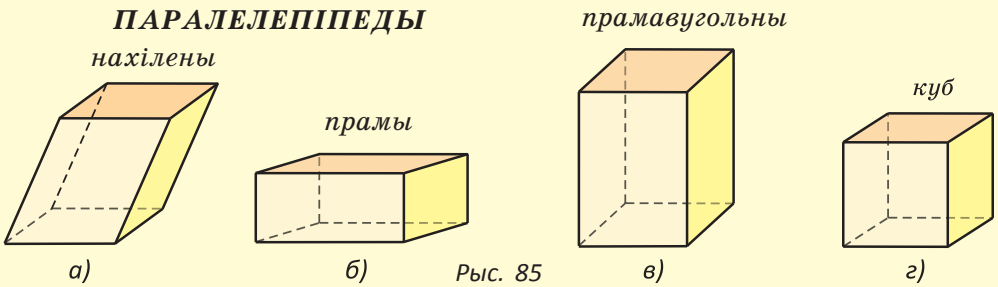
Рыс. 84

Прызма, у якой асновы з'яўляюцца паралелаграмамі, называецца *паралелепіпедам* (рыс. 85, *а*), яго бакавыя грані — паралелаграмы. Процілеглыя грані любога паралелепіпеда роўныя паміж сабой.

Калі бакавыя грані паралелепіпеда — прамавугольнікі, — гэта *прамы паралелепіпед*. Яго бакавыя канты перпендыкулярны да асноў (рыс. 85, *б*).

Калі ў аснове прамога паралелепіпеда ляжыць прамавугольнік, то гэта *прамавугольны паралелепіпед*. Усе яго грані — прамавугольнікі (рыс. 85, *в*).

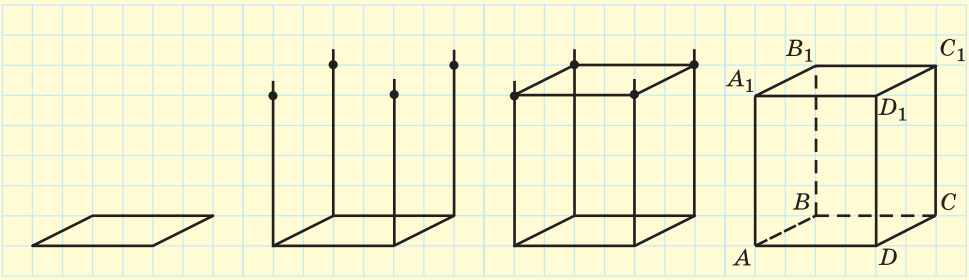
Калі ў прамавугольнага паралелепіпеда ўсе канты роўныя, то гэта *куб*. Усе яго грані — роўныя квадраты (рыс. 85, *г*).



Рыс. 85

Правообладатель Народная асвета

Любы паралелаграм (у тым ліку прамавугольнік і квадрат), размешчаны ў прасторы, на чарцяжы паказваецца паралелаграмам. Пакажыце відарыс прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выкарыстаўшы схему на рысунку 86.

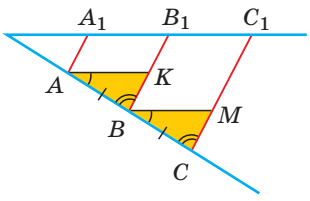


Рыс. 86

3. *Тры якіясьці канты паралелепіпеда роўны 3 см, 5 см, 8 см. Знайдзіце суму даўжынь усіх кантаў дадзенага паралелепіпеда.*

§ 7. Тэарэма Фалеса

Тэарэма (тэарэма Фалеса).
Калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то на другой старане вугла адкладуцца роўныя адрэзкі.



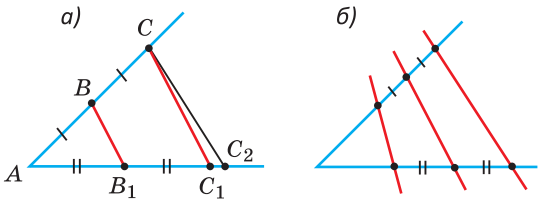
Рыс. 87

Дадзена: $AB = BC$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рыс. 87).
Даказаць: $A_1B_1 = B_1C_1$.
Доказ. Правядзём $AK \parallel A_1C_1$, $BM \parallel A_1C_1$. Паколькі дзве прамыя, паралельныя трэцяй, паралельныя паміж сабой, то $AK \parallel BM$. Трохвугольнікі ABK і BCM роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($AB = BC$ па ўмове, $\angle BAK = \angle CBM$ як адпаведныя вуглы пры паралельных прамых AK і BM і сякучай AC, $\angle ABK = \angle BCM$ як адпаведныя вуглы пры паралельных прамых BB_1 і CC_1 і сякучай AC). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $AK = BM$. Паколькі чатырохвугольнікі AA_1B_1K і BB_1C_1M — паралелаграмы (іх процілеглыя стораны паралельныя), то $A_1B_1 = AK$, $B_1C_1 = BM$ (як процілеглыя стораны паралелаграма). Значыць, $A_1B_1 = B_1C_1$. Тэарэма даказана.

Заўвагі.
1. Адкладзеных роўных адрэзкаў можа быць два, тры і больш.
2. Тэарэма Фалеса справядлівая не толькі для старон вугла, але і для адвольных прамых.

Правообладатель Народная асвета

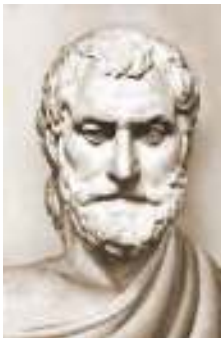
Тэарэма, адваротная тэарэме Фалеса, справядлівая толькі для адрэзкаў, адкладзеных ад вяршыні вугла, і гучыць так: **«Калі на старанах вугла ад яго вяршыні адкласці роўныя адрэзкі ($AB = BC$, $AB_1 = B_1C_1$), то прамыя, што праходзяць праз іх канцы, будуць паралельнымі ($BB_1 \parallel CC_1$)».**



Рыс. 88

Дакажыце гэту тэарэму самастойна, выкарыстаўшы рысунак 88, *а*) і метад ад адваротнага.

Патрабаванне адваротнай тэарэмы Фалеса аб тым, каб роўныя адрэзкі былі адкладзены ад вяршыні вугла, абавязковае. Інакш сцвярджанне аб паралельнасці прамых будзе няправільным (рыс. 88, *б*).



Фалес — філосаф і матэматык, які жыў у Старажытнай Грэцыі ў г. Мілеце. Ён сфармуляваў і даказаў многія з тэарэм, якія ў наш час вывучаюць у школе. Фалес Мілецкі (VI ст. да н. э.) быў першым у спісе сямі мудрацоў таго часу.

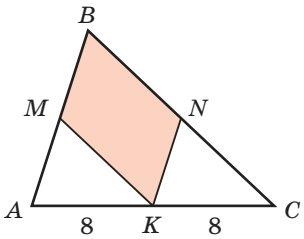
Менавіта Фалес выказаў патрабаванне даказваць тэарэмы.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым яшчэ знакаміты Фалес. Вызначыце пры дапамозе Вікіпедыі, хто быў старэйшы — Эўклід або Фалес.

Заданні да § 7

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Пункт K — сярэдзіна стараны AC трохвугольніка ABC, $MBNK$ — паралелаграм. Знайсці перыметр трохвугольніка ABC, калі перыметр паралелаграма роўны* 34 *см, старана* $AC = 16$ *см* (рыс. 89).



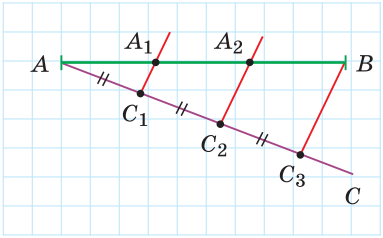
Рыс. 89

Рашэнне. У паралелаграма процілеглыя сторны паралельныя. Таму $KN \parallel AB$ і $KM \parallel BC$. Па тэарэме Фалеса, паколькі $KN \parallel AB$ і $AK = KC$, то $BN = NC$. Адсюль $BC = 2BN$. Аналагічна, паколькі $KM \parallel CB$ і $AK = KC$, то $AM = MB$, $AB = 2MB$. $P_{MBNK} = 2MB + 2BN = 34$ см, адкуль $AB + BC = 34$ см. $P_{ABC} = AB + BC + AC = 34 + 16 = 50$ (см).

Адказ: 50 см.

Правообладатель Народная асвета

Задача 2. *Пры дапамозе цыркуля і лінейкі падзяліць дадзены адрэзак на* 3 *роўныя часткі.*



Рыс. 90

Р а ш э н н е. Няхай дадзены адрэзак AB (рыс. 90). Правядзём адвольны прамень AC і адкладзём на ім тры адвольныя, але роўныя адрэзкі: $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$. Правядзём адрэзак C_3B. Праз пункты C_2 і C_1 правядзём прамыя, паралельныя прамой C_3B (успомніце, як вы гэта рабілі ў 7-м класе). Па тэарэме Фалеса $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$.

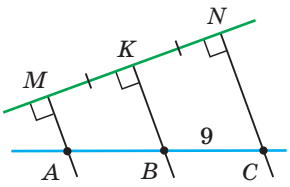
Заўвага. Дадзены спосаб з'яўляецца алгарытмам дзялення адрэзка на n роўных частак.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

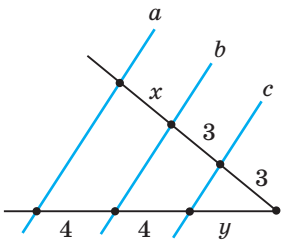
95. На рысунку 91 $BC = 9$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AC.

96. На рысунку 92 $a \parallel b \parallel c$. Па дадзеных даўжынях адрэзкаў знайдзіце велічыню $x + y$.

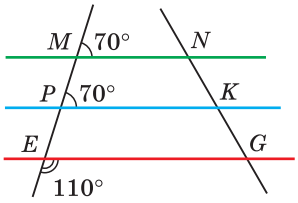
97. На рысунку 93 $ME = 32$ см, $PE = 16$ см, $NK = 19{,}5$ см. Выкарыстаўшы значэнні вуглоў на рысунку, знайдзіце даўжыню адрэзка NG.



Рыс. 91



Рыс. 92



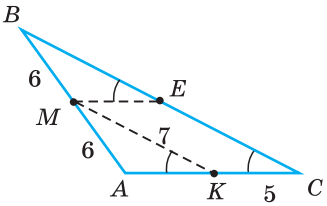
Рыс. 93

98. Дадзены $\triangle ABC$ (рыс. 94), $AM = MB = 6$ см, $\angle MEB = \angle AKM = \angle C$, $MK = 7$ см, $KC = 5$ см. Знайдзіце перыметр $\triangle ABC$.

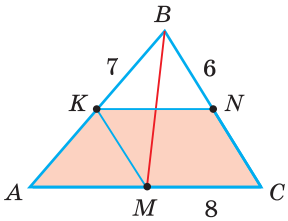
99. У трохвугольніку ABC праведзена медыяна BM, $MK \parallel BC$ і $KN \parallel AC$ (рыс. 95). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $AKNC$, калі $KB = 7$ см, $BN = 6$ см, $MC = 8$ см.

100*. На рысунку 96 пункт K — сярэдзіна адрэзка CD, $AC \parallel KM \parallel DB$, $AO = 21$ см, адрэзак OM у 3 разы меншы за адрэзак MB. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB.

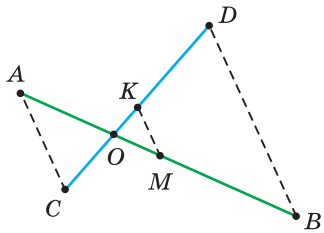
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 94



Рыс. 95



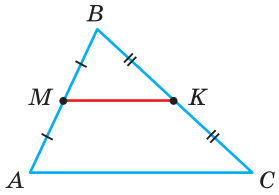
Рыс. 96

101*. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі падзяліце дадзены адрэзак:

а) на 5 роўных частак; б) у адносіне 2 : 1.

§ 8. Сярэдняя лінія трохвугольніка

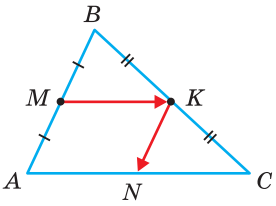
Азначэнне. **Сярэдняй лініяй трохвугольніка** называецца адрэзак, які злучае сярэдзіны дзвюх старон трохвугольніка.



Рыс. 97

На рысунку 97 пункты M і K — сярэдзіны старон AB і BC трохвугольніка ABC. Адрэзак MK — сярэдняя лінія трохвугольніка. Трэцюю старану AC будзем называць асновай адносна сярэдняй лініі MK. Паколькі ў трохвугольніка тры стараны, то ў яго тры сярэднія лініі.

Тэарэма (уласцівасць сярэдняй лініі трохвугольніка). **Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельна аснове і роўна яе палавіне.**



Рыс. 98

Дадзена: $\triangle ABC$, MK — сярэдняя лінія (рыс. 98).

Даказаць: $MK \parallel AC$; $MK = \frac{1}{2}AC$.

Доказ. 1) Правядзём праз пункт M прамую, паралельную AC. Па тэарэме Фалеса яна пройдзе праз сярэдзіну адрэзка BC — пункт K і будзе змяшчаць сярэднюю лінію MK. Тады $MK \parallel AC$.

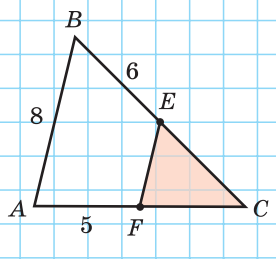
2) Праз пункт K правядзём прамую KN (гл. рыс. 98), паралельную старане AB ($N \in AC$). Па тэарэме Фалеса $AN = NC$. Чатырохвугольнік $AMKN$ — паралелаграм, паколькі ў яго процілеглыя стораны паралельныя. Але ў паралелаграма процілеглыя стораны роўныя. Таму $MK = AN = \frac{1}{2}AC$. Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

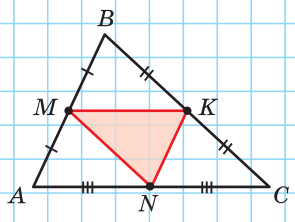
Тэст 1

Калі EF — сярэдняя лінія $\triangle ABC$, то чаму роўны перыметр $\triangle EFC$?



Тэст 2

$AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Знайдзіце P_{MKN}.

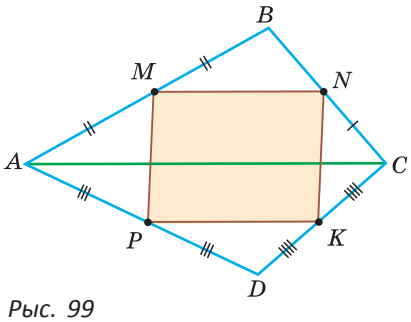


Заданні да § 8

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача. *Даказаць, што сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма.*



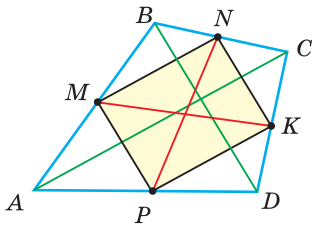
Рыс. 99

Доказ. Няхай пункты M, N, K, P — сярэдзіны старон чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 99). Адрэзак MN — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC. Па ўласцівасці сярэдняй лініі $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$. Адрэзак PK — сярэдняя лінія трохвугольніка ADC. Таму $PK \parallel AC$ і $PK = \frac{1}{2}AC$. Паколькі ў чатырохвугольніка $MNKP$ стораны MN і PK роўныя і паралельныя, то ён паралелаграм (па прымеце паралелаграма). Што і трэба было даказаць.

Дакажыце наступныя вынікі самастойна.

Вынікі

Дыяганалі AC і BD чатырохвугольніка $ABCD$ і адрэзкі MK і PN (яны называюцца сярэднімі лініямі чатырохвугольніка) звязаны пэўнымі суадносінамі. Сфармулюем іх у выглядзе вынікаў з даказанага ў зыходнай задачы сцверджання (рыс. 100).



Рыс. 100

Правообладатель Народная асвета

1. *Калі дыяганалі AC і BD роўныя, то $MNKP$ — ромб і адрэзкі MK і PN узаемна перпендыкулярныя.*

2. *Калі адрэзкі MK і PN узаемна перпендыкулярныя, то $MNKP$ — ромб і дыяганалі AC і BD роўныя.*

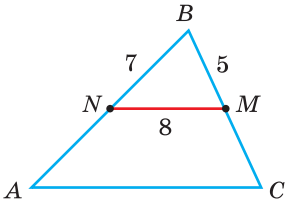
3. *Калі дыяганалі AC і BD узаемна перпендыкулярныя, то $MNKP$ — прамавугольнік, і адрэзкі MK і PN роўныя.*

4. *Калі адрэзкі MK і PN роўныя, то $MNKP$ — прамавугольнік і дыяганалі AC і BD узаемна перпендыкулярныя.*

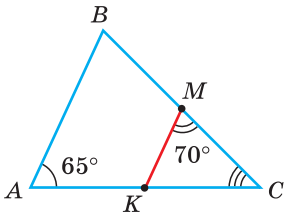
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

102. На рысунку 101 NM — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC. Па памерах, пазначаных на рысунку ў сантыметрах, знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC.

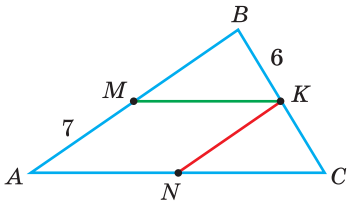
103. Пункты M і K — сярэдзіны старон BC і AC трохвугольніка ABC (рыс. 102). Па даных на рысунку знайдзіце велічыню вугла C.



Рыс. 101



Рыс. 102



Рыс. 103

104. На рысунку 103 пункты M, K, N — сярэдзіны старон $\triangle ABC$. Перыметр $\triangle ABC$ роўны 44 см, $BK = 6$ см, $AM = 7$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка MK і перыметр чатырохвугольніка $AMKN$.

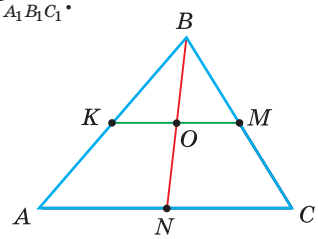
105. а) Сярэднія лініі трохвугольніка роўны 3 м, 4 м і 5 м. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

б) Перыметр трохвугольніка роўны 210 м, яго сярэднія лініі адносяцца як $3 : 5 : 7$. Знайдзіце найбольшую старану дадзенага трохвугольніка.

106. Вяршыні трохвугольніка $A_1B_1C_1$ з'яўляюцца сярэдзінамі старон трохвугольніка ABC. Дакажыце, што $P_{ABC} = 2P_{A_1B_1C_1}$.

107. Дакажыце, што тры сярэднія лініі трохвугольніка разбіваюць яго на чатыры роўныя трохвугольнікі.

108. а) Дакажыце, што ў трохвугольніку ABC сярэдняя лінія KM і медыяна BN пунктам перасячэння O дзеляцца папалам (рыс. 104).



Рыс. 104

Правообладатель Народная асвета

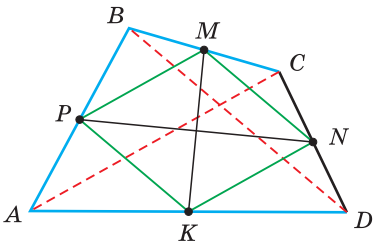
б) Дакажыце, што сярэдняя лінія KM ($K \in AB$, $M \in BC$) трохвугольніка ABC дзеліць папалам любы адрэзак BF, дзе пункт $F \in AC$.

109. У $\triangle ABC$ сярэдняя лінія KM ($K \in AB$, $M \in BC$) і медыяна BN перасякаюцца ў пункце O, $P_{AKON} = 80$ см, $P_{KBO} = 48$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AC.

110. На рысунку 105 пункты P, M, N і K — сярэдзіны старон чатырохвугольніка $ABCD$. Знайдзіце:

а) перыметр чатырохвугольніка $PMNK$, калі $AC = 12$ см, $BD = 10$ см;

б) вугал паміж прамымі AC і BD, калі $AC = BD$ і $\angle KPN = 32°$.



Рыс. 105

111. Дакажыце, што сярэдзіны старон ромба з'яўляюцца вяршынямі прамавугольніка.

112*. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ пункты M, N, K і P — сярэдзіны старон AB, BC, CD, AD адпаведна. Перыметр трохвугольніка MNP роўны перыметру трохвугольніка MKP. Дакажыце, што $AC \perp BD$.

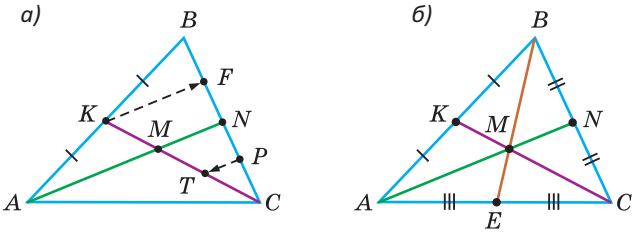
113*. Старана AC трохвугольніка ABC роўна 24 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны медыян AK і CM.

114*. У трохвугольніку ABC праведзены адрэзак BD так, што пункт D ляжыць на старане AC і $CD = AB$. Пункт M — сярэдзіна адрэзка AD, пункт N — сярэдзіна адрэзка BC. Знайдзіце велічыню вугла NMC, калі $\angle BAC = 72°$.

§ 9. Уласцівасць медыян трохвугольніка

Вы ўжо ведаеце, што тры медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце. Гэты пункт з'яўляецца адным з адметных пунктаў трохвугольніка.

Тэарэма (уласцівасць медыян трохвугольніка).
Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца гэтым пунктам у адносіне 2 : 1, лічачы ад вяршыні.



Рыс. 106

Правообладатель Народная асвета

Доказ. 1) Спачатку дакажам, што любая медыяна трохвугольніка дзеліцца другой медыянай у адносіне 2 : 1. Няхай AN і CK — медыяны $\triangle ABC$, якія перасякаюцца ў пункце M (рыс. 106, *а*). Правядзём $KF \parallel AN$. Паколькі $AK = KB$, то па тэарэме Фалеса $BF = FN$. З сярэдзіны P адрэзка NC правядзём $PT \parallel AN$. Паколькі $CP = PN = NF$, то па тэарэме Фалеса $CT = TM = MK$. Адсюль $CM : MK = 2 : 1$. Аналагічна, $AM : MN = 2 : 1$.

2) Зараз дакажам, што ўсе тры медыяны перасякаюцца ў адным пункце. З п. 1 вынікае, што любая медыяна дзеліць другую медыяну ў адносіне 2 : 1. Тады трэцяя медыяна BE (рыс. 106, *б*) павінна падзяліць медыяну CK у адносіне 2 : 1, г. зн. прайсці праз пункт M. Такім чынам, усе тры медыяны перасякаюцца ў адным пункце. Тэарэма даказана.

У 7-м класе даказана, што пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце і што бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце. У § 3 дадзенай главы (ключавая задача **3**) даказана, што вышыні трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце. У дадзеным параграфе мы даказалі, што медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце. Такім чынам, намі даказаны ўсе сцверджанні аб *чатырох адметных пунктах трохвугольніка*.

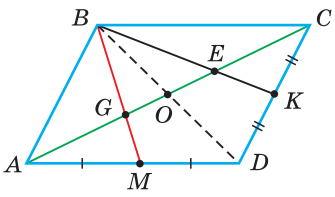
Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чаму пункт перасячэння медыян трохвугольніка называюць яго *цэнтрам цяжару*.

Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача. *Пункты M і K — сярэдзіны старон AD і CD паралелаграма $ABCD$. Даказаць, што адрэзкі BM і BK дзеляць дыяганаль AC на тры роўныя часткі.*



Рыс. 107

Рашэнне. Правядзём у паралелаграме $ABCD$ дыяганаль BD (рыс. 107). Паколькі дыяганалі паралелаграма дзеляцца пунктам перасячэння папалам, то $BO = OD$ і тады AO і BM — медыяны трохвугольніка ABD. Паколькі медыяны трохвугольніка пунктам перасячэння дзеляцца ў адносіне 2 : 1, то $AG : GO = 2 : 1$. Аналагічна ў трохвугольніку BCD CO і BK — медыяны, адкуль $CE : EO = 2 : 1$. Паколькі $AO = OC$, то $AG = GE = EC$. Што і трэба было даказаць.

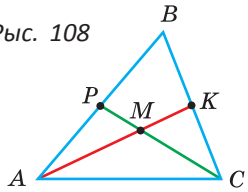
Правообладатель Народная асвета

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

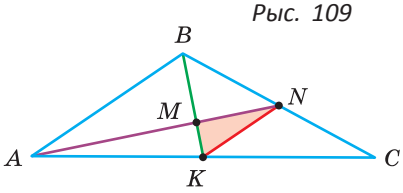
115. На рысунку 108 AK і CP — медыяны трохвугольніка ABC, AK = = 12 см, PM = 3,5 см. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў MK, AM, CM і CP.

116. На рысунку 109 BK і AN — медыяны трохвугольніка ABC, AB = 30 см, BK = 15 см, AN = 36 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка KMN.

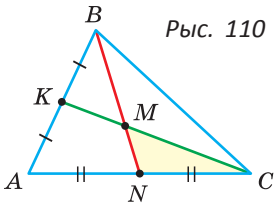
Рыс. 108



Рыс. 109



Рыс. 110

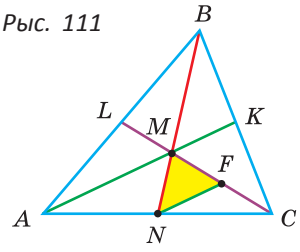


117. На рысунку 110 пункты N і K — сярэдзіны адрэзкаў AC і AB, BN = = 18 см, CK = 21 см, AC = 24 см. Знайдзіце перыметр $\triangle NMC$.

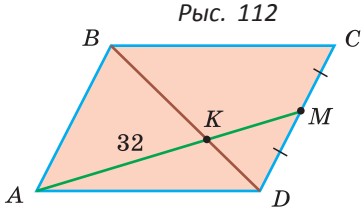
118. Медыяны AK і CL $\triangle ABC$ перасякаюцца ў пункце M. Дакажыце, што перыметры $\triangle KML$ і $\triangle AMC$ адносяцца як 1 : 2.

119. У трохвугольніку ABC (рыс. 111) праведзены медыяны AK, BN і CL, M — пункт іх перасячэння і $NF \parallel AK$. Знайдзіце перыметр $\triangle NMF$, калі AK = 102 см, CL = 81 см, BN = 96 см.

Рыс. 111



Рыс. 112



120. Дакажыце, што калі ў трохвугольніка дзве медыяны роўныя, то ён раўнабедраны.

121*. У паралелаграме $ABCD$ (рыс. 112) пункт M — сярэдзіна стараны CD. Адрэзак AM перасякае дыяганаль BD у пункце K, AK = 32 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка KM.

122*. Медыяны трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пункце M. Медыяну BN прадоўжылі за пункт N на трэць яе даўжыні. Атрымалі адрэзак ND, дзе $ND = \frac{1}{3}BN$. Перыметр трохвугольніка DMC роўны 42 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, складзенага з медыян трохвугольніка ABC.

123*. Медыяны AK і CM трохвугольніка ABC узаемна перпендыкулярныя, AC = 10 см. Знайдзіце даўжыню трэцяй медыяны BN.

Правообладатель Народная асвета

Мадэляванне

Вазьміце трохвугольнік, зроблены з фанеры або тоўстага кардону. Няхай дзяўчынкі, выкарыстаўшы метровую лінейку, правядуць у трохвугольніку дзве медыяны. Затым няхай хлопчыкі замацуюць вяроўку ў пункце перасячэння медыян (для кардону можна выкарыстоўваць скотч).

Падніміце трохвугольнік, які ляжыць на стале, за вяроўку. Калі ўсё зроблена правільна, то трохвугольнік застанецца ў раўнавазе і яго плоскасць будзе паралельна плоскасці стала. Растлумачце пры дапамозе ведаў з курса фізікі дадзены эфект*.

*Цэнтр цяжару цела — гэта пункт прыкладання сілы цяжару цела. Напрыклад, цэнтр цяжару тонкага аднароднага стрыжня знаходзіцца ў яго сярэдзіне, цэнтр цяжару тонкага аднароднага квадратнага ліста — у пункце перасячэння яго дыяганалей, цэнтр цяжару тонкай аднароднай трохвугольнай пласціны — у пункце перасячэння медыян трохвугольніка. Пры разліках трохвугольнік можна замяніць грузам, які знаходзіцца ў пункце перасячэння медыян, маса якога роўна масе трохвугольніка. Таму пункт перасячэння медыян называецца «цэнтрам цяжару трохвугольніка».

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму Фалеса.
2. Азначэнне сярэдняй лініі трохвугольніка.
3. Уласцівасць сярэдняй лініі трохвугольніка.
4. Уласцівасць медыян трохвугольніка.

Умеем

1. Даказваць тэарэму Фалеса.
2. Дзяліць адрэзак на n роўных частак пры дапамозе цыркуля і лінейкі.
3. Даказваць тэарэму аб уласцівасці сярэдняй лініі трохвугольніка.
4. Даказваць тэарэму аб уласцівасці медыян трохвугольніка.

§ 10. Трапецыя. Сярэдняя лінія трапецыі

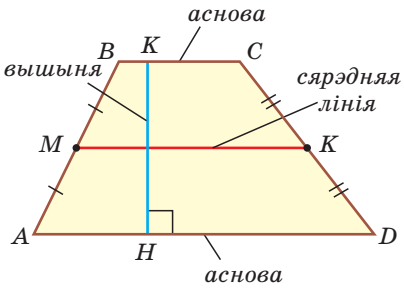
Азначэнне. **Трапецыяй** называецца чатырохвугольнік, у якога дзве стараны паралельныя (*асновы трапецыі*), а дзве іншыя — не паралельныя (*бакавыя стораны трапецыі*).

Азначэнне. **Вышынёй трапецыі** называецца перпендыкуляр, праведзены з пункта, адзначанага на прамой, якая змяшчае адну аснову трапецыі, да прамой, якая змяшчае іншую аснову.

Правообладатель Народная асвета

Азначэнне. **Сярэдняй лініяй трапецыі** называецца адрэзак, які злучае сярэдзіны бакавых старон трапецыі.

На рысунку 113 паказана трапецыя $ABCD$, дзе AD і BC — асновы трапецыі, AB і CD — яе бакавыя стораны, $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$.



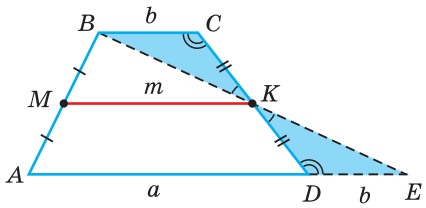
Рыс. 113

Перпендыкуляр KH (або яго даўжыня) — гэта вышыня трапецыі. Усе вышыні трапецыі роўныя, як адлегласці паміж паралельнымі прамымі.

Вуглы трапецыі, прылеглыя да бакавой стараны, у суме роўны 180°, як унутраныя аднастароннія вуглы пры паралельных прамых: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$.

Пункты M і K — сярэдзіны бакавых старон AB і CD, адрэзак MK — сярэдняя лінія трапецыі. Звычайна асновы трапецыі абазначаюць літарамі a і b, бакавыя стораны — c і d, сярэднюю лінію — літарай m.

Тэарэма (аб сярэдняй лініі трапецыі).
Сярэдняя лінія трапецыі паралельна асновам і роўна іх паўсуме, т. зн. $m = \frac{a+b}{2}$.



Рыс. 114

Дадзена: $ABCD$ — трапецыя, $AD = a$, $BC = b$ — яе асновы, $MK = m$ — сярэдняя лінія (рыс. 114).
Даказаць: $m \parallel a$, $m \parallel b$, $m = \frac{a+b}{2}$.

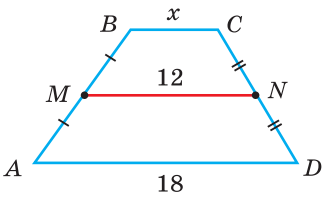
Доказ. Правядзём прамую BK да перасячэння з прамой AD у пункце E. Трохвугольнікі BKC і EKD роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($CK = KD$ па азначэнні сярэдняй лініі трапецыі, $\angle C = \angle D$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых BC і AD і сякучай CD, $\angle BKC = \angle EKD$ як вертыкальныя). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $BK = KE$, $DE = BC = b$. Значыць, сярэдняя лінія MK трапецыі $ABCD$ з'яўляецца сярэдняй лініяй трохвугольніка ABE. Па ўласцівасці сярэдняй лініі трохвугольніка $MK = \frac{1}{2}AE$ і $MK \parallel AE$. Паколькі $AE = a + b$, то $m = \frac{a+b}{2}$ і $m \parallel a$. Паколькі $a \parallel b$ і $a \parallel m$, то $m \parallel b$ (дзве прамыя, паралельныя трэцяй, паралельныя паміж сабой). Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

Заданні да § 10

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Большая аснова AD трапецыі $ABCD$ роўна 18 см, сярэдняя лінія MN — 12 см. Знайсці меншую аснову BC трапецыі.*



Рыс. 115

Рашэнне. Калі MN — сярэдняя лінія трапецыі, то $MN = \frac{AD + BC}{2}$ (рыс. 115). Тады $2MN = AD + BC$, $BC = 2MN - AD = 2 \cdot 12 - 18 = 6$ (см).

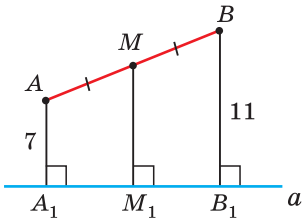
Адказ: 6 см.

Заўвага. Магчымы і іншыя спосабы афармлення рашэння задачы.

Напрыклад:

Няхай $AD = 18$ см, $MN = 12$ см, $BC = x$ см. Тады $MN = \frac{AD + BC}{2}$, $12 = \frac{18 + x}{2}$, $x + 18 = 24$, $x = 6$, $BC = 6$ см.

Задача 2. *Пункты A і B знаходзяцца з аднаго боку ад прамой a. Адлегласць ад пункта A да прамой a роўна 7 см, а ад пункта B — 11 см. Знайсці адлегласць ад сярэдзіны адрэзка AB да прамой a.*

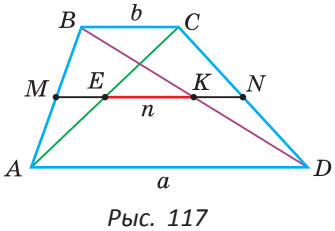


Рыс. 116

Рашэнне. Няхай M — сярэдзіна адрэзка AB (рыс. 116). Паколькі адлегласць ад пункта да прамой вымяраецца даўжынёй перпендыкуляра, апушчанага з пункта на прамую, то перпендыкуляры AA_1 і BB_1 роўны адпаведна 7 см і 11 см. Трэба знайсці даўжыню перпендыкуляра MM_1 да прамой a. Паколькі два перпендыкуляры да адной прамой паралельныя, то $AA_1 \parallel BB_1$, $MM_1 \parallel AA_1$. Па тэарэме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$. Тады A_1ABB_1 — трапецыя, MM_1 — яе сярэдняя лінія. Па тэарэме аб сярэдняй лініі трапецыі $MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9$ (см).

Адказ: 9 см.

Задача 3. *Даказаць, што адрэзак, які злучае сярэдзіны дыяганалей трапецыі, паралельны асновам і роўны паўрознасці асноў.*



Рыс. 117

Рашэнне. Няхай $AD = a$, $BC = b$ — асновы трапецыі $ABCD$, пункты E і K — сярэдзіны дыяганалей AC і BD (рыс. 117). Абазначым $EK = n$. Трэба даказаць, што $n \parallel a$, $n \parallel b$ і $n = \frac{a - b}{2}$.

Паколькі сярэдняя лінія MN трапецыі паралельна асновам a і b, $AM = MB$, то па тэарэме Фалеса

Правообладатель Народная асвета

MN пройдзе праз сярэдзіны дыяганалей AC і BD, г. зн. праз пункты E і K. Таму адрэзак EK належыць сярэдняй лініі MN. Значыць, $n \parallel a$ і $n \parallel b$. Паколькі EN — сярэдняя лінія $\triangle ACD$, а KN — сярэдняя лінія $\triangle BDC$, то па ўласцівасці сярэдняй лініі трохвугольніка $EN = \frac{1}{2}AD$, $KN = \frac{1}{2}BC$. Тады $EK = EN - KN = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Карысна запомніць: «*Сярэдняя лінія трапецыі з асновамі a і b ($b < a$) праходзіць праз сярэдзіны дыяганалей і дзеліцца імі на адрэзкі*: $ME = KN = \frac{b}{2}$, $EN = MK = \frac{a}{2}$, $EK = \frac{a-b}{2}$» (гл. рыс. 117).

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

124. Пабудуйце трапецыю $ABCD$ з асновамі $AD = 9$ см і $BC = 3$ см, у якой $\angle A = 45°$, вышыня роўна 4 см. Знайдзіце велічыню вугла B трапецыі. Правядзіце сярэднюю лінію трапецыі і вымерайце яе даўжыню. Знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі па формуле $m = \frac{a+b}{2}$. Параўнайце вынікі.

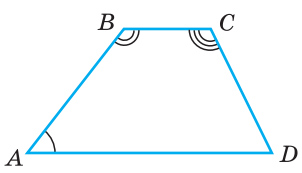
125. У трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 24$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 70°$, $\angle C = 130°$. Знайдзіце $\angle B$, $\angle D$ і сярэднюю лінію MN трапецыі.

126. На рысунку 118 $ABCD$ — трапецыя, $\angle A + \angle B + \angle C = 300°$. Знайдзіце $\angle C$.

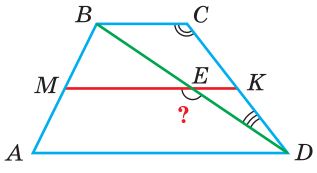
127. На рысунку 119 $AD \parallel BC$, M і K — сярэдзіны адрэзкаў AB і CD. Знайдзіце:

а) $\angle MED$, калі $\angle C = 125°$, $\angle BDC = 15°$;

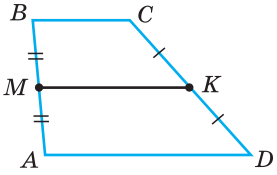
б) $ME : EK$, калі $AD = 24$ см, $BC = 18$ см.



Рыс. 118



Рыс. 119



Рыс. 120

128. На рысунку 120 адрэзак MK — сярэдняя лінія трапецыі $ABCD$. Знайдзіце:

а) аснову AD, калі $BC = 24$ см, $MK = 30$ см;

б) суму перыметраў чатырохвугольнікаў $MBCK$ і $AMKD$, калі $AD = 20$ см, $AB = 16$ см, $BC = 14$ см, $CD = 18$ см.

Правообладатель Народная асвета

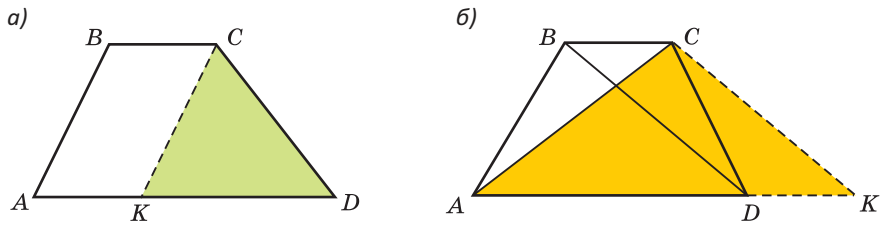
129. а) Асновы трапецыі адносяцца як 3 : 2, сярэдняя лінія трапецыі роўна 10 см. Знайдзіце асновы трапецыі.
б) Адна з асноў трапецыі на 4 см большая за другую, сярэдняя лінія трапецыі роўна 5 см. Знайдзіце асновы трапецыі.

130. MN — сярэдняя лінія трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC ($M \in AB$), $MB = 9$ см, $ND = 8$ см, $MN = 20$ см. Знайдзіце перыметр трапецыі $ABCD$.

131. У трапецыі $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дыяганаль AC перасякае сярэднюю лінію MN у пункце K ($M \in AB$), а дыяганаль BD — у пункце E, $AD = 38$ см, $BC = 30$ см. Знайдзіце:

а) ME; б) MK; в) KE.

132. а) $ABCD$ — трапецыя (рыс. 121, *а*), $CK \parallel AB$, $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см, $AD = 20$ см. Знайдзіце P_{KCD};
б) $ABCD$ — трапецыя (рыс. 121, *б*), $CK \parallel BD$, $AD = 17$ см, $BC = 7$ см, $AC = 16$ см, $BD = 12$ см. Знайдзіце P_{ACK}.



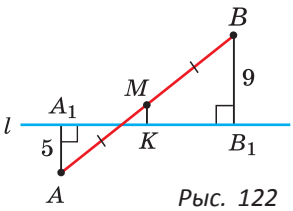
Рыс. 121

133. MN — сярэдняя лінія трапецыі $ABCD$ ($M \in AB$), перыметр чатырохвугольніка $MBCN$ роўны 30 см, перыметр чатырохвугольніка $AMND$ роўны 40 см, перыметр трапецыі $ABCD$ роўны 50 см. Знайдзіце MN.

134. Дыяганаль BD трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC, дзе $BC < AD$, перасякае яе сярэднюю лінію MK у пункце N, $MN : NK = 3 : 1$, $AD = 24$ см. Знайдзіце BC.

135. Дакажыце, што бісектрысы вуглоў трапецыі, прылеглых да бакавой стараны, узаемна перпендыкулярныя.

136. Пункты A і B ляжаць з розных бакоў ад прамой l і аддалены ад яе на адлегласці 5 см і 9 см адпаведна (рыс. 122). Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны M адрэзка AB да прамой l.



Рыс. 122

137. $ABCD$ — трапецыя, $BC \parallel AD$, CK і DK — бісектрысы яе вуглоў C і D. Адлегласць ад пункта K да прамой CD роўна 4 см. Знайдзіце вышыню трапецыі.

Правообладатель Народная асвета

138*. Асновы трапецыі роўны 16 см і 10 см. Вуглы пры большай аснове роўны 40° і 50°. Знайдзіце даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны асноў.

139*. Дадзена трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC, $AB = BC = CD$, $\angle ACD = 90°$. Знайдзіце вуглы трапецыі.

140*. Дакажыце, што:

а) рознасць асноў трапецыі меншая за суму яе бакавых старон;
б) сума асноў трапецыі меншая за суму яе дыяганалей.

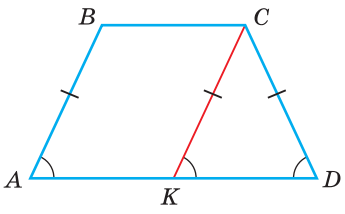
141*. У трапецыі $ABCD$ аснова BC роўна бакавой старане AB і ў 2 разы меншая за аснову AD. Знайдзіце градусную меру вугла ACD.

142*. Складзіце алгарытм пабудовы трапецыі пры дапамозе цыркуля і лінейкі: а) па асновах і бакавых старанах; б) па асновах і дыяганалях. Вызначыце, пры якіх суадносінах дадзеных элементаў рашэнне існуе.

§ 11. Раўнабедраная і прамавугольная трапецыі

Азначэнне. Трапецыя, у якой бакавыя сторны роўныя, называецца **раўнабедранай.**

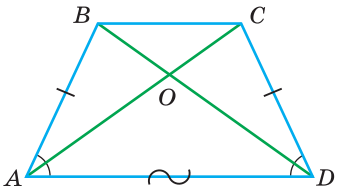
Тэарэма (уласцівасць раўнабедранай трапецыі).
1) У раўнабедранай трапецыі вуглы пры аснове роўныя.
2) У раўнабедранай трапецыі дыяганалі роўныя.



Рыс. 123

Дадзена: $ABCD$ — трапецыя, $AB = CD$.
Даказаць: 1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; 2) $AC = BD$.
Доказ.
1) Правядзём $CK \parallel AB$, $K \in AD$ (рыс. 123). Чатырохвугольнік $ABCK$ — паралелаграм (у яго процілеглыя сторны паралельныя). Паколькі ў паралелаграма процілеглыя сторны роўныя, то $CK = AB$. Адсюль вынікае, што $\triangle KCD$ — раўнабедраны. Тады $\angle K = \angle D$ як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Але $\angle A = \angle K$ як адпаведныя вуглы пры паралельных прамых AB і CK і сякучай AD. Таму $\angle A = \angle D$. Паколькі сума вуглоў трапецыі, прылеглых да бакавой стараны, роўна 180°, то і $\angle B = \angle C$.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 124

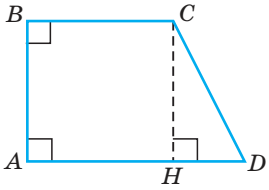
2) Разгледзім $\triangle ACD$ і $\triangle DBA$ (рыс. 124). У іх старана AD — агульная, $AB = CD$ па ўмове, $\angle CDA = \angle BAD$ як вуглы пры аснове раўнабедранай трапецыі. $\triangle ACD = \triangle DBA$ па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Адсюль $AC = BD$, г. зн. дыяганалі раўнабедранай трапецыі роўныя.
Тэарэма даказана.

Вынік.

У раўнабедранай трапецыі $\angle ADB = \angle DAC$, $AO = DO$ *і* $BO = CO$ (гл. рыс. 124).

Выкарыстаўшы рысунак 123, дакажыце прымету раўнабедранай трапецыі: **«Калі вуглы пры аснове трапецыі роўныя, то яна — раўнабедраная».**

Азначэнне. Трапецыя, у якой ёсць прамы вугал, называецца **прамавугольнай трапецыяй.**



Рыс. 125

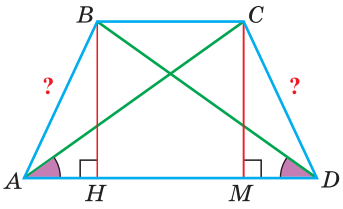
На рысунку 125 паказана прамавугольная трапецыя $ABCD$, у якой $\angle A = 90°$. Паколькі $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle B = 90°$. Вышыня CH трапецыі роўна меншай бакавой старане AB. У прамавугольным трохвугольніку CHD катэт CH меншы за гіпатэнузу CD. Таму бакавая старана AB — меншая, а CD — большая. Такім чынам, вышыня прамавугольнай трапецыі роўна яе меншай бакавой старане.

Заданні да § 11

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць прымету раўнабедранай трапецыі:* ***«Калі ў трапецыі дыяганалі роўныя, то яна — раўнабедраная».***



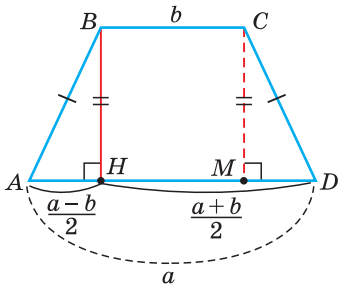
Рыс. 126

Доказ. Разгледзім трапецыю $ABCD$ з асновамі AD і BC (рыс. 126). Няхай у яе $AC = BD$. Апусцім у трапецыі вышыні BH і CM. $BH = CM$ як адлегласць паміж паралельнымі прамымі. Прамавугольныя трохвугольнікі AMC і DHB роўныя па катэце і гіпатэнузе. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць вуглоў CAD і BDA. Тады трохвугольнікі ACD і DBA роўныя па дзвюх старанах ($AC = DB$,

Правообладатель Народная асвета

старана AD — агульная) і вугле паміж імі, $AB = DC$ як адпаведныя сторапы ў роўных трохвугольніках. Трапецыя $ABCD$ раўнабедраная. Тэарэма даказана.

Задача 2. *Даказаць, што вышыня раўнабедранай трапецыі, праведзеная з вяршыні, якая належыць меншай аснове, дзеліць большую аснову на адрэзкі, роўныя паўсуме і паўрознасці асноў.*

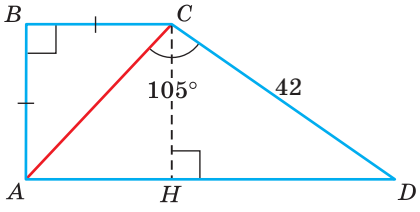


Рыс. 127

Доказ. Разгледзім раўнабедраную трапецыю $ABCD$, у якой $AD = a$, $BC = b$ — асновы, BH — вышыня (рыс. 127). Дакажам, што $HD = \frac{a+b}{2}$, $AH = \frac{a-b}{2}$. Правядзём другую вышыню CM трапецыі. Прамавугольныя трохвугольнікі AHB і DMC роўныя па катэце і гіпатэнузе. Таму $AH = MD$.

Чатырохвугольнік $HBCM$ — прамавугольнік, паколькі ў яго ўсе вуглы прамыя. Тады $HM = BC = b$. Адсюль $AH = MD = \frac{AD - HM}{2} = \frac{a-b}{2}$, $HD = AD - AH = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Што і трэба было даказаць.

Задача 3. *$ABCD$ — прамавугольная трапецыя з асновамі BC і AD. Меншая бакавая старана трапецыі роўна яе меншай аснове, большая бакавая старана роўна 42 см і ўтварае з адной з дыяганалей вугал, роўны $105°$. Знайсці вышыню трапецыі.*



Рыс. 128

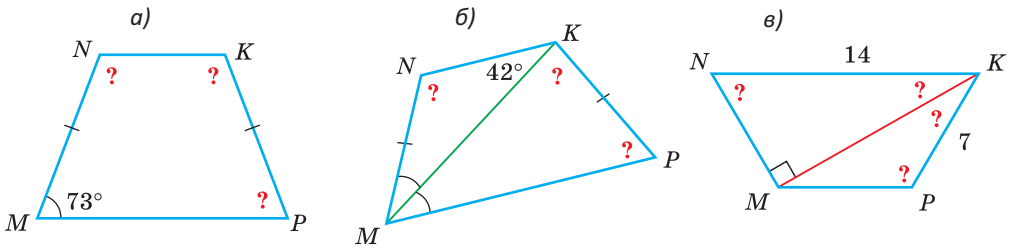
Рашэнне. Няхай AB — меншая бакавая старана. Тады $\angle B = 90°$, $AB = BC$, $CD = 42$ см, $\angle ACD = 105°$ (рыс. 128). Трохвугольнік ABC — прамавугольны раўнабедраны. Таму $\angle ACB = 45°$. Тады $\angle BCD = 45° + 105° = 150°$, $\angle D = 180° - 150° = 30°$. Правядзём вышыню CH трапецыі. У прамавугольным трохвугольніку CHD катэт CH, што ляжыць насупраць вугла ў $30°$, роўны палавіне гіпатэнузы CD, г. зн. $CH = 21$ см.

Адказ: 21 см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

143. На рысунках 129, *а*)—*в*) паказана раўнабедраная трапецыя $MNKP$. Па даных рысунках знайдзіце вуглы, абазначаныя пытальнікам.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 129

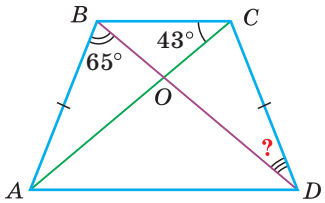
144. а) BH і CM — вышыні раўнабедранай трапецыі $ABCD$, меншая аснова BC роўна 13 м, $MD = 5$ м. Знайдзіце даўжыню сярэдняй лініі трапецыі.

б) BH — вышыня раўнабедранай трапецыі $ABCD$, меншая аснова BC роўна 8 см, $HD = 12$ см. Знайдзіце большую аснову трапецыі.

145. У трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC вуглы A і D роўныя, $AB = 12{,}4$ см, сярэдняя лінія роўна 15 см. Знайдзіце перыметр трапецыі.

146. Дакажыце, што сума процілеглых вуглоў раўнабедранай трапецыі роўна 180°.

147. Дыяганалі трапецыі $ABCD$ (AD і BC — асновы трапецыі) перасякаюцца ў пункце O, $AO = DO$. Дакажыце, што трапецыя раўнабедраная.



Рыс. 130

148. $ABCD$ — раўнабедраная трапецыя (рыс. 130). Па даных на рысунку знайдзіце $\angle CDB$.

149. Адрэзак BH — вышыня раўнабедранай трапецыі $ABCD$ ($BC \parallel AD$), DB — бісектрыса яе вугла D, $AD + BC = 48$, $AH = 8$. Знайдзіце CD.

150. $ABCD$ — прамавугольная трапецыя з асновамі AD і BC. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі, калі:

а) $\angle A = 90°$, $BC = 7$ см, $CD = 8$ см, $\angle C = 120°$;

б) $\angle D = 90°$, $\angle BAD = 45°$, $AD = 12$ см, $CD = 5$ см;

в) $AB = 6$ см — меншая бакавая старана, $BC : AD = 2 : 3$, $\angle BCD = 135°$.

151*. Дыяганаль раўнабедранай трапецыі роўна 6 см і ўтварае з асновай вугал 60°. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

152*. У трапецыі $ABCD$ $\angle ADB = \angle DAC$, $AC \perp BD$, $AD + BC = 16$ см. Знайдзіце вышыню BH.

153*. Пабудуйце раўнабедраную трапецыю:

а) па дзвюх асновах і бакавой старане;

б) па дыяганалі і дзвюх асновах.

Правообладатель Народная асвета

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні: трапецыі, вышыні трапецыі, сярэдняй лініі трапецыі.
2. Уласцівасць сярэдняй лініі трапецыі.
3. Азначэнне прамавугольнай і раўнабедранай трапецый.
4. Уласцівасці раўнабедранай трапецыі.
5. Прыметы раўнабедранай трапецыі.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб сярэдняй лініі трапецыі.
2. Даказваць уласцівасці раўнабедранай трапецыі.
3. Даказваць прыметы раўнабедранай трапецыі.

§ 12*. Цэнтральная і восевая сіметрыя

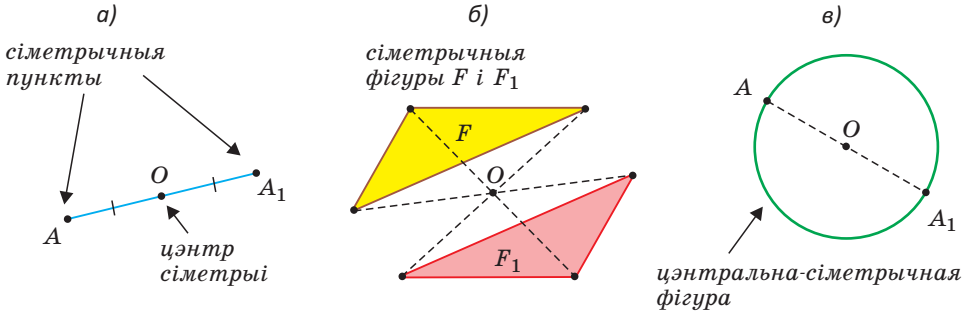
1. Цэнтральная сіметрыя (сіметрыя адносна пункта)

Пункты A і A_1 называюцца *сіметрычнымі* адносна пункта O (*цэнтра сіметрыі*), калі пункт O з'яўляецца сярэдзінай адрэзка AA_1 (рыс. 131, *а*).

Цэнтр сіметрыі лічыцца сіметрычным сам сабе.

Дзве фігуры F і F_1 называюцца сіметрычнымі адносна некаторага пункта O, калі кожнаму пункту адной фігуры адпавядае сіметрычны яму пункт другой фігуры адносна пункта O (рыс. 131, *б*).

Фігура мае цэнтр сіметрыі (з'яўляецца цэнтральна-сіметрычнай фігурай), калі кожнаму пункту дадзенай фігуры адпавядае сіметрычны яму пункт гэтай жа фігуры адносна некаторага пункта — цэнтра сіметрыі (рыс. 131, *в*).



Рыс. 131

Правообладатель Народная асвета

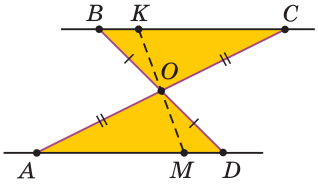
Прыкладам цэнтральна-сіметрычных фігур з'яўляюцца: *адрэзак* (цэнтр сіметрыі ў сярэдзіне адрэзка); *акружнасць* (цэнтр сіметрыі ў цэнтры акружнасці: канцы любога дыяметра сіметрычныя адносна цэнтра акружнасці).

Усякую фігуру F можна сумясціць з сіметрычнай ёй адносна некаторага цэнтра O фігурай F_1 шляхам павароту яе на 180° вакол пункта O. І наадварот, калі фігуру F можна сумясціць з другой фігурай F_1 шляхам павароту на 180° вакол некаторага цэнтра O, то гэтыя фігуры або часткі адной фігуры сіметрычныя адносна цэнтра. Фігуры, сіметрычныя адносна пункта, роўныя паміж сабой.

Відарысы на рысунку 132 маюць цэнтр сіметрыі.

Рыс. 132

Задача 1. *Пабудаваць фігуру, сіметрычную прамой BC адносна пункта O.*



Рыс. 133

Р а ш э н н е. Пабудаваўшы пункты D і A, сіметрычныя пунктам B і C адносна некаторага пункта O, атрымаем прамую AD (рыс. 133). З роўнасці трохвугольнікаў BOC і DOA вынікае, што $\angle OCB = \angle OAD$, адкуль $BC \parallel AD$. Любы пункт K прамой BC мае сіметрычны яму адносна пункта O пункт M на прамой AD і наадварот, што вынікае з роўнасці трохвугольнікаў COK і AOM.

Такім чынам, фігура, сіметрычная дадзенай прамой адносна пункта, які не ляжыць на ёй, — гэта, па-першае, прамая, а па-другое, гэта прамая, паралельная дадзенай.

З рэшанай задачы вынікаюць наступныя ў л а с ц і в а с ц і ц э н т р а л ь н а й с і м е т р ы і:

1) *прамыя, сіметрычныя адносна цэнтра, паралельныя паміж сабой*;
2) *адрэзкі, сіметрычныя адносна цэнтра, роўныя і паралельныя*;
3) *трохвугольнікі, сіметрычныя адносна цэнтра, роўныя паміж сабой*.

Для пабудовы прамой, сіметрычнай дадзенай адносна дадзенага цэнтра сіметрыі, дастаткова ўзяць два пункты на дадзенай прамой, пабудаваць два сіметрычныя ім пункты адносна цэнтра сіметрыі і правесці прамую праз пабудаваныя пункты.

Для пабудовы адрэзка, сіметрычнага дадзенаму адносна дадзенага цэнтра сіметрыі, дастаткова пабудаваць пункты, сіметрычныя канцам

Правообладатель Народная асвета

дадзенага адрэзка адносна дадзенага цэнтра сіметрыі, і злучыць адрэзкам пабудаваныя пункты.

Для пабудовы трохвугольніка (многавугольніка), сіметрычнага дадзенаму адносна дадзенага цэнтра сіметрыі, дастаткова пабудаваць пункты, сіметрычныя яго вяршыням адносна дадзенага цэнтра сіметрыі, і злучыць іх адрэзкамі ў адпаведнай паслядоўнасці.

Практыкаванні

1) Якія з наступных фігур з'яўляюцца цэнтральна-сіметрычнымі фігурамі і дзе знаходзіцца іх цэнтр сіметрыі: а) квадрат; б) паралелаграм; в) вугал; г) прамая; в) роўнастаронні трохвугольнік?

2) Пакажыце відарыс адрэзка AB і пункт M па-за прамой AB. Пабудуйце адрэзак A_1B_1, сіметрычны адрэзку AB адносна пункта M.

3) Пакажыце відарыс трохвугольніка ABC. Пабудуйце трохвугольнік, сіметрычны трохвугольніку ABC: а) адносна вяршыні C; б) адносна пункта перасячэння медыян.

4) На каардынатнай плоскасці пакажыце відарыс графіка функцыі $y = 2x + 4$. Пабудуйце прамую, сіметрычную гэтаму графіку адносна пачатку каардынат. Знайдзіце функцыю выгляду $y = kx + b$, якая адпавядае пабудаванай прамой.

5) На каардынатнай плоскасці пакажыце відарыс паралелаграма $ABCD$, дзе $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$, $D(6; 2)$. Пабудуйце паралелаграм $A_1B_1C_1D_1$, сіметрычны паралелаграму $ABCD$ адносна пачатку каардынат $O(0; 0)$.

6) На дошцы паказана частка трохвугольніка ABC (рыс. 134), дзе вяршыня C недаступная. На старане AB адзначана сярэдзіна M. Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка трэба пабудаваць частку медыяны CM, якая змяшчаецца на дошцы.

Выканайце гэта заданне, выкарыстаўшы ўласцівасць цэнтральнай сіметрыі паралелаграма.

Рыс. 134

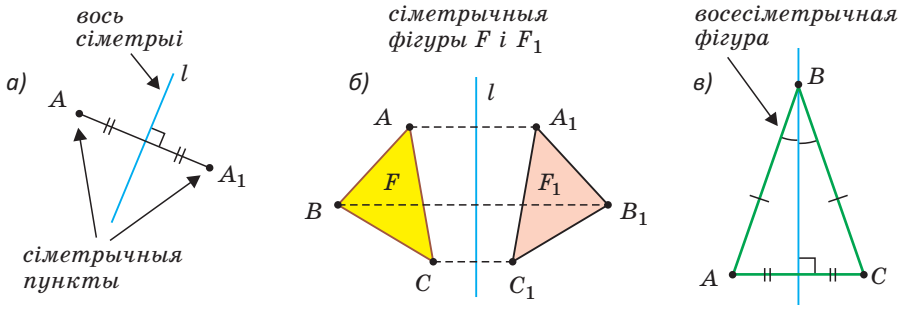
2. Восевая сіметрыя (сіметрыя адносна прамой)

Пункты A і A_1 называюцца *сіметрычнымі* адносна некаторай прамой l (*восі сіметрыі*), калі прамая l з'яўляецца пасярэднім перпендыкулярам да адрэзка AA_1 (рыс. 135, *а*). Пункты, што належаць восі сіметрыі, лічацца сіметрычнымі самі сабе.

Дзве фігуры F і F_1 называюцца сіметрычнымі адносна некаторай прамой l, калі кожнаму пункту адной фігуры адпавядае сіметрычны яму пункт другой фігуры адносна гэтай прамой l (рыс. 135, *б*).

Правообладатель Народная асвета

Фігура мае вось сіметрыі (з'яўляецца *восесіметрычнай* фігурай), калі кожнаму пункту дадзенай фігуры адпавядае сіметрычны яму пункт гэтай жа фігуры адносна некаторай прамой восі сіметрыі (рыс. 135, *в*).

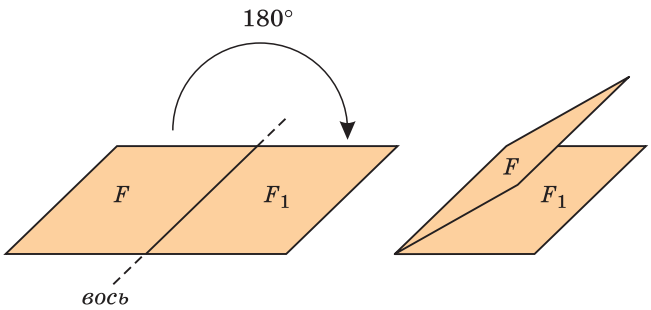


Рыс. 135

Прыкладам фігур, якія маюць вось сіметрыі, з'яўляюцца: *адрэзак* (воссю сіметрыі з'яўляецца пасярэдні перпендыкуляр да яго), *акружнасць* (воссю сіметрыі з'яўляецца любая прамая, якая праходзіць праз цэнтр акружнасці), *прамавугольнік* (восі сіметрыі праходзяць праз сярэдзіны процілеглых старон).

Словы «вось сіметрыі» ўжываюцца таму, што калі частку плоскасці з фігурай F павярнуць у прасторы вакол гэтай прамой на 180° як вакол восі, то фігура F супадзе з сіметрычнай ёй адносна прамой l фігурай F_1. Наадварот, калі нейкую фігуру F шляхам вярчэння вакол некаторай прамой на 180° можна сумясціць з фігурай F_1, то фігуры F і F_1 сіметрычныя адносна восі вярчэння (рыс. 136).

Такім чынам, на плоскасці фігуры, сіметрычныя адносна некаторай восі, роўныя паміж сабой. Тое ж датычыцца сіметрычных частак фігуры, якая мае вось сіметрыі. Напрыклад, калі ліст сшытка скласці папалам, а затым разгарнуць, то атрымаюцца дзве сіметрычныя часткі ліста адносна восі — лініі згібу.



Рыс. 136

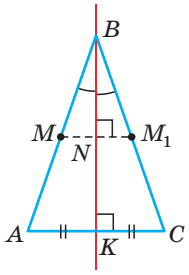
Правообладатель Народная асвета

Рыс. 137

Відарысы на рысунку 137 маюць вось сіметрыі.

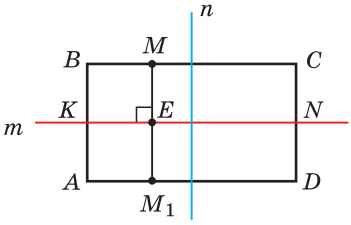
Задача 2. *Даказаць, што раўнабедраны трохвугольнік мае вось сіметрыі, якая змяшчае яго бісектрысу, праведзеную да асновы.*

Доказ. Няхай BK — бісектрыса $\triangle ABC$ з асновай AC (рыс. 138). Паколькі бісектрыса BK будзе вышынёй і медыянай, то $AC \perp BK$ і $AK = KC$. Пункты A і C сіметрычныя адносна прамой BK, пункт B сіметрычны сам сабе. Адзначым пункт M на старане AB і правядзём прамую MM_1, перпендыкулярную прамой BK, дзе пункт M_1 ляжыць на старане BC. Паколькі ў $\triangle MBM_1$ бісектрыса BN будзе і вышынёй, то ён — раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка, і яго бісектрыса BN будзе і медыянай. Адсюль $MN = NM_1$ і, значыць, пункты M і M_1 сіметрычныя адносна прамой BK. Такім чынам, прамая BK — вось сіметрыі раўнабедранага трохвугольніка ABC.



Рыс. 138

Задача 3. *Даказаць, што прамая, якая праходзіць праз сярэдзіны процілеглых старон прамавугольніка, з'яўляецца яго воссю сіметрыі.*



Рыс. 139

Доказ. Няхай $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 139), m і n — прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны яго процілеглых старон. Дакажам, што для любога пункта M, адзначанага на старане прамавугольніка, знойдзецца пункт M_1, сіметрычны адносна прамой m, які належыць старане прамавугольніка. Правядзём $MM_1 \perp m$. Дакажам, што $ME = EM_1$. Вышэй (ключавая задача 3 § 4) мы даказалі, што $KBCN$ і $AKND$ — роўныя прамавугольнікі. Адсюль вынікае, што адлегласць паміж паралельнымі прамымі BC і KN роўна адлегласці паміж паралельнымі прамымі AD і KN. Значыць, $ME = EM_1$, паколькі m — вось сіметрыі для адрэзкаў AB і CD. Такім чынам, прамая m — вось сіметрыі прамавугольніка $ABCD$. З прычыны даказанага прамая n, якая праходзіць праз сярэдзіны старон AD і BC прамавугольніка, з'яўляецца другой яго воссю сіметрыі.

Правообладатель Народная асвета

Вылучым некаторыя ўласцівасці восевай сіметрыі.

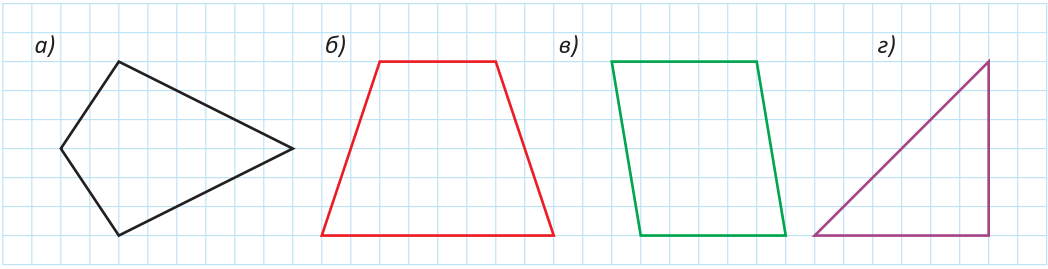
1) *Прамыя, сіметрычныя адносна восі, перасякаюцца ў пункце, які ляжыць на восі сіметрыі, або паралельныя паміж сабой*;

2) *адрэзкі, сіметрычныя адносна восі, роўныя*;

3) *трохвугольнікі, сіметрычныя адносна восі, роўныя*.

Практыкаванні

1) Якія з фігур, паказаных на рысунках 140, *а*)—*г*), маюць вось сіметрыі? Перанясіце гэтыя фігуры ў сшытак і правядзіце іх восі сіметрыі.



Рыс. 140

2) Колькі восей сіметрыі ў прамавугольніка, квадрата, ромба, раўнабедранай трапецыі, роўнастаронняга трохвугольніка?

3) Пакажыце відарыс адрэзка AB і вось l, якая не перасякае адрэзак AB. Пабудуйце адрэзак A_1B_1, сіметрычны адрэзку AB адносна прамой l.

4) Пакажыце відарыс трохвугольніка ABC. Пабудуйце трохвугольнік, сіметрычны трохвугольніку ABC адносна восі, якая праходзіць праз вяршыню C.

5) На каардынатнай плоскасці пакажыце відарыс паралелаграма $ABCD$, дзе $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$, $D(7; 2)$. Пабудуйце паралелаграм $A_1B_1C_1D_1$, сіметрычны паралелаграму $ABCD$ адносна восі Oy.

6) На каардынатнай плоскасці пакажыце відарыс графіка функцыі $y = x + 3$. Пабудуйце прамую, сіметрычную гэтаму графіку адносна восі Ox. Знайдзіце формулу, якая задае функцыю, што адпавядае пабудаванай прамой.

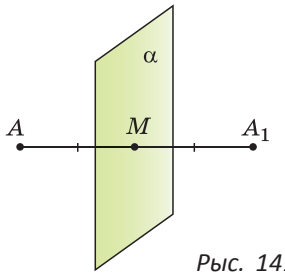
7) Якія з наступных слоў-паліндромаў маюць вось сіметрыі:

КАЗАК МАДАМ КОК ШАЛАШ ЗАКАЗ РАДАР

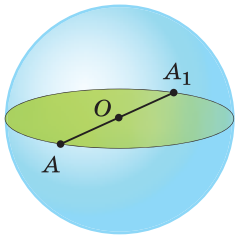
3. Люстраная сіметрыя.

Акрамя цэнтральнай і восевай сіметрыі існуе яшчэ сіметрыя адносна плоскасці. Яна называецца *люстраной сіметрыяй*. Пункты A і A_1 сіметрычныя адносна плоскасці, калі плоскасць праходзіць праз сярэдзіну

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 141

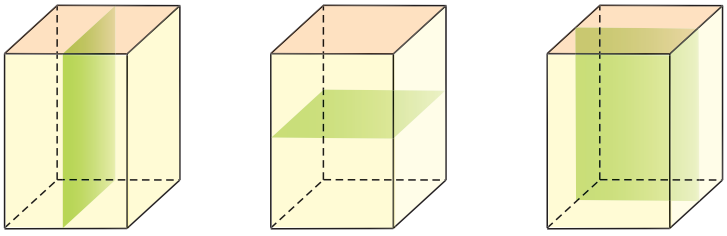


Рыс. 142

адрэзка AA_1 і перпендыкулярна да гэтага адрэзка (рыс. 141). Інакш кажучы, $AA_1 \perp \alpha$ і $AM = MA_1$.

У прасторы плоскасцю сіметрыі валодае шар: любая плоскасць, якая праходзіць праз яго цэнтр, дзеліць шар на дзве часткі, сіметрычныя адносна гэтай плоскасці (рыс. 142).

У прамавугольнага паралелепіпеда тры плоскасці сіметрыі (рыс. 143).



Рыс. 143

Многія будынкі і збудаванні маюць плоскасць сіметрыі (рыс. 144). Можна паказаць плоскасць, адносна якой сіметрычна цела чалавека. Праўда, гэта толькі ў ідэале. У чалавека ёсць асаблівасці, якія робяць яго знешні выгляд асіметрычным: прычоска, адна больш развітая рука, радзімкі і г. д.

Назва «люстраная сіметрыя» тлумачыцца тым, што прадмет і яго відарыс у люстры сіметрычныя адносна плоскасці люстра. Адбіткі ў вадзе дрэў, будынкаў з'яўляюцца прыкладам люстраной сіметрыі.

Рыс. 144

Правообладатель Народная асвета

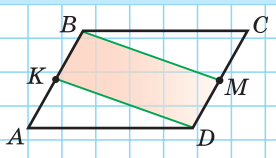
ЗАПАМІНАЕМ

1. **Сума вуглоў n-вугольніка роўна $180°(n - 2)$.**
2. **Пяць уласцівасцей паралелаграма:** «У паралелаграма ...
   1) сума суседніх вуглоў роўна 180°;
   2) дыяганаль дзеліць яго на два роўныя трохвугольнікі;
   3) процілеглыя стораны роўныя;
   4) процілеглыя вуглы роўныя;
   5) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам».
3. **Тры прыметы паралелаграма:** «Калі ў чатырохвугольніка
   1) дзве стараны роўныя і паралельныя, або
   2) процілеглыя стораны роўныя, або
   3) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то дадзены чатырохвугольнік — паралелаграм».
4. **Уласцівасць дыяганалей прамавугольніка:** «Дыяганалі прамавугольніка роўныя».
5. **Уласцівасць дыяганалей ромба:** «Дыяганалі ромба ўзаемна перпендыкулярныя і ляжаць на бісектрысах яго вуглоў».
6. **Уласцівасць сярэдняй лініі трохвугольніка:** «Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельна аснове і роўна яе палавіне».
7. **Уласцівасць сярэдняй лініі трапецыі:** «Сярэдняя лінія трапецыі паралельна асновам і роўна іх паўсуме».
8. **Тэарэма Фалеса:** «Калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану, то на другой старане вугла адкладуцца роўныя паміж сабой адрэзкі».

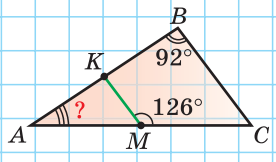
ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэсты 1—3

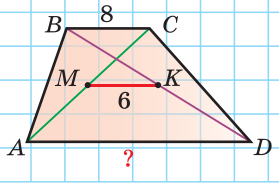
1. $ABCD$ — паралелаграм, M і K — сярэдзіны яго старон. Дакажыце, што $DKBM$ — паралелаграм.



2. M і K — сярэдзіны старон AC і AB. Знайдзіце $\angle A$.



3. Знайдзіце аснову AD трапецыі $ABCD$, калі M і K — сярэдзіны яе дыяганалей.

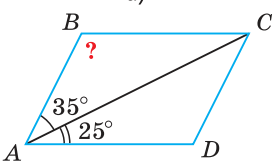


Правообладатель Народная асвета

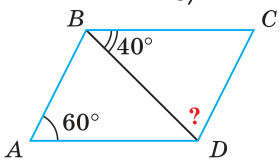
ПАДРЫХТОЎКА ДА КАНТРОЛЬНАЙ РАБОТЫ № 1

1. $ABCD$ — паралелаграм. Знайдзіце вугал, абазначаны пытальнікам.

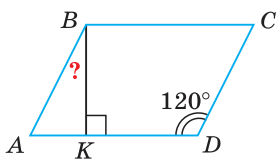
а)



б)

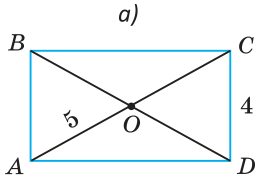


в)

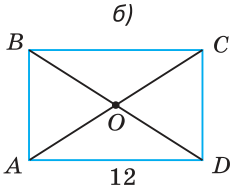


2. $ABCD$ — прамавугольнік. Знайдзіце:
а) P_{COD}; б) P_{AOD}, калі $BD = 15$; в) AD, калі $P_{AOB} = 25$, $P_{ACD} = 40$.

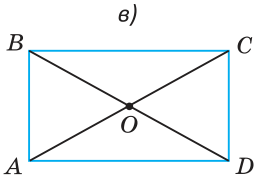
а)



б)

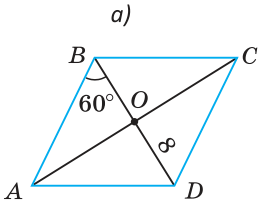


в)

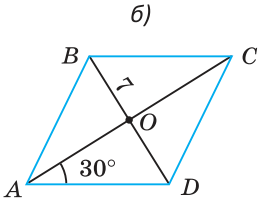


3. $ABCD$ — ромб. Знайдзіце яго перыметр.

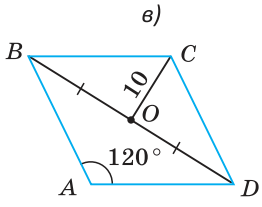
а)



б)

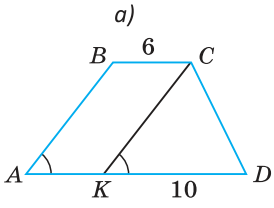


в)

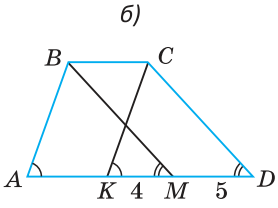


4. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

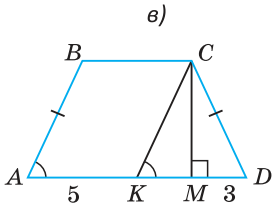
а)



б)

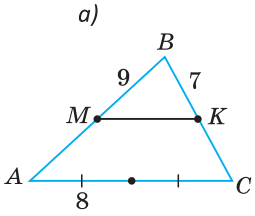


в)

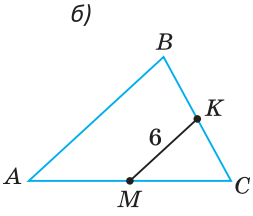


5. MK — сярэдняя лінія трохвугольніка. Знайдзіце:
а) P_{ABC}; б) P_{ABC}, калі $P_{ABKM} = 28$; в) P_{KBCM}, калі $P_{AKM} = 18$.

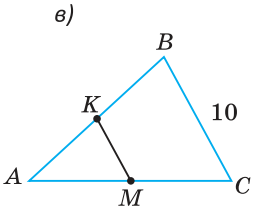
а)



б)



в)



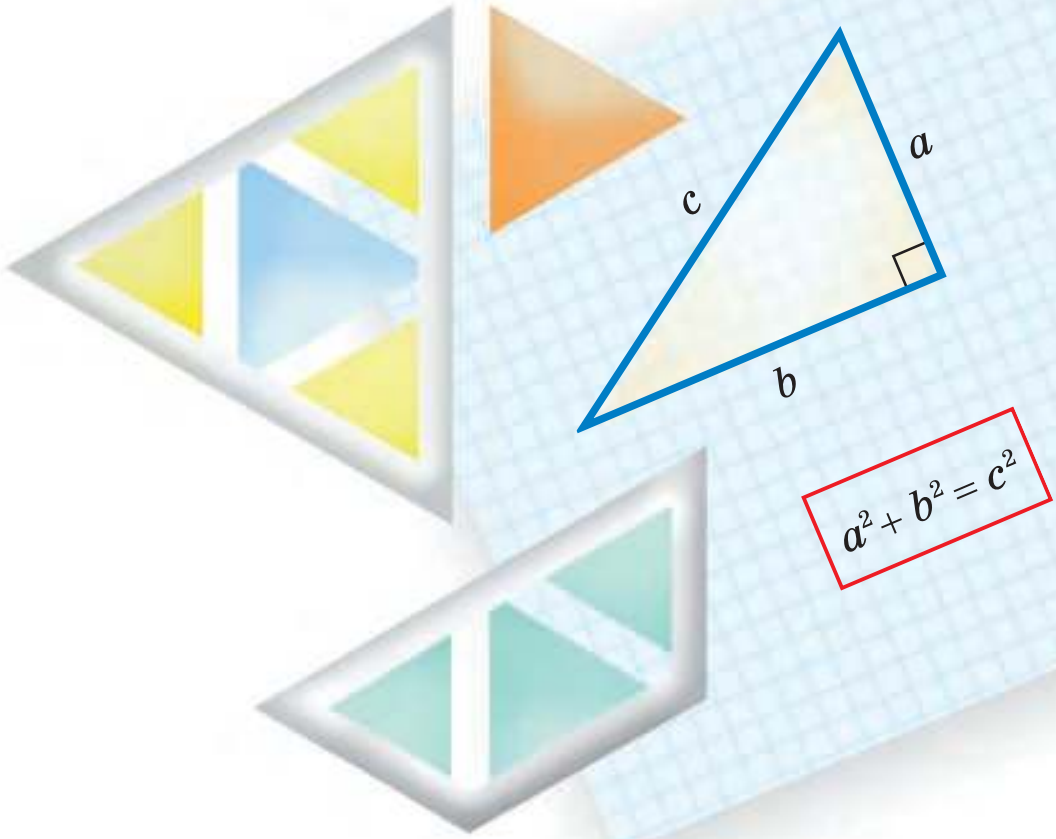
Правообладатель Народная асвета

Глава II

Плошчы многавугольнікаў

У гэтай главе вы даведаецеся:

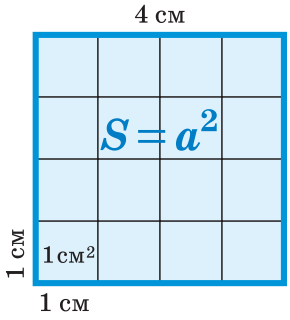
- Якія фігуры называюць роўнавялікімі
- Як знайсці плошчу трохвугольніка
- Што сцвярджае тэарэма Піфагора



Правообладатель Народная асвета

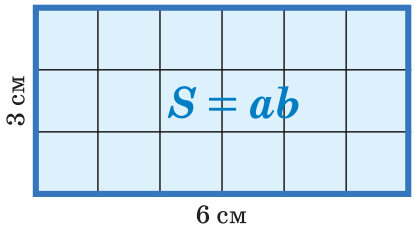
Плошчы

Квадрат



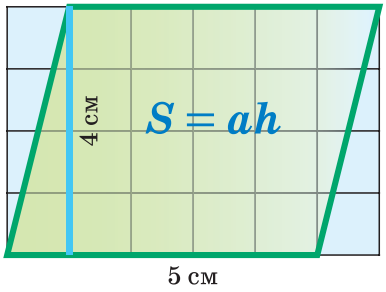
$S = 4^2 = 16\,(\text{см}^2)$

Прамавугольнік



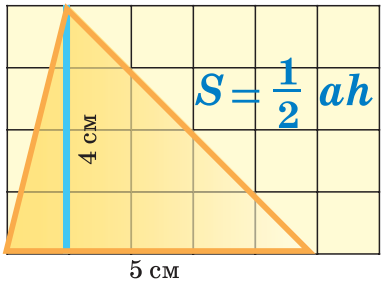
$S = 6 \times 3 = 18\,(\text{см}^2)$

Паралелаграм



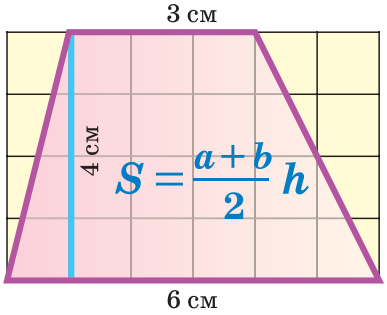
$S = 5 \times 4 = 20\,(\text{см}^2)$

Трохвугольнік



$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10\,(\text{см}^2)$

Трапецыя



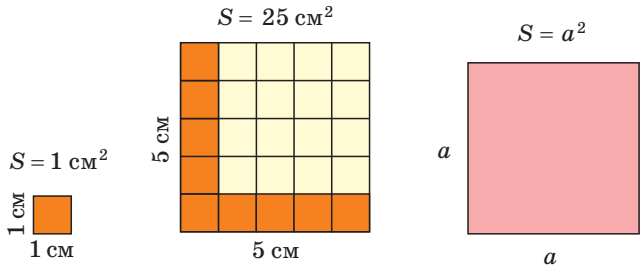
$S = \frac{6+3}{2} \times 4 = 18\,(\text{см}^2)$

Правообладатель Народная асвета

§ 13. Плошча квадрата, прамавугольніка

Пад плошчай многавугольніка або другой абмежаванай плоскай фігуры разумеюць велічыню часткі плоскасці, якую яна займае. За адзінку вымярэння плошчы прымаюць плошчу квадрата са стараной, роўнай адзінцы вымярэння даўжыні. Адзінка вымярэння плошчы называецца квадратнай адзінкай: 1 см^2 (квадратны сантыметр), 1 дм^2 (квадратны дэцыметр), 1 м^2 (квадратны метр) і г. д.

Для знаходжання плошчы квадрата са стараной 5 см яго можна разбіць на квадраты са стараной 1 см (рыс. 145). У адным гарызантальным радзе будзе 5 такіх квадратаў, а радоў будзе таксама 5. Атрымаем $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ малых квадратаў. Тады плошча вялікага квадрата роўна 25 см^2. Можна даказаць, што калі старана квадрата роўна дробаваму або ірацыянальнаму ліку a, то плошча квадрата таксама роўна a^2, г. зн. $S_{кв} = a^2$.



Рыс. 145

Уласцівасці (аксіёмы) плошчы:

1. *Кожны многавугольнік мае плошчу, якая выражаецца дадатным лікам.*

Гэты лік паказвае, колькі разоў адзінка вымярэння плошчы, г. зн. адзінкавы квадрат і яго часткі, змяшчаецца ў дадзеным многавугольніку.

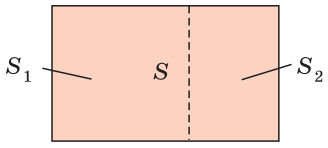
2. *Роўныя многавугольнікі маюць роўныя плошчы.*

Заўважым, што адваротнае сцверджанне, наогул кажучы, няправільнае. Гэта значыць, што калі два многавугольнікі маюць роўныя плошчы, то яны не абавязкова роўныя паміж сабой як фігуры.

3. *Калі многавугольнік разбіць на некалькі многавугольнікаў, то сума плошчаў атрыманых многавугольнікаў будзе роўна плошчы дадзенага.*

Так, калі прамавугольнік з плошчай S разбіць на два прамавугольнікі з плошчамі S_1 і S_2 (рыс. 146), то $S = S_1 + S_2$.

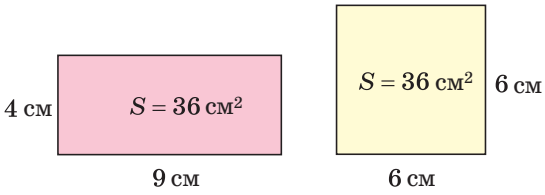
Заўважым, што для перыметраў названых прамавугольнікаў аналагічная ўласцівасць няправільная: $P \neq P_1 + P_2$.



Рыс. 146

Азначэнне. Фігуры, плошчы якіх роўныя, называюцца **роўнавялікімі**.

Правообладатель Народная асвета

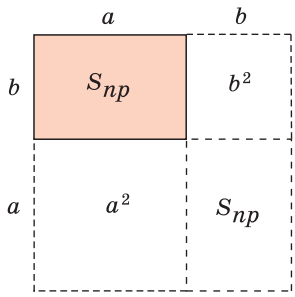


Рыс. 147

Вы ўжо ведаеце, што плошча прамавугольніка роўна здабытку яго даўжыні і шырыні, г. зн. здабытку яго вымярэнняў. Прамавугольнік са старанамі 4 см і 9 см роўнавялікі квадрату са стараной 6 см (рыс. 147).

Дакажам справядлівасць формулы плошчы прамавугольніка.

Тэарэма. **Плошча прамавугольніка роўна здабытку яго суседніх старон, г. зн. $S_{пр} = ab$.**



Рыс. 148

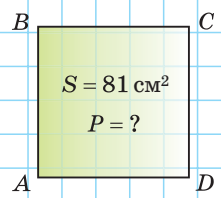
Доказ. Дабудуем прамавугольнік са старанамі a і b да квадрата са стараной $a + b$, як паказана на рысунку 148. Плошча гэтага квадрата роўна $(a + b)^2$. Пабудаваны квадрат складаецца з двух роўных прамавугольнікаў з плошчай $S_{пр}$ і двух меншых квадратаў: аднаго са стараной a і плошчай a^2, другога са стараной b і плошчай b^2. Паколькі плошча многавугольніка роўна суме плошчаў яго частак, то $2S_{пр} + a^2 + b^2 = (a + b)^2$, $2S_{пр} + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $S_{пр} = ab$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Паколькі кожная старана прамавугольніка з'яўляецца яго вышынёй адносна суседняй стараны як асновы, то можна гаварыць, што плошча прамавугольніка роўна здабытку асновы на вышыню.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

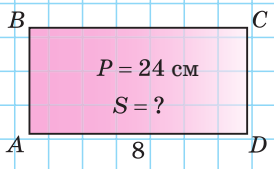
Тэст 1

Плошча квадрата роўна 81 см². Знайдзіце перыметр квадрата.



Тэст 2

Перыметр прамавугольніка роўны 24 см, адна з яго старон — 8 см. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

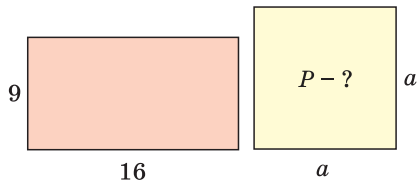


Правообладатель Народная асвета

Заданні да § 13

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці перыметр квадрата, роўнавялікага прамавугольніку са старанамі* 9 *см і* 16 *см* (рыс. 149).



Рыс. 149

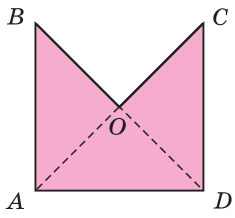
Р а ш э н н е. Плошча прамавугольніка роўна здабытку яго суседніх старон, г. зн. $S_{пр} = 9 \cdot 16 = 144$ (см^2). Паколькі квадрат роўнавялікі дадзенаму прамавугольніку, то $S_{кв} = 144$ (см^2). Але плошча квадрата роўна квадрату даўжыні яго стараны, г. зн. $S_{кв} = a^2$. Адсюль $a^2 = 144$, $a = \sqrt{144} = 12$ (см) — старана квадрата. Перыметр квадрата $P_{кв} = 4a = 4 \cdot 12 = 48$ (см).

А д к а з: 48 см.

Заўвага. Ураўненне $a^2 = 144$, наогул кажучы, мае два карані: –12 і 12. Лічачы, што даўжыня стараны квадрата — велічыня дадатная, мы адразу запісалі $a = \sqrt{144}$, а корань $a = -\sqrt{144}$ адкінулі як непрыдатны.

Задача 2. *З квадрата ABCD выразалі трохвугольнік BOC, дзе O — пункт перасячэння дыяганалей. Плошча многавугольніка ABOCD роўна* 54 *см*^{2}. *Знайсці даўжыню стараны квадрата.*

Р а ш э н н е. Дыяганалі AC і BD дзеляць квадрат на 4 роўныя трохвугольнікі (рыс. 150). Многавугольнік $ABOCD$ складаецца з трох роўных трохвугольнікаў: $\triangle AOD$, $\triangle AOB$ і $\triangle COD$. Плошча кожнага трохвугольніка роўна $54 : 3 = 18$ (см^2), а плошча квадрата $ABCD$ роўна $18 \cdot 4 = 72$ (см^2). Паколькі плошча квадрата знаходзіцца па формуле $S = a^2$, дзе a — старана квадрата, то $a^2 = 72$, $a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (см).



Рыс. 150

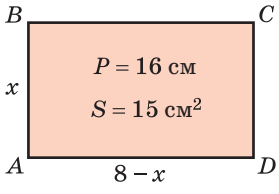
А д к а з: $6\sqrt{2}$ см.

Задача 3. *Перыметр прамавугольніка роўны* 16 *см, а яго плошча роўна* 15 *см*^{2}. *Знайсці староны прамавугольніка* (рыс. 151).

Р а ш э н н е. *Спосаб* 1. Паўперыметр прамавугольніка (сума даўжынь дзвюх суседніх старон) роўны 8 см. Калі адна яго старана роўна x см, то другая старана роўна $(8 - x)$ см. Плошча прамавугольніка знаходзіцца па формуле $S = ab$, дзе a і b — суседнія староны. Па ўмове $x \cdot (8 - x) = 15$. Рэшым атрыманае ўраўненне:

$$-x^2 + 8x = 15,\ x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = 4 \pm 1;\ x_1 = 3,\ x_2 = 5.$$



Рыс. 151

Правообладатель Народная асвета

Калі $x = 3$, то $8 - x = 5$; калі $x = 5$, то $8 - x = 3$. Стораны прамавугольніка роўны 3 см і 5 см.

Спосаб 2. Няхай a і b — стораны прамавугольніка. Паколькі плошча прамавугольніка $S = ab$, то $b = \frac{S}{a}$. Па ўмове $S = 15$ см^2. Таму $b = \frac{15}{a}$. Перыметр прамавугольніка $P = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{15}{a}\right)$. З умовы $2\left(a + \frac{15}{a}\right) = 16$. Адсюль $a^2 - 8a + 15 = 0$ (дзе $a \neq 0$). Па тэарэме Віета (адваротнай) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$. Тады $b_1 = \frac{15}{3} = 5$, $b_2 = \frac{15}{5} = 3$. Атрымалі $a = 3$ (см), $b = 5$ (см) або $a = 5$ (см), $b = 3$ (см). Стораны прамавугольніка роўны 3 см і 5 см.

Адказ: 3 см і 5 см.

Заўвага. Часта пры рашэнні геаметрычных задач з дапамогай ураўненняў пры абазначэнні даўжынь невядомых адрэзкаў размернасць не пазначаецца: замест x дм, a см, R м пішуць x, a, R. У гэтым выпадку размернасць пазначаюць у дужках пасля знаходжання кораня ўраўнення: $x = 4$ (дм), $a = 5$ (см), $R = 6$ (м).

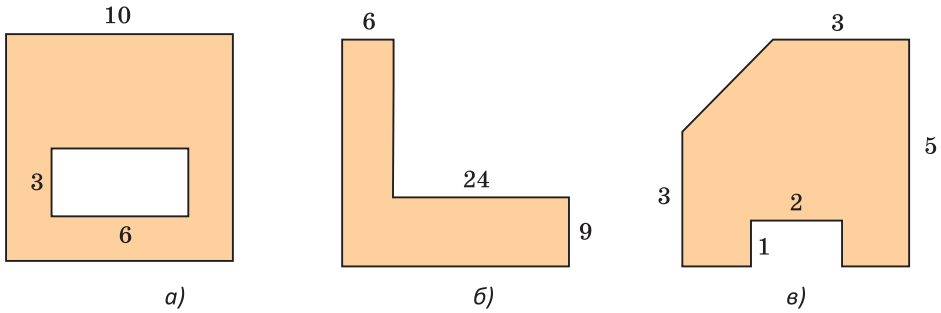
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

154. Вымерайце вялікай лінейкай памеры класнай дошкі. Знайдзіце яе плошчу ў квадратных метрах, акругліўшы адказ да дзясятых.

155. Знайдзіце плошчу квадрата, калі яго старана роўна:

а) 25 мм; б) 1,2 дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

156. На рысунках 152, *а*)—*в*) паказаны фігуры, атрыманыя з квадратаў, у якіх выразалі нейкую частку. Па пазначаных памерах знайдзіце плошчу часткі кожнага квадрата, што засталася (усе памеры дадзены ў сантыметрах).



а) *б)* *в)*

Рыс. 152

157. Плошча прамавугольніка роўна 24 см^2. Стораны прамавугольніка адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце стораны прамавугольніка.

Правообладатель Народная асвета

158. Дадзены прамавугольнік $ABCD$. Старану AD прадоўжылі за пункт D на адрэзак DK, роўны старане AD. Растлумачце, чаму:

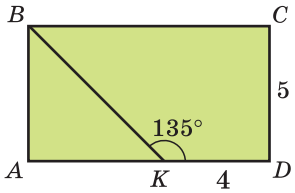
а) $\triangle ACK$ роўнавялікі прамавугольніку $ABCD$;
б) $\triangle ABK$ роўнавялікі прамавугольніку $ABCD$.

159. а) Адна са старон прамавугольніка роўна 18 дм, а яго плошча роўна 90 дм^2. Знайдзіце перыметр прамавугольніка.

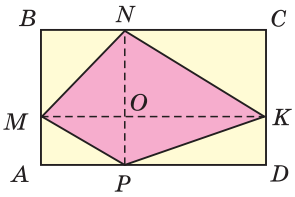
б) Перыметр прамавугольніка роўны 36 м, а адна з яго старон роўна 12 м. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

160. У прамавугольніку $ABCD$ на старане AD адзначаны пункт K (рыс. 153), $\angle BKD = 135°$, $KD = 4$ см, $CD = 5$ см. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

161. У прамавугольніку $ABCD$ праведзены адрэзкі $MK \parallel AD$, $NP \parallel AB$ (рыс. 154). Дакажыце, што плошча чатырохвугольніка $MNKP$ роўна $\frac{1}{2}$ плошчы прамавугольніка $ABCD$.



Рыс. 153



Рыс. 154

162. а) Перыметр прамавугольніка роўны 22 см. Адна з яго старон на 3 см большая за другую. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

б) Плошча прамавугольніка роўна 80 см^2. Адна з яго старон на 11 см меншая за другую. Знайдзіце перыметр прамавугольніка.

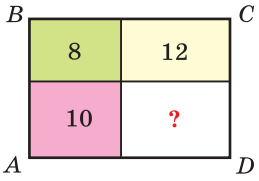
163. Плошча прамавугольніка роўна 48 см^2. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка з вяршынямі ў сярэдзінах старон гэтага прамавугольніка.

164. На каардынатнай плоскасці дадзены прамавугольнік $ABCD$, дзе $A(-3; -2)$, $C(4; 3)$, $D(4; -2)$. Знайдзіце плошчу гэтага прамавугольніка, калі адзінкавы адрэзак роўны 1 см.

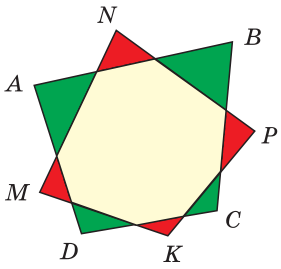
165. а) Кожную старану квадрата павялічылі ў 3 разы. Вызначыце, у колькі разоў павялічылася плошча квадрата.
б) Вызначыце, у колькі разоў трэба паменшыць кожную старану квадрата, каб яго плошча паменшылася ў 16 разоў.

166. Кожную старану квадрата павялічылі на 10 %. На колькі працэнтаў павялічылася плошча квадрата?

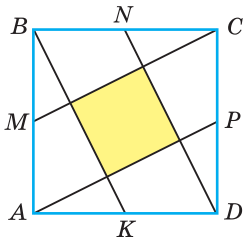
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 155



Рыс. 156



Рыс. 157

167*. Прамавугольнік падзелены прамымі, перпендыкулярнымі да яго старон, на чатыры часткі (рыс. 155). Плошчы трох частак роўны 8, 10 і 12. Знайдзіце плошчу чацвёртай (незафарбаванай) часткі прамавугольніка.

168*. Два роўнавялікія чатырохвугольнікі $ABCD$ і $MNPK$ сумясцілі, як паказана на рысунку 156. Дакажыце, што сума плошчаў зялёных трохвугольнікаў роўна суме плошчаў чырвоных трохвугольнікаў.

169*. Пункты M, N, P, K — сярэдзіны старон квадрата $ABCD$ (рыс. 157).

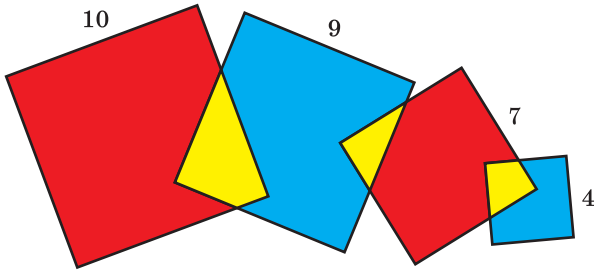
а) Якую форму мае жоўты чатырохвугольнік?
Абгрунтуйце ваш адказ.
б) Якую частку складае яго плошча ад плошчы квадрата $ABCD$:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{1}{8}$?

Дакажыце, што ваша сцверджанне правільнае.

Гімнастыка розуму

На рысунку 158 паказаны відарысы квадратаў са старанамі 10 см, 9 см, 7 см і 4 см. Вядома, што сума плошчаў двух чырвоных частак роўна 112 см^2. Знайдзіце суму плошчаў дзвюх сініх частак.



Рыс. 158

Правообладатель Народная асвета

§ 14. Плошча паралелаграма

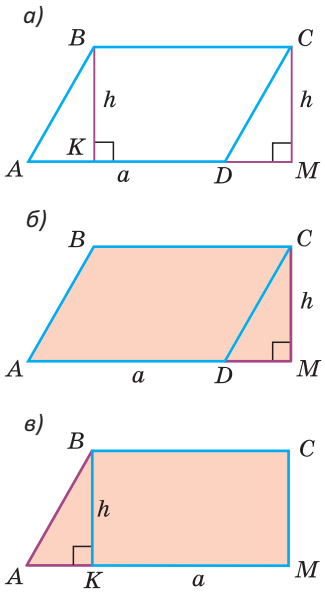
Тэарэма. Плошча паралелаграма роўна здабытку яго асновы на вышыню, г. зн. $S_{пар} = ah$.

Доказ. Няхай $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 159, *а*), $AD = a$ — аснова, $BK = h$ — вышыня. Правядзём у паралелаграме вышыню $CM = h$. Чатырохвугольнік $KBCM$ з'яўляецца прамавугольнікам, паколькі ў яго ўсе вуглы прамыя. Прамавугольныя трохвугольнікі ABK і DCM роўныя па катэце і гіпатэнузе ($BK = CM$ як вышыні, праведзеныя да адной асновы, $AB = CD$ як процілеглыя сторны паралелаграма). Значыць, роўныя і іх плошчы.

Разгледзім трапецыю $ABCM$.

Плошча трапецыі $ABCM$, з аднаго боку, роўна суме плошчаў паралелаграма $ABCD$ і прамавугольнага трохвугольніка DCM (рыс. 159, *б*).

З другога боку, яна роўна суме плошчаў прамавугольніка $KBCM$ і прамавугольнага трохвугольніка ABK (рыс. 159, *в*).



Рыс. 159

З прычыны роўнасці плошчаў трохвугольнікаў ABK і DCM плошча паралелаграма $ABCD$ роўна плошчы прамавугольніка $KBCM$. Плошча прамавугольніка $S_{KBCM} = BC \cdot BK$, плошча паралелаграма $S_{ABCD} = BC \cdot BK = AD \cdot BK$. Інакш кажучы, $S_{пар} = ah$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Часам вышыню паралелаграма, праведзеную да стараны a, абазначаюць h_a, а вышыню, праведзеную да стараны b, абазначаюць h_b. Тады справядлівая роўнасць $S_{пар} = ah_a = bh_b$, адкуль $a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$.

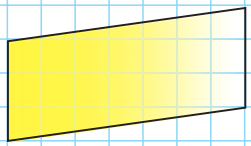
А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2.**

Тэст 1

Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі памеры адной клеткі 1 см × 1 см.

Тэст 2

Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі памеры адной клеткі 1 см × 1 см.

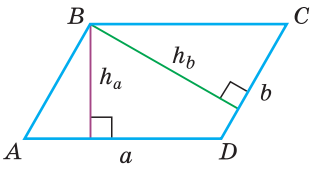


Правообладатель Народная асвета

Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Стораны паралелаграма роўны* 12 *см і* 8 *см. Вышыня, праведзеная да большай стараны, роўна* 10 *см. Знайсці вышыню, праведзеную да меншай стараны паралелаграма.*



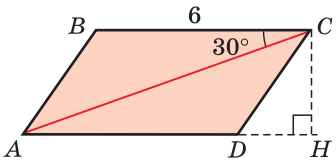
Рыс. 160

Р а ш э н н е. Няхай $a = 12$ см і $b = 8$ см — стораны паралелаграма $ABCD$, h_a і h_b — яго вышыні і $h_a = 10$ см (рыс. 160). Паколькі $S = ah_a$ і $S = bh_b$ — гэта плошча аднаго і таго ж паралелаграма, то $ah_a = bh_b$, г. зн. $12 \cdot 10 = 8 \cdot h_b$. Адсюль $h_b = \frac{12 \cdot 10}{8} = 15$ (см).

А д к а з: 15 см.

Заўвага. З роўнасці $ah_a = bh_b$ вынікае, што $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Інакш кажучы, стораны паралелаграма адваротна прапарцыянальны яго вышыням. Да большай стараны паралелаграма праведзена меншая вышыня, а да меншай стараны — бо́льшая.

Задача 2. *Плошча паралелаграма $ABCD$ роўна* 24 *см^2, $BC = 6$ см, $\angle ACB = 30°$. Знайсці даўжыню дыяганалі AC.*

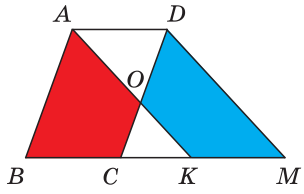


Рыс. 161

Р а ш э н н е. Апусцім вышыню CH на прадаўжэнне асновы AD (рыс. 161). Паколькі $S_{ABCD} = AD \cdot CH$ і $AD = BC = 6$ см, то $24 = 6 \cdot CH$, $CH = \frac{24}{6} = 4$ (см). Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ACH. Заўважым, што $\angle CAH = \angle ACB = 30°$ як накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых AD і BC і сякучай AC. Паколькі катэт, што ляжыць насупраць вугла ў 30°, роўны палавіне гіпатэнузы, то $AC = 2CH = 8$ см.

А д к а з: 8 см.

Задача 3*. *На рысунку* 162 $AD \parallel BM$, $AB \parallel DC$, $AK \parallel DM$. *Даказаць, што плошча чырвонага чатырохвугольніка роўна плошчы сіняга.*



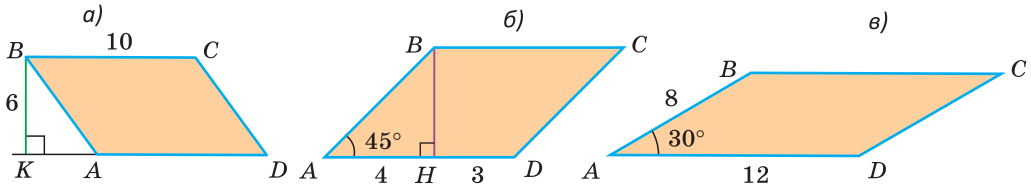
Рыс. 162

Д о к а з. Паралелаграмы $ABCD$ і $AKMD$ роўнавялікія, паколькі ў іх старана AD — агульная, а вышыні, праведзеныя да гэтай стараны, роўныя як адлегласці паміж паралельнымі прамымі BM і AD. Паралелаграм $ABCD$ складаецца з чырвонага чатырохвугольніка $BAOC$ і трохвугольніка AOD. Паралелаграм $AKMD$ складаецца з сіняга чатырохвугольніка $OKMD$ і трохвугольніка AOD. Такім чынам, плошчы сіняга і чырвонага чатырохвугольнікаў роўныя. Што і трэба было даказаць.

Правообладатель Народная асвета

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

170. Па даных на рысунках 163, *а*)—*в*) знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$ (даўжыні адрэзкаў дадзены ў сантыметрах).



Рыс. 163

171. а) Плошча паралелаграма $ABCD$ роўна 100 м^2. Старана AD роўна 20 м. Знайдзіце вышыню паралелаграма, праведзеную да стараны AD.

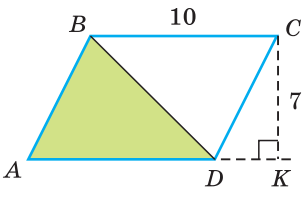
б) Вышыня BH паралелаграма $ABCD$ праведзена да стараны AD і роўна 8 см, $AH = 3$ см, $HD = 2AH$. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

172. а) Плошча паралелаграма $ABCD$ роўна 60 см^2. Вышыня BK, праведзеная да стараны CD, роўна 10 см, $AD = 12$ см. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

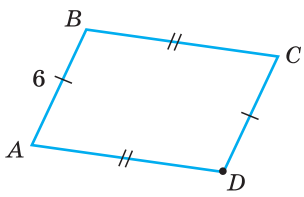
б) З вяршыні B паралелаграма $ABCD$ да стараны CD праведзена вышыня BK, да стараны AD — вышыня BH. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі $BH = 5$ см, $BK = 7$ см, $AD = 14$ см.

173. $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 164), $BC = 10$ см, $CK \perp AD$, $CK = 7$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABD.

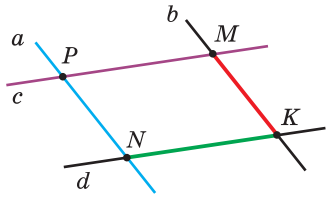
174. На рысунку 165 $AB = CD$, $AD = BC$. Знайдзіце адлегласць ад пункта D да прамой AB, калі $S_{ABCD} = 54$ см^2, $AB = 6$ см.



Рыс. 164



Рыс. 165



Рыс. 166

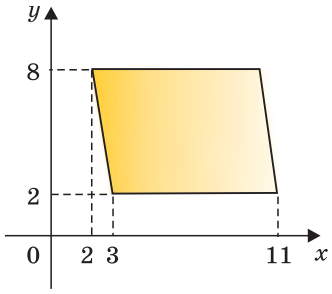
175. На рысунку 166 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $MK = 16$, $NK = 24$. Адлегласць паміж прамымі a і b роўна 18. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі c і d.

Правообладатель Народная асвета

176. а) Большая старана паралелаграма роўна 18 см, вышыні адносяцца як 1 : 2. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

б) Перыметр паралелаграма роўны 48 см, адна з яго старон у 2 разы большая за другую. Вышыня, апушчаная на большую старану, роўна 4,5 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

177. Вызначыце, колькі квадратных адзінак складае плошча паралелаграма, паказанага на каардынатнай плоскасці (рыс. 167).



Рыс. 167

178. Дадзены паралелаграм $ABCD$, BK — бісектрыса вугла B ($K \in AD$), $CD = 12$ см, $KD = 5$ см, адлегласць ад пункта K да прамой BC роўна 9 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

179. Адлегласць ад вяршыні B паралелаграма $ABCD$ да прамой AD роўна 6 см, а да прамой AC — 4 см, $\angle CAD = 30°$. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

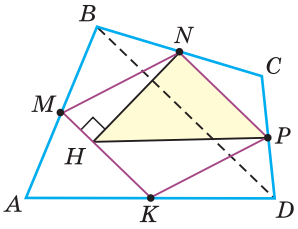
180. Плошча паралелаграма роўна 112 см^2. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка, вяршыні якога з'яўляюцца сярэдзінамі старон дадзенага паралелаграма.

181. Дадзены паралелаграм $ABCD$, DK — бісектрыса вугла D (пункт K ляжыць на старане BC), $\angle BKD = 105°$, $BK = 4$ см, $KC = 12$ см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

182. Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 48 см, яго вышыні роўны 10 см і 6 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

183*. Вугал паміж вышынямі BK і BM паралелаграма $ABCD$ роўны 45°. Вышыня BK дзеліць старану AD у адносіне 1 : 2, лічачы ад пункта A. Сярэдняя лінія трапецыі $KBCD$ роўна 7,5 см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

184*. Пункты M, N, P, K — сярэдзіны старон чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 168). Плошча чатырохвугольніка $MNPK$ роўна 144 см^2. Вядома, што $BD = 24$ см, $NH \perp MK$. Дакажыце, што $\angle NHP = \angle NPH$.

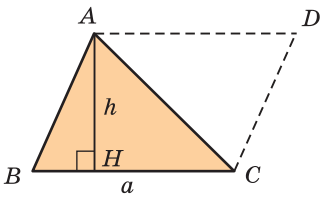


Рыс. 168

Правообладатель Народная асвета

§ 15. Плошча трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, ромба

Тэарэма. **Плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку асновы на вышыню, г. зн.** $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$.



Рыс. 169

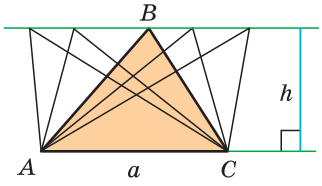
Доказ. Няхай у $\triangle ABC$ старана $BC = a$, $AH = h$ — вышыня. Дабудуем $\triangle ABC$ да паралелаграма $BADC$ (рыс. 169). Аснова a і вышыня h у паралелаграма тыя ж, што ў трохвугольніка ABC. Трохвугольнікі ABC і CDA роўныя, а значыць, роўныя іх плошчы. Тады плошча трохвугольніка ABC роўна палавіне плошчы паралелаграма $BADC$, г. зн. $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{BADC} = \frac{1}{2}ah$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Прынята вышыні трохвугольніка, праведзеныя да старон a, b і c, абазначаць адпаведна h_a, h_b, h_c. Тады $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, адкуль $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Вынік.

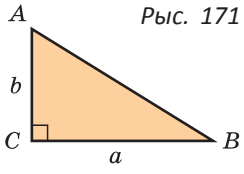
Трохвугольнікі, якія маюць роўныя асновы і роўныя вышыні, праведзеныя да гэтых асноў, роўнавялікія.

На рысунку 170 усе трохвугольнікі, якія маюць з трохвугольнікам ABC агульную аснову AC, вяршыні якіх ляжаць на прамой, што праходзіць праз вяршыню B паралельна прамой AC, з'яўляюцца роўнавялікімі.



Рыс. 170

Тэарэма. **Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна палавіне здабытку катэтаў, г. зн.** $S = \frac{ab}{2}$.



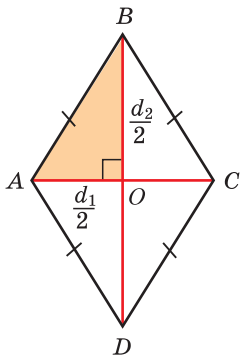
Рыс. 171

Доказ. Катэт b прамавугольнага трохвугольніка ABC з'яўляецца вышынёй, а катэт a — адпаведнай гэтай вышыні асновай (рыс. 171). Таму плошча прамавугольнага трохвугольніка $S = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{ab}{2}$. Тэарэма даказана.

Плошчу ромба можна знайсці як плошчу паралелаграма, г. зн. як здабытак асновы на вышыню. Аднак, улічваючы, што дыяганалі ромба ўзаемна перпендыкулярныя, можна вывесці асобную формулу плошчы ромба.

Правообладатель Народная асвета

Тэарэма. **Плошча ромба роўна палавіне здабытку дыяганалей, г. зн.** $S_{ромба} = \frac{d_1 d_2}{2}$.



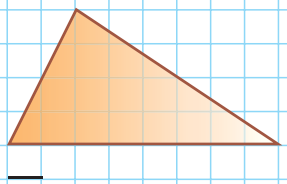
Рыс. 172

Доказ. Няхай у ромба $ABCD$ дыяганалі $AC = d_1$, $BD = d_2$ (рыс. 172). Паколькі дыяганалі ромба ўзаемна перпендыкулярныя і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то прамавугольныя трохвугольнікі AOB, BOC, COD, AOD роўныя па двух катэтах. А значыць, роўныя іх плошчы. Паколькі плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна палавіне здабытку катэтаў, то $S_{AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$. Такім чынам, $S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$, г. зн. $S_{ромба} = \frac{d_1 d_2}{2}$. Тэарэма даказана.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

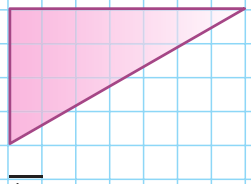
Тэст 1

Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі памеры адной клеткі 1 см × 1 см.

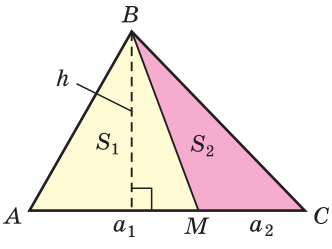


Тэст 2

Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі памеры адной клеткі 1 см × 1 см.



Задача. Даказаць уласцівасць: ***«Плошчы трохвугольнікаў з агульнай вышынёй (або роўнымі вышынямі) адносяцца як адпаведныя гэтым вышыням асновы».***



Рыс. 173

Доказ. У трохвугольнікаў ABM і CBM на рысунку 173 агульная вышыня h, праведзеная з вяршыні B. Абазначым адпаведныя асновы $AM = a_1$ і $MC = a_2$. Знойдзем адносіну плошчаў гэтых трохвугольнікаў: $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1 h}{\frac{1}{2}a_2 h} = \frac{a_1}{a_2}$. Што і трэба было даказаць.

Правообладатель Народная асвета

Заўвага. Згодна з даказанай уласцівасцю $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$.

Вынікі.

1. *Медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі.*

2. *Дыяганалі дзеляць паралелаграм на чатыры роўнавялікія трохвугольнікі.*

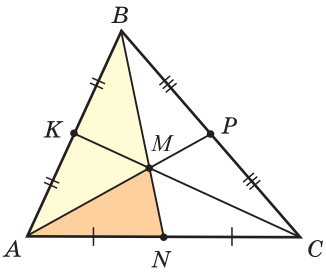
Дакажыце гэтыя вынікі самастойна.

Заданні да § 15

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што тры медыяны трохвугольніка дзеляць яго на шэсць роўнавялікіх трохвугольнікаў.*



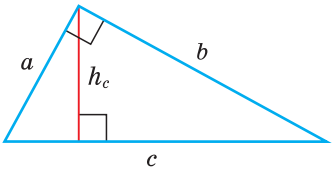
Рыс. 174

Р а ш э н н е. Няхай AP, BN і CK — медыяны трохвугольніка ABC, плошча якога роўна S (рыс. 174). Паколькі медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі, то $S_{ABN} = \frac{1}{2}S$. Па ўласцівасці медыян $BM : MN = 2 : 1$. Паколькі трохвугольнікі ABM і AMN маюць агульную вышыню, апушчаную з вяршыні A, іх плошчы адносяцца як $BM : MN$, г. зн. $2 : 1$. Тады $S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{ABN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$. Аналагічна, $S_{NMC} = S_{MPC} = S_{BMP} = S_{KMB} = S_{AMK} = \frac{1}{6}S$.

Вынік.

Плошча трохвугольніка, утворанага дзвюма медыянамі і стараной, складае $\frac{1}{3}$ плошчы S дадзенага трохвугольніка, г. зн. $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC} = \frac{1}{3}S$.

Задача 2. *Знайсці вышыню h_c прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі a і b і гіпатэнузай c.*



Рыс. 175

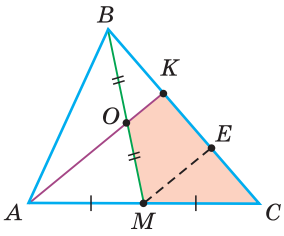
Р а ш э н н е. З аднаго боку, плошча прамавугольнага трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ch_c$ (рыс. 175). З другога боку, $S = \frac{1}{2}ab$. Адсюль $ch_c = ab$, $h_c = \frac{ab}{c}$.

Прыклад. Калі катэты прамавугольнага трохвугольніка роўны 6 см і 8 см, а гіпатэнуза 10 см, то вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).

$h_c = \frac{ab}{c}$ *Формула вышыні прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы.*

Правообладатель Народная асвета

Задача 3*. *Плошча трохвугольніка ABC роўна 120 см^2, BM — медыяна трохвугольніка, пункт O — сярэдзіна медыяны. Прамая AO перасякае старану BC у пункце K. Знайсці плошчу чатырохвугольніка $MOKC$* (рыс. 176).



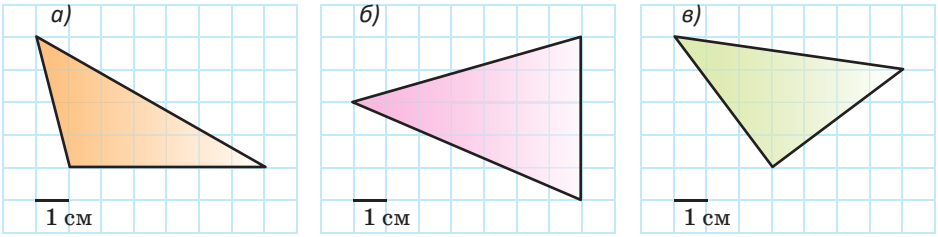
Рыс. 176

Р а ш э н н е. Паколькі медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі, то $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{AOM} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Правядзём $ME \parallel AK$. Па тэарэме Фалеса: паколькі $BO = OM$, то $BK = KE$, паколькі $AM = MC$, то $KE = EC$. Адсюль $BK = KE = EC$, $BK : KC = 1 : 2$. У $\triangle AKB$ і $\triangle AKC$ агульная вышыня, праведзеная з вяршыні A. Таму $\frac{S_{AKB}}{S_{AKC}} = \frac{BK}{KC} = \frac{1}{2}$. Тады $S_{AKC} = \frac{2}{3}S_{ABC}$, $S_{MOKC} = S_{AKC} - S_{AOM} = \frac{2}{3}S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{5}{12} \cdot 120 = 50$ (см^2).

А д к а з: 50 см^2.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

185. Знайдзіце плошчы трохвугольнікаў, паказаных на рысунках 177, *а*)—*в*).



Рыс. 177

186. Плошча трохвугольніка MNK роўна 80 см^2. Вышыня MH роўна 10 см. Знайдзіце даўжыню стараны NK.

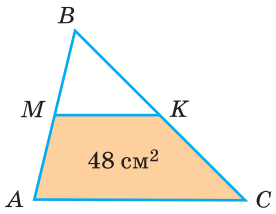
187. Знайдзіце плошчу $\triangle ABC$, калі:
а) яго вышыня BH дзеліць аснову AC на адрэзкі $AH = 3{,}4$ см, $HC = 6{,}6$ см, $\angle A = 45°$.
б) $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 30°$.

188. а) У трохвугольніку ABC вышыня AK роўна 9 см, вышыня CH роўна 6 см, $BC = 8$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AB.
б) Дзве стараны трохвугольніка роўны 4,5 м і 6 м. Вышыня, праведзеная да меншай з іх, роўна 4 м. Знайдзіце вышыню, праведзеную да большай з гэтых старон.

189. Дакажыце, што сярэдняя лінія трохвугольніка адсякае ад яго трохвугольнік, плошча якога роўна $\frac{1}{4}$ плошчы дадзенага.

Правообладатель Народная асвета

190. Дадзены трохвугольнік ABC (рыс. 178), MK — сярэдняя лінія трохвугольніка. Плошча чатырохвугольніка $AMKC$ роўна 48 см^2. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.



Рыс. 178

191. а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 8 см і 15 см.
б) У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, AC на 7 см менш за BC, $S_{ABC} = 30$ см^2. Знайдзіце BC.

192. У паралелаграме $ABCD$ O — пункт перасячэння дыяганалей, K — сярэдзіна стараны AD. Знайдзіце адносіну плошчы чатырохвугольніка $KOCD$ да плошчы паралелаграма.

193. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна 24 см. Стораны трохвугольніка адносяцца як $3 : 4 : 5$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

194. Медыяны BN і CK трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пункце M, $S_{ABC} = 60$ см^2. Знайдзіце: а) S_{AKC}; б) S_{KBM}; в) S_{BMC}; г) S_{AKMN}. Дакажыце, што пры любым значэнні S_{ABC} правільна, што $S_{BMC} = S_{AKMN}$.

195. Знайдзіце плошчу трохвугольніка (у квадратных адзінках), вяршыні якога маюць каардынаты (2; 3), (4; 7), (10; 4).

196. а) Плошча ромба роўна 450 см^2. Адна з дыяганалей ромба роўна 60 см. Знайдзіце другую дыяганаль.
б) Дыяганалі ромба з плошчай 360 см^2 адносяцца як $4 : 5$. Знайдзіце меншую дыяганаль ромба.

197. Дакажыце, што плошчу квадрата можна знайсці па формуле $S = \frac{d^2}{2}$, дзе d — дыяганаль квадрата.

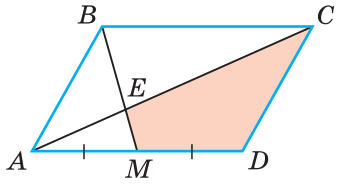
198. У акружнасці, радыус якой 8 см, праведзены два ўзаемна перпендыкулярныя дыяметры. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка, вяршыні якога супадаюць з канцамі дыяметраў.

199. Дакажыце, што калі дыяганалі d_1 і d_2 выпуклага чатырохвугольніка ўзаемна перпендыкулярныя, то яго плошча $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.

200. Перыметр ромба роўны 32 см, здабытак даўжынь дыяганалей ромба роўны 96 см^2. Знайдзіце вышыню ромба.

201*. Вышыні трохвугольніка адносяцца як $h_a : h_b : h_c = 2 : 3 : 4$, перыметр роўны 260 см. Знайдзіце стораны a, b, c трохвугольніка.

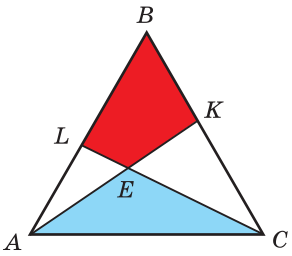
202*. Пункт M — сярэдзіна стараны AD паралелаграма $ABCD$ (рыс. 179). Плошча паралелаграма роўна 120 см^2. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $MECD$.



Рыс. 179

Правообладатель Народная асвета

203*. На рысунку 180 трохвугольнік ABC роўнастаронні, плошчы чырвонага чатырохвугольніка і сіняга трохвугольніка роўныя. Дакажыце, што $BL = CK$. Знайдзіце велічыню вугла KEC.

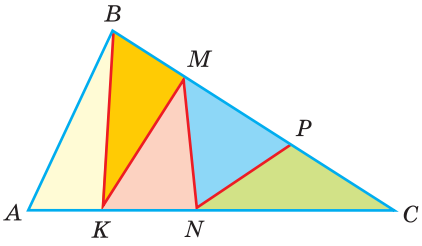


Рыс. 180

204*. Знайдзіце геаметрычнае месца вяршынь трохвугольнікаў, якія маюць агульную аснову a і роўныя плошчы S, калі гэтыя вяршыні процілеглыя дадзенай аснове.

Гімнастыка розуму

Як у трохвугольніку ABC трэба правесці ломаную $BKMNP$, каб ён разбіўся на пяць роўных па плошчы трохвугольнікаў (рыс. 181)?



Рыс. 181

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Формулы плошчы: квадрата, прамавугольніка, паралелаграма, трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, ромба.
2. Формулу вышыні прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы.
3. Уласцівасць плошчаў трохвугольнікаў з агульнай вышынёй.
4. Уласцівасць медыяны адносна плошчы трохвугольніка.

Умеем

1. Выводзіць формулы плошчы: прамавугольніка, паралелаграма, трохвугольніка, ромба.
2. Выводзіць формулу вышыні прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы.
3. Даказваць, што медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі.

Рэальная геаметрыя

Трэба пафарбаваць дом, паказаны на рысунку. Фундамент дома ўяўляе сабой квадрат са стараной 6 м. У доме ёсць: 5 малых вокнаў з памерамі 1 м 50 см × 80 см, два вялікія вокны з памерамі 2 м 50 см × 80 см і дзверы з памерамі 2 м × 0,8 м.

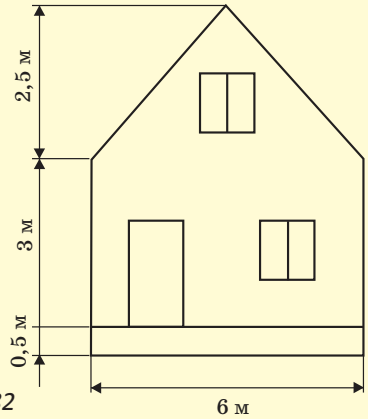
Па памерах, пазначаных на чарцяжы (рыс. 182), вызначыце:

а) агульную плошчу той часткі сцен дома, якую трэба пафарбаваць;

б) колькі кілаграмаў фарбы спатрэбіцца, каб пафарбаваць сцены дома ў 2 пласты, калі на фарбаванне 1 м^2 у адзін пласт ідзе 250 г фарбы;

Правообладатель Народная асвета

в) якую аптымальную колькасць пластыкавых вёдраў фарбы неабходна купіць, калі ў будаўнічым магазіне ёсць патрэбная фарба для фасадаў па 5 л і 11 л.

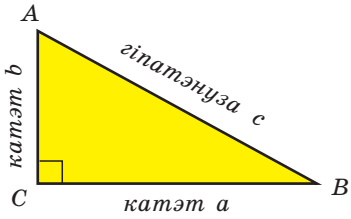


Рыс. 182

§ 16. Тэарэма Піфагора

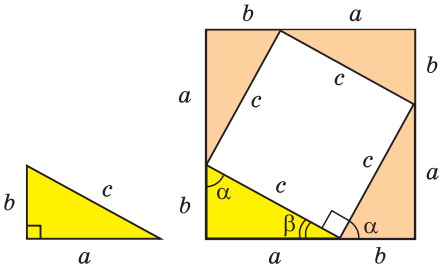
Тэарэма Піфагора гаворыць аб сувязі даўжынь катэтаў з даўжынёй гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка. Так, калі $\triangle ABC$ прамавугольны і $\angle C = 90°$ (рыс. 183), то $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Яна дазваляе, ведаючы катэты, знайсці гіпатэнузу або, ведаючы адзін з катэтаў і гіпатэнузу, знайсці другі катэт. Напрыклад, калі $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, то $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (см^2), адкуль $AB = 5$ см.

Катэты, якія ляжаць насупраць вуглоў A і B, будзем адпаведна абазначаць a і b, гіпатэнузу — c.



Рыс. 183

Тэарэма Піфагора. У прамавугольным трохвугольніку сума квадратаў катэтаў роўна квадрату гіпатэнузы, г. зн. $a^2 + b^2 = c^2$.



Рыс. 184

Доказ. Дабудуем прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b і гіпатэнузай c да квадрата са стараной $a + b$ (рыс. 184). Падзелім гэты квадрат, як паказана на рысунку, на чатыры прамавугольныя трохвугольнікі і чатырохвугольнік. Прамавугольныя трохвугольнікі роўныя па двух катэтах. Паколькі сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна 90°, то $\alpha + \beta = 90°$. Тады ва ўнут-

Правообладатель Народная асвета

ранага чатырохвугольніка ўсе стораны роўны c і ўсе вуглы прамыя. Таму гэта квадрат, і яго плошча роўна c^2.

Плошча большага квадрата, з аднаго боку, роўна квадрату яго стараны, г. зн. $S = (a + b)^2$. З другога боку, яна роўна суме плошчаў чатырох роўных прамавугольных трохвугольнікаў і плошчы ўнутранага квадрата: $S = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$. Тады $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$. Тэарэма даказана.

Вынік.

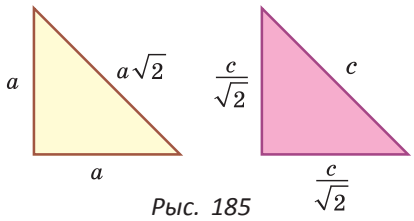
З роўнасці $a^2 + b^2 = c^2$ вынікае $a^2 = c^2 - b^2$. З улікам $a > 0$ атрымліваем $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Аналагічна, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Гавораць, што катэт роўны квадратнаму кораню з рознасці квадрата гіпатэнузы і квадрата другога катэта.

Прыклад. Калі a і b — катэты, c — гіпатэнуза і $a = 8$ см, $c = 10$ см, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

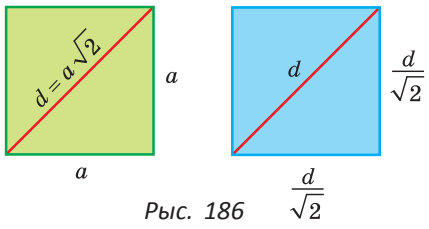
Калі дадзены раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік з катэтам a і гіпатэнузай c, то па тэарэме Піфагора $c^2 = a^2 + a^2$, $c^2 = 2a^2$, адкуль $c = a\sqrt{2}$ або $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Карысна запомніць!

Гіпатэнуза раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка з катэтам a роўна $a\sqrt{2}$. Катэт раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка з гіпатэнузай c роўны $\frac{c}{\sqrt{2}}$ (рыс. 185). Дыяганаль d квадрата са стараной a роўна $a\sqrt{2}$, старана квадрата з дыяганаллю d роўна $\frac{d}{\sqrt{2}}$ (рыс. 186).



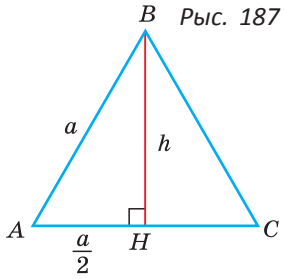
Рыс. 185



Рыс. 186

Задача. *Знайсці вышыню і плошчу роўнастаронняга трохвугольніка ABC са стараной a* (рыс. 187).

Р а ш э н н е. Няхай $BH = h$ — вышыня трохвугольніка. Паколькі ў раўнабедраным трохвугольніку вышыня, праведзеная да асновы, з'яўляецца і медыянай, то $AH = \frac{a}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка ABH па тэарэме Піфагора знаходзім:



Рыс. 187

Правообладатель Народная асвета

$h = BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тады плошча роўнастаронняга трохвугольніка $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

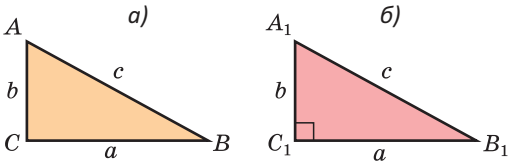
Такім чынам, для роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a і вышынёй h справядлівыя наступныя формулы:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — *вышыня роўнастаронняга трохвугольніка;*

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — *плошча роўнастаронняга трохвугольніка.*

Існуе і адваротная тэарэма Піфагора, якая дазваляе па трох дадзеных старанах трохвугольніка вызначыць, ці з'яўляецца ён прамавугольным.

Тэарэма Піфагора адваротная.
Калі ў трохвугольніку сума квадратаў дзвюх старон роўна квадрату трэцяй стараны, то гэты трохвугольнік прамавугольны, г. зн. калі для старон трохвугольніка ABC справядлівая роўнасць $a^2 + b^2 = c^2$, то $\angle C = 90°$.



Рыс. 188

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC (рыс. 188, *а*) са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ і $a^2 + b^2 = c^2$. Трэба даказаць, што $\angle C = 90°$. Разгледзім заведама прамавугольны трохвугольнік $A_1B_1C_1$ з катэтамі $B_1C_1 = a$ і $A_1C_1 = b$ (рыс. 188, *б*). Па тэарэме Піфагора $A_1B_1^2 = a^2 + b^2$. Але па ўмове $a^2 + b^2 = c^2$. Адкуль $A_1B_1 = c$. Тады $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па трох старанах і, значыць, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Тэарэма даказана.

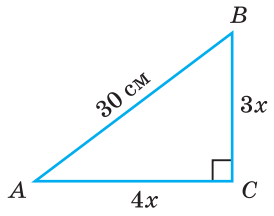
Піфагор Самаскі (IV—V стст. да н. э.) — вядомы старажытнагрэчаскі філосаф і матэматык. Ён стварыў піфагарэйскую навуковую школу, куды ўваходзілі многія матэматыкі таго часу.

Заданні да § 16

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *У прамавугольным трохвугольніку катэты адносяцца як* 3 : 4, *гіпатэнуза роўна* 30 *см. Знайсці плошчу трохвугольніка.*

Правообладатель Народная асвета

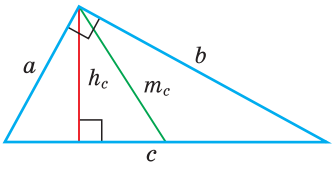


Рыс. 189

Р а ш э н н е. Няхай у трохвугольніку ABC (рыс. 189) гіпатэнуза $AB = 30$ см, $BC : AC = 3 : 4$. Абазначым $BC = 3x$ см, $AC = 4x$ см. Па тэарэме Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, адкуль $(4x)^2 + (3x)^2 = 30^2$, $16x^2 + 9x^2 = 900$, $25x^2 = 900$, $x^2 = 36$, $x = 6$. Тады $BC = 3 \cdot 6 = 18$ (см), $AC = 4 \cdot 6 = 24$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$ (см^2).

А д к а з: 216 см^2.

Задача 2. *Стораны трохвугольніка роўны 7 см, 24 см і 25 см. Знайсці: а) медыяну трохвугольніка, праведзеную да большай стараны; б) вышыню трохвугольніка, праведзеную з вяршыні большага вугла трохвугольніка.*



Рыс. 190

Р а ш э н н е. Паколькі $7^2 + 24^2 = 25^2$ $(49 + 576 = 625)$, то па тэарэме, адваротнай тэарэме Піфагора, дадзены трохвугольнік прамавугольны з катэтамі $a = 7$ см, $b = 24$ см і гіпатэнузай $c = 25$ см (рыс. 190).

а) Гіпатэнуза — найбольшая старана трохвугольніка. А медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, г. зн. $m_c = \frac{c}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$ (см).

б) Вышыню прамавугольнага трохвугольніка, праведзеную з вяршыні прамога вугла, знойдзем па вядомай формуле: $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$ (см).

А д к а з: а) 12,5 см; б) 6,72 см.

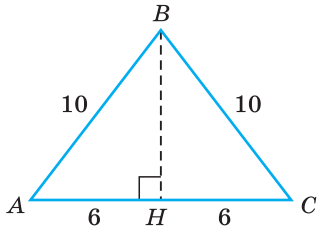
Заўвага. Прамавугольны трохвугольнік са старанамі, роўнымі 3, 4 і 5 адзінак, быў вядомы яшчэ старажытным егіпцянам. Ён называецца **егіпецкім трохвугольнікам**. Выраблены з вяроўкі трохвугольнік са старанамі, роўнымі 3, 4 і 5, нацягвалі замацаванымі ў вяршынях калкамі. Так егіпцяне будавалі на мясцовасці прамы вугал.

Тройкі цэлых лікаў, якія з'яўляюцца старанамі прамавугольнага трохвугольніка, называюцца *Піфагоравымі тройкамі*. Карысна запомніць наступныя тройкі: а) 3, 4, 5; б) 5, 12, 13; в) 7, 24, 25; г) 8, 15, 17; д) 20, 21, 29.

Памнажаючы кожную з гэтых троек на натуральны лік, можна атрымаць бясконца многа Піфагоравых троек. Напрыклад, для першай тройкі можна атрымаць наступныя: (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) і г. д.

Правообладатель Народная асвета

Задача 3. *Знайсці плошчу раўнабедранага трохвугольніка са старанамі* 10 *см*, 10 *см*, 12 *см*.



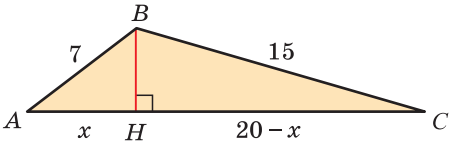
Рыс. 191

Рашэнне. Няхай у $\triangle ABC$ $AB = BC =$ $= 10$ см, $AC = 12$ см (рыс. 191). Правядзём вышыню BH. Паколькі вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца медыянай, то $AH =$ $= HC = 6$ см. Па тэарэме Піфагора для $\triangle ABH$: $AH^2 + BH^2 = AB^2$, $6^2 + BH^2 = 10^2$, $BH = \sqrt{64} = 8$ (см).

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2).

Адказ: 48 см^2.

Задача 4*. *Знайсці вышыню трохвугольніка са старанамі, роўнымі* 7 *см*, 15 *см*, 20 *см*, *праведзеную да большай стараны*.



Рыс. 192

Рашэнне. У $\triangle ABC$ $AB = 7$ см, $BC = 15$ см, $AC = 20$ см (рыс. 192). Апусцім вышыню BH. Абазначым $AH = x$ см, $HC = (20 - x)$ см. Па тэарэме Піфагора з прамавугольных трохвугольнікаў ABH і CBH атрымаем: $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 7^2 - x^2$, $BH^2 = BC^2 - HC^2 =$ $= 15^2 - (20 - x)^2$. Адсюль $7^2 - x^2 = 15^2 -$ $- (20 - x)^2$, $(20 - x)^2 - x^2 = 15^2 - 7^2$. Рашыўшы ўраўненне, знойдзем $x = 5{,}6$. Такім чынам, $AH = 5{,}6$ см, $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - 5{,}6^2} = 4{,}2$ (см).

Адказ: 4,2 см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

205. Ведаючы катэты a і b прамавугольнага трохвугольніка, знайдзіце гіпатэнузу c:

а) $a = 9$ см, $b = 12$ см;

б) $a = 1$ см, $b = 2$ см;

в) $a = \sqrt{12}$ дм, $b = \sqrt{13}$ дм;

г) $a = (\sqrt{7} - 1)$ м, $b = (\sqrt{7} + 1)$ м.

206. У прамавугольнага трохвугольніка катэты a і b, гіпатэнуза c. Знайдзіце катэт b, калі:

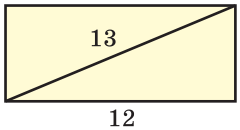
а) $a = 6$ см, $c = 10$ см;

б) $a = 24$ м, $c = 25$ м;

в) $a = 3$ см, $c = 6$ см;

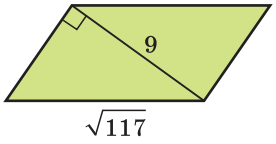
г) $a = 3\sqrt{2}$ дм, $c = 2\sqrt{7}$ дм.

207. Старана прамавугольніка роўна 12 см, а дыяганаль — 13 см (рыс. 193). Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

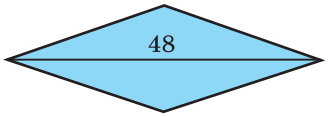


Рыс. 193

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 194



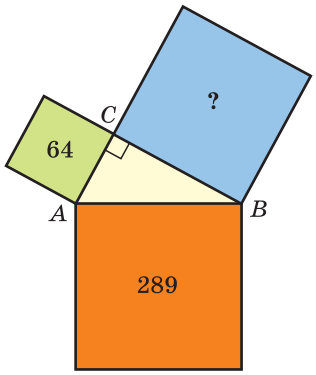
Рыс. 195

208. Дыяганаль паралелаграма роўна 9 см і перпендыкулярна да старана паралелаграма. Другая старана паралелаграма роўна $\sqrt{117}$ см (рыс. 194). Знайдзіце плошчу паралелаграма.

209. Знайдзіце плошчу ромба, калі:

а) яго перыметр роўны 100 см, а адна з дыяганалей — 48 см (рыс. 195);
б) яго старана 13 см, а адна з дыяганалей — 10 см.

210. На старанах прамавугольнага трохвугольніка пабудаваны квадраты (рыс. 196). Плошча квадрата, пабудаванага на адным катэце, роўна 64 см^2, плошча квадрата, пабудаванага на гіпатэнузе, роўна 289 см^2. Знайдзіце плошчу квадрата, пабудаванага на другім катэце.



Рыс. 196

211. Вызначыце, ці з'яўляецца трохвугольнік прамавугольным, калі яго стораны:

а) 20 мм, 21 мм, 29 мм;
б) 5 м, 6 м, 7 м;
в) $\sqrt{2}$ см, $\sqrt{3}$ см, $\sqrt{5}$ см.

212. Знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:

а) 6 см, 8 см, 10 см;
б) 1,6 дм, 3 дм, 3,4 дм;
в) $\sqrt{2}$ м, $\sqrt{8}$ м, $\sqrt{10}$ м.

213. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік. Знайдзіце:

а) вышыню і плошчу трохвугольніка, калі яго старана роўна 4 см;
б) перыметр і вышыню трохвугольніка, калі яго плошча $16\sqrt{3}$ см^2.

214. Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка, у якога:

а) аснова 100 м, бакавая старана 130 м;
б) вышыня 24 дм, бакавая старана 25 дм;
в) аснова a, бакавая старана b.

215. а) Сума катэтаў прамавугольнага трохвугольніка роўна 21 м, гіпатэнуза — 15 м. Знайдзіце катэты.

Правообладатель Народная асвета

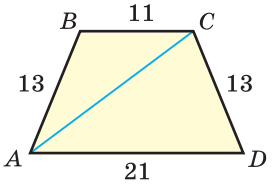
б) Адзін з катэтаў прамавугольнага трохвугольніка на 2 см большы за другі катэт і на 2 см меншы за гіпатэнузу. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

216. $ABCD$ — трапецыя (рыс. 197). Знайдзіце:

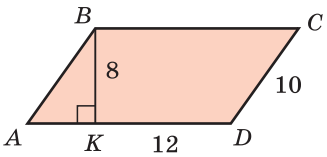
а) вышыню трапецыі; б) дыяганаль AC.

217. $ABCD$ — паралелаграм (рыс. 198), $KD = 12$. Знайдзіце:

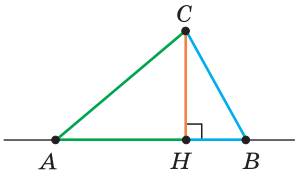
а) плошчу паралелаграма;
б) вышыню, праведзеную да стараны CD.



Рыс. 197



Рыс. 198



Рыс. 199

218. Пры дапамозе тэарэмы Піфагора, выкарыстаўшы рысунак 199, дакажыце, што калі з аднаго пункта да прамой праведзены дзве нахіленыя CA і CB, то роўным нахіленым адпавядаюць роўныя праекцыі AH і HB, большай нахіленай адпавядае большая праекцыя.

219. а) Знайдзіце плошчу квадрата з дыяганаллю, роўнай 4 см.
б) Знайдзіце дыяганаль квадрата, плошча якога роўна 50 см^2.

220. Дадзены трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см, 15 см. Знайдзіце меншую вышыню гэтага трохвугольніка.

221. Медыяны трохвугольніка ABC, праведзеныя да старон AB і BC, узаемна перпендыкулярныя і роўны 9 см і 12 см. Знайдзіце даўжыню трэцяй медыяны.

222. Дадзены адрэзак a. Выкарыстаўшы цыркуль і лінейку, пабудуйце адрэзак x, роўны $a\sqrt{2}$.

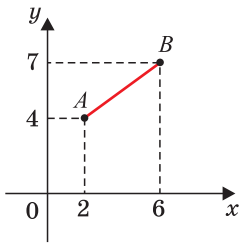
223*. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC, у якога $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, медыяна $BM = 5$ см.

224*. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, медыяны якога роўны 3 см, 4 см і 5 см.

225*. Па гіпатэнузе прамавугольнага трохвугольніка са старанамі 12 см, 16 см, 20 см рухаецца пункт. Знайдзіце, пры якім становішчы пункта сума квадратаў адлегласцей ад гэтага пункта да катэтаў будзе найменшай. Вызначыце адлегласць ад гэтага становішча пункта да вяршыні прамога вугла.

Правообладатель Народная асвета

226*. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB, паказанага на каардынатнай плоскасці (рыс. 200), дзе $A(2; 4)$, $B(6; 7)$.



Рыс. 200

227*. Дадзены адрэзкі m і n, дзе $m > n$. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце адрэзак x, калі:

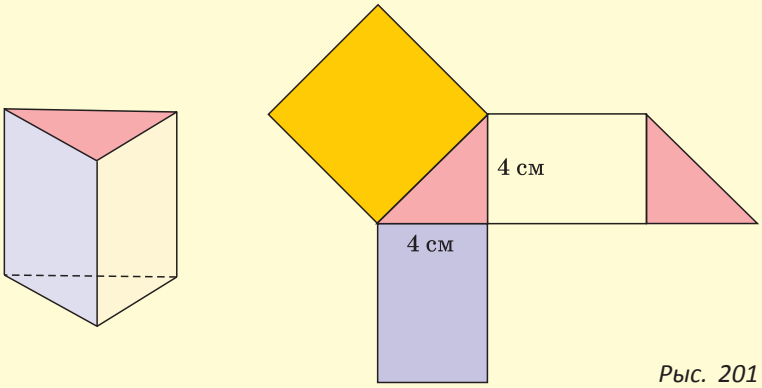
а) $x = \sqrt{m^2 + n^2}$; б) $x = \sqrt{m^2 - n^2}$.

Геаметрыя 3D

На рысунку 201 паказана прамая трохвугольная прызма, асновай якой з'яўляецца раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік з катэтамі, роўнымі па 4 см, і разгортка гэтай прызмы. Большая па плошчы бакавая грань прызмы з'яўляецца квадратам.

Вырабіце са шчыльнай паперы паказаную на рысунку разгортку і складзіце з яе дадзеную прызму. Замацуйце злучаемыя краі палоскамі паперы.

Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы (яна роўна суме плошчаў бакавых граней). Знайдзіце плошчу асновы прызмы. Чаму роўна плошча ўсёй паверхні прызмы (*поўная паверхня прызмы*)?



Рыс. 201

Рэальная геаметрыя

Вызначыце прыкладную даўжыню драбін, што дастануць да акна другога паверха дома, паказанага на рысунку, калі адлегласць ад гэтага акна да зямлі 6 м, а адлегласць ад фундамента дома да асновы драбін роўна 3 м.

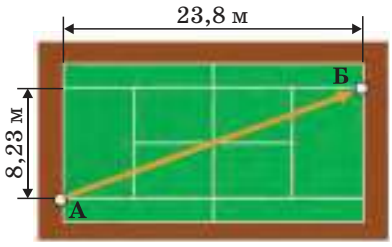
Падлічыце, колькі прыкладна пагонных метраў бруска пойдзе на выраб такіх драбін, калі ў іх 18 прыступак і шырыня драбін роўна 50 см.

Мадэляванне

Вялікі тэніс з'яўляецца ў Беларусі папулярным відам спорту. Нашы спартсмены Вікторыя Азаранка і Максім Мірны з'яўляюцца тэнісістамі сусветнага ўзроўню, алімпійскімі чэмпіёнамі.

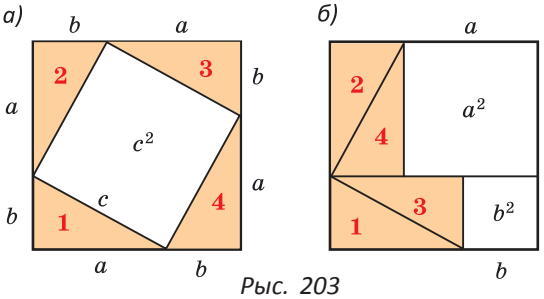
Правообладатель Народная асвета

Задача. Падчас падачы тэнісны мяч можа дасягаць скорасці 180 км/г. Выкарыстаўшы памеры, пазначаныя на рысунку 202, вызначыце ў секундах час, за які мяч з пункта А падзе ў пункт Б, рухаючыся па прамой з азначанай скорасцю. Пры разліках карыстайцеся калькулятарам.



Рыс. 202

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце: 1) на якім востраве жыў Піфагор; 2) якое дачыненне Піфагор меў да музыкі; 3) колькі доказаў тэарэмы Піфагора вядома на сённяшні дзень.



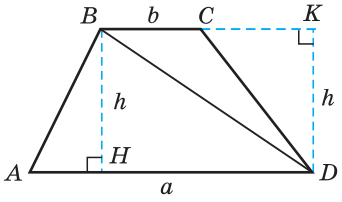
Рыс. 203

Разгледзім яшчэ адзін доказ тэарэмы Піфагора.

На рысунку 203, *а*) незанятая зафарбаванымі прамавугольнымі трохвугольнікамі частка большага квадрата па плошчы роўна c^2. Сумясціўшы трохвугольнікі 3 і 1, 4 і 2 гіпатэнузамі (рыс. 203, *б*), атрымаем, што цяпер незанятая імі плошча роўна $a^2 + b^2$. Адсюль вынікае, што $c^2 = a^2 + b^2$.

§ 17. Плошча трапецыі

Тэарэма. **Плошча трапецыі роўна здабытку паўсумы асноў на вышыню, г. зн.** $S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



Рыс. 204

Доказ. Дыяганаль BD разбівае трапецыю $ABCD$ на два трохвугольнікі: $\triangle ABD$ і $\triangle BCD$ (рыс. 204). Вышыні BH і DK гэтых трохвугольнікаў роўны вышыні h трапецыі.

Тады $S_{тр} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

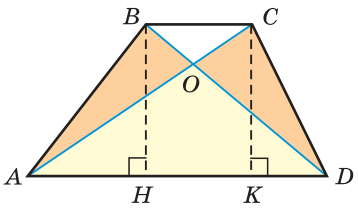
Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

Вынік.

Паколькі сярэдняя лінія трапецыі $m = \frac{a+b}{2}$, *то плошчу трапецыі можна знайсці па формуле* $S_{тр} = mh$.

Задача. *Даказаць, што плошчы трохвугольнікаў, абмежаваных дзвюма дыяганалямі і бакавой стараной трапецыі, роўныя.*



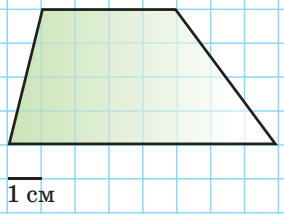
Рыс. 205

Доказ. Трэба даказаць, што $\triangle AOB$ і $\triangle COD$ роўнавялікія (рыс. 205). Заўважым, што $\triangle ABD$ і $\triangle ACD$ роўнавялікія, паколькі ў іх аснова AD — агульная, а вышыні BH і CK роўныя як адлегласці паміж паралельнымі прамымі AD і BC. Адняўшы ад плошчы кожнага з гэтых трохвугольнікаў плошчу $\triangle AOD$, атрымаем, што $S_{AOB} = S_{COD}$. Што і трэба было даказаць.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

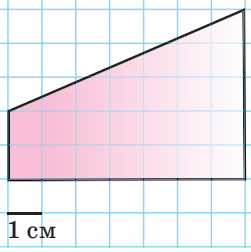
Тэст 1

Знайдзіце плошчу трапецыі, паказанай на рысунку.



Тэст 2

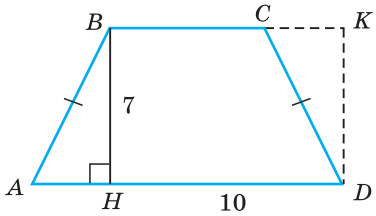
Знайдзіце плошчу трапецыі, паказанай на рысунку.



Заданні да § 17

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Дадзена раўнабедраная трапецыя* $ABCD$ (рыс. 206), $BH = 7$ *см* — *вышыня трапецыі,* $HD = 10$ *см. Знайсці плошчу трапецыі.*



Рыс. 206

Рашэнне. *Спосаб* 1. Перанясём прамавугольны трохвугольнік ABH на месца трохвугольніка CKD (гл. рыс. 206). У чатырохвугольніка $HBKD$ усе вуглы прамыя, таму гэта прамавугольнік. Плошча прамавугольніка $HBKD$ роўна плошчы трапецыі $ABCD$, паколькі прамавугольнік і трапецыя складаюцца з роўных фігур. Тады $S_{ABCD} = S_{HBKD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70$ (см^2).

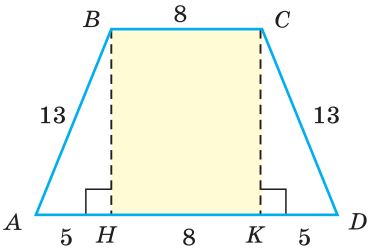
Правообладатель Народная асвета

Заўвага. Падумайце, адкуль вынікае, што $\angle KCD + \angle DCB = 180°$.

Спосаб 2. Згодна з ключавой задачай **2** § 10 для раўнабедранай трапецыі $HD = \frac{a+b}{2}$. Інакш кажучы, адрэзак HD роўны сярэдняй лініі трапецыі. Тады $S_{ABCD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70$ (см^2).

Адказ: 70 см^2.

Задача 2. *У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ з асновамі AD і BC $AD = 18$ см, $BC = 8$ см, $AB = 13$ см. Знайсці плошчу трапецыі.*

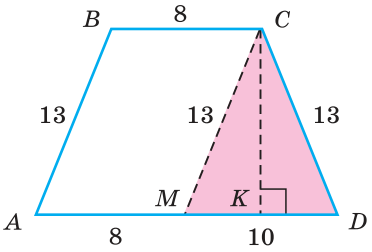


Рыс. 207

Рашэнне. *Спосаб* 1. Правядзём вышыні BH і CK (рыс. 207). Трохвугольнікі ABH і DCK роўныя па катэце ($BH = CK$) і гіпатэнузе ($AB = CD$). Адкуль $AH = KD$. У чатырохвугольніка $HBCK$ усе вуглы прамыя, таму гэта — прамавугольнік. Тады $HK = BC = 8$ см, $AH = \frac{1}{2}(AD - HK) = \frac{1}{2}(18 - 8) = 5$ (см).

З трохвугольніка ABH па тэарэме Піфагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ (см). Плошча трапецыі

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{18 + 8}{2} \cdot 12 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$



Рыс. 208

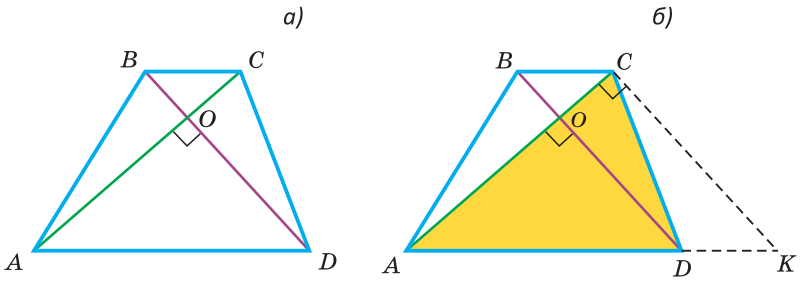
Спосаб 2. Правядзём $CM \parallel AB$ (рыс. 208). Паколькі $BC \parallel AM$, то $ABCM$ — паралелаграм. У паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, адкуль $AM = BC = 8$ см, $CM = AB = 13$ см. Тады $MD = AD - AM = 10$ см. Трохвугольнік MCD — раўнабедраны. Яго вышыня CK будзе і вышынёй трапецыі. Паколькі вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца і медыянай, то $KD = MK = 5$ см. З прамавугольнага трохвугольніка CKD па тэарэме Піфагора $CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Атрымліваем $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{18 + 8}{2} \cdot 12 = 156$ (см^2).

Адказ: 156 см^2.

Задача 3. *Дыяганалі BD і AC трапецыі $ABCD$* (рыс. 209, *а*) *перпендыкулярныя і роўны* 8 *см і* 10 *см. Знайсці плошчу трапецыі.*

Рашэнне. *Спосаб* 1. Правядзём $CK \parallel BD$ (рыс. 209, *б*). Паколькі $BC \parallel DK$, то $DBCK$ — паралелаграм. Таму $DK = BC$, $CK = BD = 8$ см. Акрамя таго, $\angle ACK = \angle AOD = 90°$ як адпаведныя вуглы пры паралельных пра-

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 209

мых і сякучай. Заўважым, што плошча трапецыі $ABCD$ роўна плошчы трохвугольніка ACK. Сапраўды, трохвугольнік ACD для гэтых фігур з'яўляецца агульным, а трохвугольнікі ABC і CDK роўнавялікія, паколькі ў іх роўныя асновы BC і DK і вышыні, праведзеныя да іх.

$S_{ABCD} = S_{ACK} = \frac{AC \cdot CK}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40$ (см^2).

Спосаб 2. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC(BO + OD) =$ $= \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$ (см^2). Інакш кажучы, плошча выпуклага чатырохвугольніка, у якога дыяганалі перпендыкулярныя, роўна палавіне здабытку дыяганалей.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

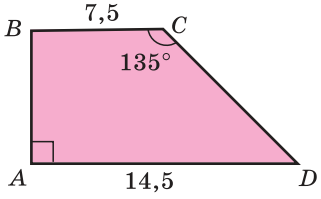
228. а) Знайдзіце плошчу трапецыі з асновамі 14 см і 9 см і вышынёй 6 см.
б) Знайдзіце вышыню трапецыі з плошчай 96 см^2 і асновамі, роўнымі 5 см і 11 см.
в) Меншая аснова трапецыі роўна 6 см, вышыня 8 см, плошча 80 см^2. Знайдзіце большую аснову трапецыі.

229. Знайдзіце плошчу прамавугольнай трапецыі, у якой:
а) асновы 32 см і 18 см, меншая бакавая старана роўна 14 см;
б) асновы 2 см і 6 см, большая бакавая старана 5 см.

230. Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі $ABCD$ з бакавой стараной, роўнай 17 см, і асновамі 10 см і 26 см.

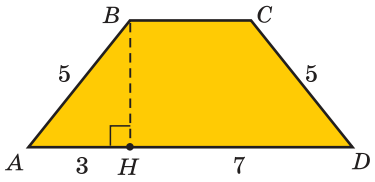
231. Вышыня трапецыі h, сярэдняя лінія m, плошча S.
а) $h = 12$ см, $S = 72$ см^2. Знайдзіце m.
б) $m = 9$ см, $S = 36$ см^2. Знайдзіце h.

232. У трапецыі $ABCD$ (рыс. 210) $\angle A = 90°$, $AD = 14{,}5$ см, $BC = 7{,}5$ см і $\angle C = 135°$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

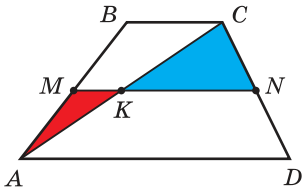


Рыс. 210

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 211



Рыс. 212

233. Бакавая старана раўнабедранай трапецыі $ABCD$ роўна 5 см (рыс. 211), яе вышыня BH дзеліць аснову AD на адрэзкі $AH = 3$ см, $HD = 7$ см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

234. Дадзена трапецыя $ABCD$, MN — яе сярэдняя лінія (рыс. 212). Сума плошчаў трохвугольнікаў AMK і CKN роўна 32 см^2. Знайдзіце плошчу трапецыі $ABCD$.

235. Знайдзіце плошчу прамавугольнай трапецыі з вуглом 60°, калі:

а) асновы трапецыі роўны 4 см і 10 см;

б) большая аснова роўна 8 см, вышыня трапецыі роўна $4\sqrt{3}$ см.

236. Асновы трапецыі a і b, бакавыя стораны c і d. Знайдзіце плошчу трапецыі, калі:

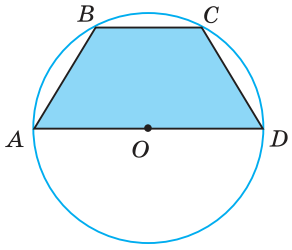
а) $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см, $d = 5$ см;
б) $a = 8$ см, $b = 3$ см, $c = 3$ см, $d = 4$ см.

237. Знайдзіце плошчу трапецыі з асновамі a і b і дыяганалямі d_1 і d_2, калі:

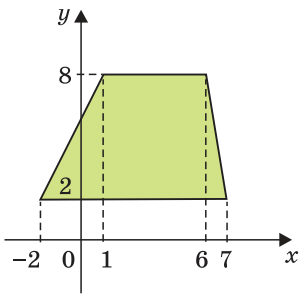
а) $d_1 = d_2 = 15$ см, $a = 8$ см, $b = 12$ см;
б) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 5$ см, $a = 9$ см, $b = 4$ см.

238. Вяршыні раўнабедранай трапецыі $ABCD$ з асновамі BC і AD ляжаць на акружнасці, AD — дыяметр (рыс. 213). Знайдзіце вышыню і плошчу трапецыі, калі $BC = 12$ см і $AD = 20$ см.

239. Знайдзіце плошчу трапецыі, відарыс якой паказаны на каардынатнай плоскасці (рыс. 214).

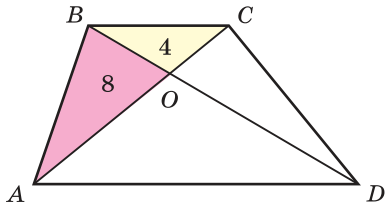


Рыс. 213

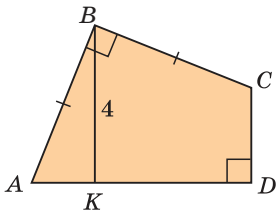


Рыс. 214

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 215



Рыс. 216

240*. Дыяганалі AC і BD трапецыі $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O, $S_{BOC} = 4$ см^2, $S_{AOB} = 8$ см^2 (рыс. 215). Знайдзіце плошчу трапецыі.

241*. Бакавая старана раўнабедранай трапецыі роўна 4 см, вугал пры аснове роўны 60°, дыяганаль трапецыі перпендыкулярна да бакавой стараны. Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў, на якія дыяганаль дзеліць трапецыю (у адказе запішыце адносіну меншай плошчы да большай).

242*. У трапецыі $ABCD$ бакавая старана $AB = 8$ см, адлегласць ад сярэдзіны бакавой стараны CD да прамой AB роўна 10 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

243*. У чатырохвугольніку $ABCD$ $AB = BC$, вуглы B і D — прамыя (рыс. 216). Перпендыкуляр BK да прамой AD роўны 4 см. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ABCD$.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму Піфагора.
2. Тэарэму, адваротную тэарэме Піфагора.
3. Як знайсці дыяганаль квадрата па яго старане. Як знайсці старану квадрата па яго дыяганалі.
4. Формулу плошчы трапецыі.

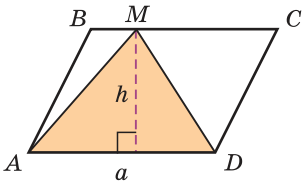
Умеем

1. Даказваць тэарэму Піфагора.
2. Выводзіць формулу плошчы трапецыі.

Правообладатель Народная асвета

§ 18*. Рашэнне задач па тэме «Плошчы многавугольнікаў»

Задача 1. *Знайсці плошчу паралелаграма ABCD, калі плошча трохвугольніка AMD, дзе M ∈ BC, роўна 16 см².*



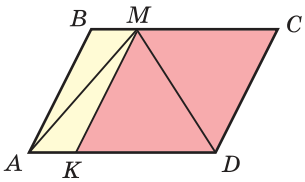
Рыс. 217

Рашэнне. Разгледзім тры прынцыпова розныя спосабы рашэння гэтай задачы.

Спосаб 1. (Алгебраічны — работа з формуламі і ўраўненнямі.)

У $\triangle AMD$ з вяршыні M да асновы $AD = a$ правядзём вышыню h, якая будзе і вышынёй паралелаграма $ABCD$ (рыс. 217). Тады

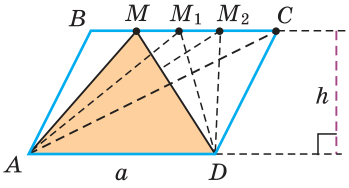
$$S_{AMD} = \frac{1}{2}ah,\ S_{ABCD} = ah = 2S_{AMD} = 2 \cdot 16 = 32\ (\text{см}^2).$$



Рыс. 218

Спосаб 2. (Геаметрычны — разбіццё фігуры.)

Правядзём $MK \parallel AB$ (рыс. 218). Атрымаем два паралелаграмы: $ABMK$ і $KMCD$. Дыяганалі AM і MD дзеляць гэтыя паралелаграмы на два адпаведна роўныя трохвугольнікі: жоўтыя трохвугольнікі роўныя і чырвоныя трохвугольнікі роўныя. Паралелаграм складаецца з двух жоўтых і двух чырвоных трохвугольнікаў, а трохвугольнік AMD — з аднаго жоўтага і аднаго чырвонага трохвугольнікаў. Такім чынам, плошча трохвугольніка AMD роўна палавіне плошчы паралелаграма. Адсюль $S_{ABCD} = 2S_{AMD} = 32\ (\text{см}^2)$.



Рыс. 219

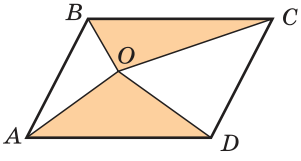
Спосаб 3. (Геаметрычны — рух пункта.)

Пры руху пункта M па прамой BC (рыс. 219) будзем атрымліваць роўнавялікія трохвугольнікі: $S_{AMD} = S_{AM_1D} = S_{AM_2D} = \ldots = S_{ACD}$. Ва ўсіх гэтых трохвугольнікаў будзе агульная аснова a і вышыні, роўныя h (як адлегласці паміж паралельнымі прамымі AD і BC). Тады $S_{ACD} = S_{AMD} = 16\ (\text{см}^2)$. Паколькі дыяганаль AC дзеліць паралелаграм на два роўныя трохвугольнікі, то $S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, таму $S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 32\ (\text{см}^2)$.

Адказ: 32 см².

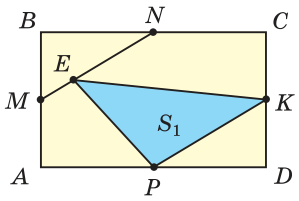
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

244. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$ (рыс. 220), калі сума плошчаў трохвугольнікаў AOB і COD роўна 24 см².

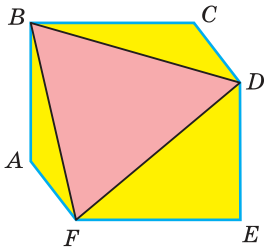


Рыс. 220

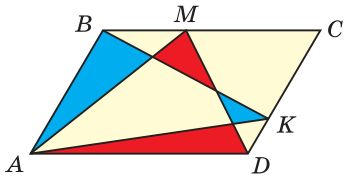
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 221



Рыс. 222



Рыс. 223

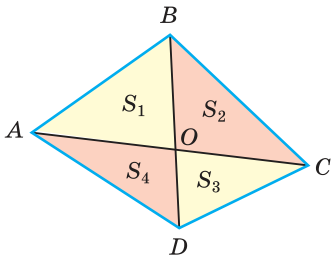
245. Дадзены квадрат $ABCD$. Пункты M і K — сярэдзіны старон AD і CD адпаведна. Дыяганаль AC перасякае адрэзкі BM і BK у пунктах G і F адпаведна. Знайдзіце, якую частку плошчы квадрата складае плошча трохвугольніка GBF.

246. На рысунку 221 пункты M, N, K і P — сярэдзіны старон прамавугольніка. Знайдзіце, колькі працэнтаў складае плошча S_1 трохвугольніка PEK ад плошчы S прамавугольніка $ABCD$.

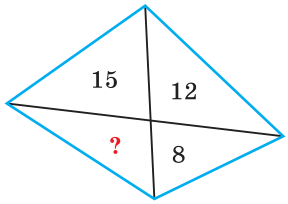
247*. У шасцівугольніка $ABCDEF$ процілеглыя стораны роўныя і паралельныя (рыс. 222): $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = FE$, $BC \parallel FE$, $AF = CD$, $AF \parallel CD$. Плошча шасцівугольніка роўна 60 см^2. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BDF.

248*. Дакажыце, што калі $ABCD$ паралелаграм (рыс. 223), то сума плошчаў чырвоных частак роўна суме плошчаў сініх частак.

249*. Дакажыце, што плошча чатырохвугольніка, вяршыні якога з'яўляюцца сярэдзінамі старон дадзенага выпуклага чатырохвугольніка, роўна палавіне плошчы дадзенага.



Рыс. 224



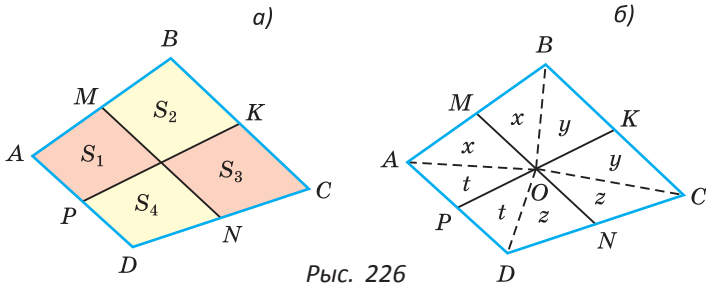
Рыс. 225

Задача 2. *Выпуклы чатырохвугольнік $ABCD$ падзелены дыяганалямі на чатыры трохвугольнікі (рыс. 224). Даказаць, што здабыткі плошчаў процілеглых трохвугольнікаў роўныя, г. зн. $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.* Доказ. Трохвугольнікі ABO і CBO маюць агульную вышыню, праведзеную з вяршыні B. Таму іх плошчы адносяцца як асновы, г. зн. $\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$. Аналагічна $\frac{S_{ADO}}{S_{CDO}} = \frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$. Адсюль $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Што і трэба было даказаць.

Прыклад. Калі $S_1 = 15$ см^2, $S_2 = 12$ см^2, $S_3 = 8$ см^2 (рыс. 225), то, выкарыстаўшы формулу $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, атрымаем $S_4 \cdot 12 = 15 \cdot 8$, адкуль $S_4 = \frac{15 \cdot 8}{12} = 10$ (см^2).

Правообладатель Народная асвета

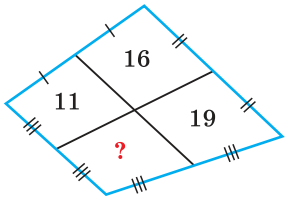
Задача 3. *Выпуклы чатырохвугольнік падзелены сярэднімі лініямі (адрэзкамі, якія злучаюць сярэдзіны яго процілеглых старон) на чатыры чатырохвугольнікі* (рыс. 226, *а*). *Даказаць, што сумы плошчаў процілеглых чатырохвугольнікаў роўныя, г. зн.* $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.



Рыс. 226

Доказ. Злучым пункт O перасячэння сярэдніх ліній MN і PK з вяршынямі A, B, C, D (рыс. 226, *б*). У трохвугольніку AOB адрэзак OM — медыяна. Медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі. Таму $S_{AOM} = S_{BOM} = x$. Аналагічна, $S_{BOK} = S_{COK} = y$, $S_{CON} = S_{DON} = z$, $S_{POA} = S_{POD} = t$. Паколькі $S_1 + S_3 = x + t + y + z$, $S_2 + S_4 = x + y + z + t$, то $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$. Што і трэба было даказаць.

Прыклад. Калі $S_1 = 11$ см^2, $S_2 = 16$ см^2, $S_3 = 19$ см^2 (рыс. 227), то, выкарыстаўшы формулу $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, атрымаем $11 + 19 = 16 + S_4$, адкуль $S_4 = 11 + 19 - 16 = 14$ (см^2).



Рыс. 227

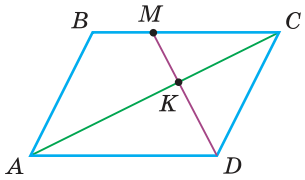
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

250. Дадзена трапецыя $ABCD$, у якой $BC \parallel AD$, O — пункт перасячэння дыяганалей, $S_{AOD} = 27$ см^2, $S_{BOC} = 3$ см^2. Знайдзіце S_{ABCD}.

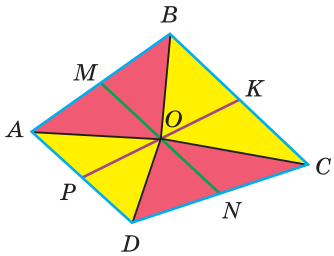
251. Дадзена трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC. Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце O. Вядома, што $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Выразіце плошчу трапецыі праз S_1 і S_2.

252. Дадзены паралелаграм $ABCD$ (рыс. 228), $S_{KMC} = 9$ см^2, $S_{KCD} = 15$ см^2. Знайдзіце плошчу паралелаграма.

253*. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ праведзены сярэднія лініі MN і PK (рыс. 229). Дакажыце, што сума плошчаў чырвоных трохвугольнікаў роўна суме плошчаў жоўтых трохвугольнікаў.



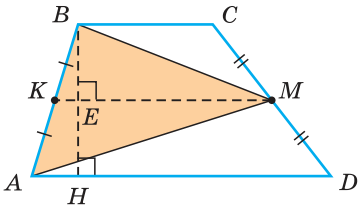
Рыс. 228



Рыс. 229

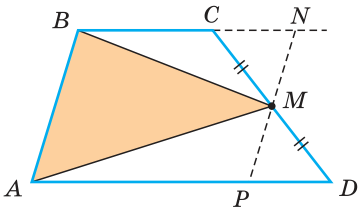
Правообладатель Народная асвета

Задача 4. *У трапецыі $ABCD$ пункт M — сярэдзіна бакавой стараны CD. Даказаць, што плошча трохвугольніка ABM роўна палавіне плошчы трапецыі $ABCD$.*



Рыс. 230

Доказ. *Спосаб* 1. Правядзём у трапецыі сярэднюю лінію KM і вышыню BH (рыс. 230). Сярэдняя лінія трапецыі паралельна асновам, значыць, $KM \parallel AD$. Па ўласцівасці паралельных прамых $BE \perp KM$, адкуль BE — вышыня трохвугольніка KBM. Па тэарэме Фалеса $BE = EH = \frac{1}{2}BH$. Адсюль $S_{KBM} = \frac{1}{2}KM \cdot BE$. Але KM — медыяна трохвугольніка ABM. А медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі. Таму $S_{ABM} = 2S_{KBM} = 2 \cdot \frac{1}{2}KM \cdot BE = KM \cdot \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.



Рыс. 231

Спосаб 2. Правядзём праз пункт M прамую PN, паралельную AB (рыс. 231). З прычыны роўнасці трохвугольнікаў CMN і DMP (па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў). Плошча трапецыі $ABCD$ роўна плошчы паралелаграма $ABNP$, а плошча трохвугольніка ABM роўна палавіне плошчы паралелаграма $ABNP$ (гл. задачу 1 дадзенага параграфа).

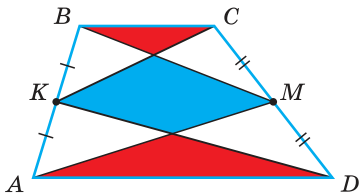
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

254. $ABCD$ — трапецыя ($AD \parallel BC$), M — сярэдзіна стараны AB. N — сярэдзіна стараны CD, $S_{MBC} = S_1$, $S_{AND} = S_2$, $S_{AMCN} = S_3$. Дакажыце, што $S_3 = S_1 + S_2$.

255. У трапецыі $ABCD$ пункт K належыць аснове AD, пункт M — аснове BC, $S_{AMD} + S_{BKC} = 36$ см^2. Знайдзіце плошчу трапецыі.

256. Асновы BC і AD трапецыі $ABCD$ адносяцца як $2 : 5$, $S_{ABC} = 18$ см^2. Знайдзіце плошчу трапецыі.

257*. У трапецыі $ABCD$ пункты K і M — сярэдзіны бакавых старон AB і CD адпаведна (рыс. 232). Дакажыце, што плошча сіняга чатырохвугольніка роўна суме плошчаў чырвоных трохвугольнікаў.



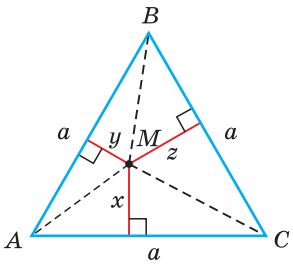
Рыс. 232

Правообладатель Народная асвета

Метад плошчаў

Пры рашэнні некаторых геаметрычных задач, умовы якіх не звязаны з плошчай непасрэдна, выкарыстоўваюць уласцівасці плошчаў. Такі метад рашэння называецца *метадам плошчаў*.

Задача 5. *Даказаць, што сума адлегласцей ад любога пункта, адзначанага ўнутры роўнастаронняга трохвугольніка, да яго старон ёсць велічыня пастаянная, г. зн.* $x + y + z = const$*.



Рыс. 233

Доказ. Няхай $AB = BC = AC = a$; x, y, z — перпендыкуляры, апушчаныя з пункта M на стораны трохвугольніка (рыс. 233). Злучым пункт M з вяршынямі трохвугольніка адрэзкамі. Трохвугольнік падзеліцца на тры трохвугольнікі: $\triangle AMC$, $\triangle AMB$, $\triangle BMC$, сума плошчаў якіх роўна плошчы $\triangle ABC$. Плошча $\triangle ABC$, з аднаго боку, роўна $\frac{1}{2}ah$ (дзе h — вышыня), а з другога боку, яна роўна $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$. Тады $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah$. Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на $\frac{1}{2}a$, атрымаем $x + y + z = h$. Інакш кажучы, сума зададзеных адлегласцей роўна даўжыні вышыні роўнастаронняга трохвугольніка, якая для дадзенага трохвугольніка ёсць велічыня пастаянная. Што і трэба было даказаць.

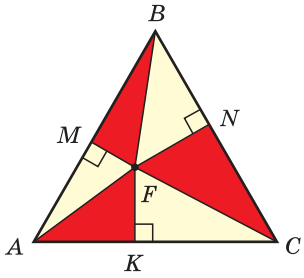
* Пастаянная велічыня (канстанта) у агульным выглядзе абазначаецца літарай «*c*» або лацінскім словам «const». У прыватнасці, імя Канстанцін са старажытнагрэчаскага азначае «пастаянны».

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

258. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC. На яго аснове AC адзначаны пункт M. Дакажыце, што сума даўжынь перпендыкуляраў, апушчаных з пункта M на бакавыя стораны трохвугольніка, ёсць велічыня пастаянная для дадзенага трохвугольніка.

259. Дакажыце метадам плошчаў уласцівасць бісектрысы трохвугольніка: «Бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам».

260*. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні (рыс. 234). З пункта F, адзначанага ўнутры трохвугольніка ABC, на яго стораны апушчаны перпендыкуляры FM, FK, FN. Дакажыце, што сума плошчаў чырвоных трохвугольнікаў роўна суме плошчаў жоўтых трохвугольнікаў.

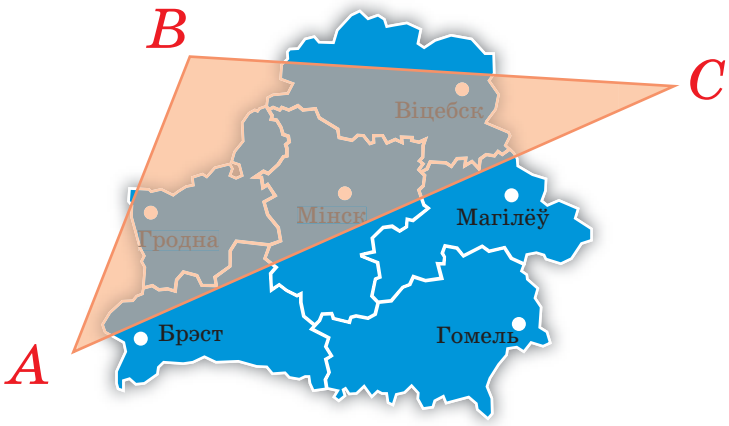


Рыс. 234

Правообладатель Народная асвета

Гімнастыка розуму

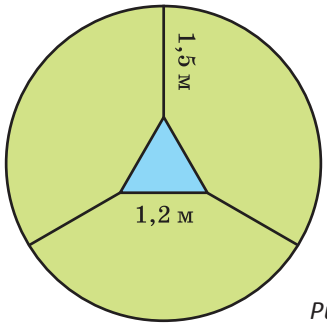
Ці існуе трохвугольнік, усе тры вышыні якога меншыя за 1 см, а плошча большая за плошчу Беларусі, якая складае 207 595 км^2?



Мадэляванне

Супермаркет мае шкляныя дзверы, якія верцяцца. У аснове дзвярэй знаходзіцца круг. У цэнтры гэтага круга размешчаны роўнастаронні трохвугольнік са стараной 1,2 м. З вяршынь трохвугольніка выходзяць перамычкі даўжынёй 1,5 м уздоўж радыусаў, як паказана на рысунку 235.

Задача. *Знайдзіце прыкладны дыяметр асновы гэтых дзвярэй з дакладнасцю да* 0,01 м.

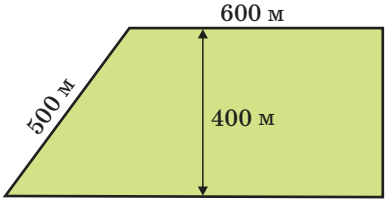


Рыс. 235

Рэальная геаметрыя

Трактару «Беларус» трэба ўзараць поле ў форме чатырохвугольніка з памерамі, пазначанымі на рысунку 236. Дзве стараны поля паралельныя паміж сабой і перпендыкулярныя да трэцяй стараны.

Вядома, што за 1 г трактар можа ўзараць 1,2 гектар (га). Пры гэтым яму спатрэбіцца каля 30 л дызельнага паліва.



Рыс. 236

Правообладатель Народная асвета

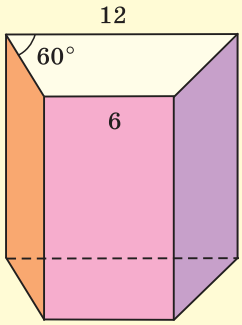
Задача. *Вызначыце:*
1) плошчу дадзенага поля ў гектарах;
2) колькі часу пойдзе ў трактара на ўзворванне поля;
3) колькі паліва для гэтага спатрэбіцца.

Цікава ведаць. Мінскі трактарны завод (МТЗ) быў заснаваны 29 мая 1946 г. Сённяшні гэта адзін з найбуйнейшых вытворцаў сельскагаспадарчай тэхнікі ў свеце. На працягу многіх гадоў завод захоўвае за сабой долю ў 10 % сусветнага рынку колавых трактароў і пастаўляе трактары з маркай «Беларус» больш чым у 60 краін. На заводзе працуе 17 000 чалавек. Кожную мінуту ў свеце становіцца на 4 трактары «Беларус» больш.

Геаметрыя 3D

Плошча паверхні любога мнагагранніка (часам гавораць *плошча поўнай паверхні*) роўна суме плошчаў усіх яго граней.

Задача. *На рысунку* 237 *паказана прамая чатырохвугольная прызма, у аснове якой ляжыць раўнабедраная трапецыя з асновамі, роўнымі* 12 *см і* 6 *см, і вострым вуглом пры аснове, роўным* 60°. *Большая па плошчы бакавая грань прызмы з'яўляецца квадратам. Знайдзіце плошчу паверхні гэтай прызмы.*



Рыс. 237

Правообладатель Народная асвета

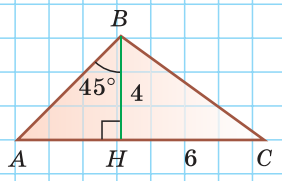
ЗАПАМІНАЕМ

1. Плошча квадрата: $S = a^2$, прамавугольніка: $S = ab$, паралелаграма: $S = ah$, трохвугольніка: $S = \frac{1}{2}ah$, трапецыі: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.
2. Плошча прамавугольнага трохвугольніка: $S = \frac{ab}{2}$, ромба: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.
3. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы: $h = \frac{ab}{2}$.
4. Тэарэма Піфагора: $a^2 + b^2 = c^2$.
5. Плошча роўнастаронняга трохвугольніка: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, вышыня: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
6. Медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія трохвугольнікі.
7. Плошчы трохвугольнікаў з агульнай вышынёй адносяцца як адпаведныя гэтай вышыні асновы.

Правяраем сябе

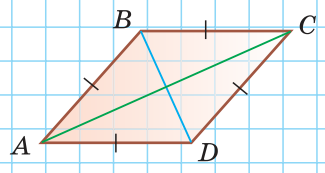
Тэст 1

Па даных на рысунку знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.



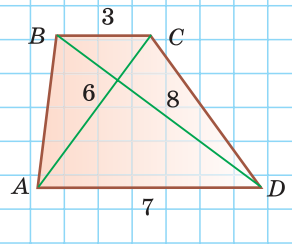
Тэст 2

Плошча ромба $ABCD$ роўна 120 см^2, дыяганаль $BD = 10$ см. Знайдзіце перыметр ромба.



Тэст 3

Дыяганалі трапецыі роўны 6 см і 8 см, асновы 3 см і 7 см. Знайдзіце S_{ABCD}.

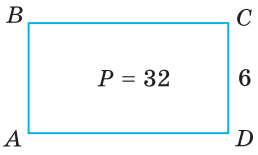


Правообладатель Народная асвета

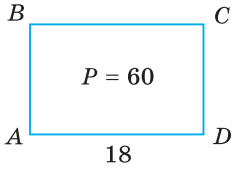
ПАДРЫХТОЎКА ДА КАНТРОЛЬНАЙ РАБОТЫ № 2

1. Знайдзіце плошчу прамавугольніка $ABCD$.

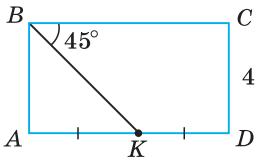
а)



б)

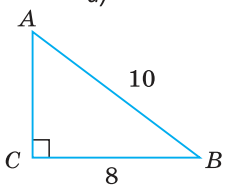


в)

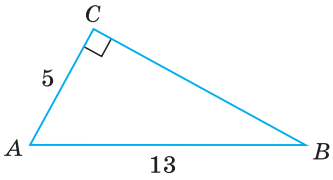


2. Знайдзіце другі катэт і плошчу $\triangle ABC$.

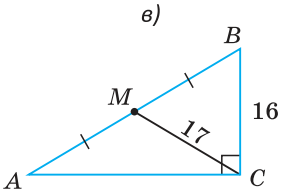
а)



б)

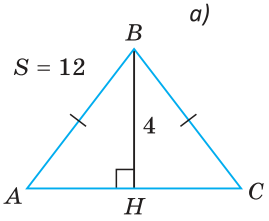


в)

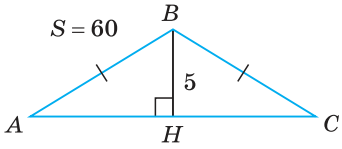


3. Знайдзіце перыметр $\triangle ABC$.

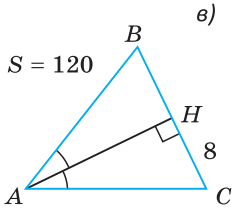
а)



б)

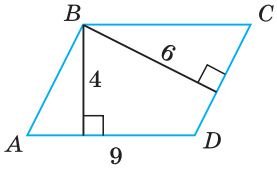


в)

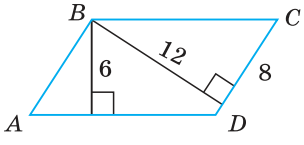


4. Знайдзіце перыметр паралелаграма $ABCD$.

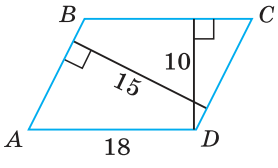
а)



б)

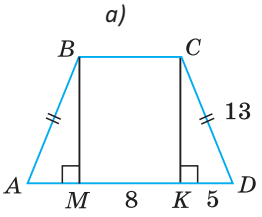


в)

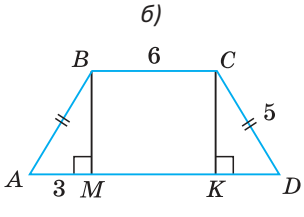


5. Знайдзіце плошчу трапецыі $ABCD$.

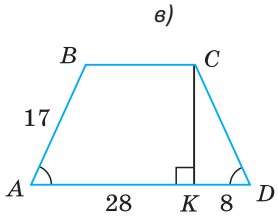
а)



б)



в)



Правообладатель Народная асвета

Паўтарэнне главы I і главы II

1. Назавіце два розныя тыпы многавугольнікаў. У чым іх адрозненне?
2. Пералічыце тры віда (прыватных выпадка) паралелаграма:

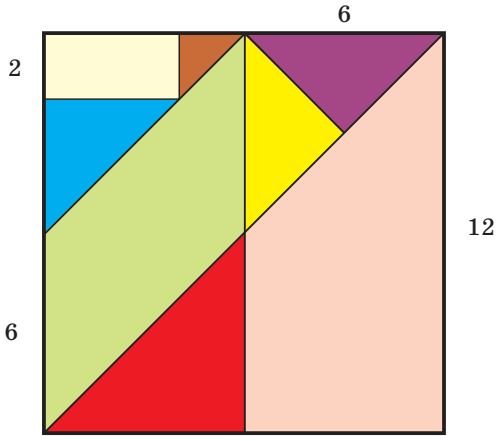
1) ...
2) ...
3) ...

Дайце азначэнне кожнаму віду паралелаграма.

3. Назавіце пяць уласцівасцей паралелаграма, уласцівасці прамавугольніка, ромба і квадрата.
4. Як гучыць тэарэма Фалеса і якой уласцівасцю валодае сярэдняя лінія трохвугольніка?
5. Колькі відаў трапецый вы ведаеце? Дайце азначэнне кожнаму віду трапецыі. Назавіце ўласцівасць сярэдняй лініі трапецыі.
6. Запішыце 8 формул плошчаў плоскіх фігур і тэарэму Піфагора.

Заданне

На рысунку квадрат са стараной 12 падзелены на асобныя фігуры адрэзкамі, якія ўтвараюць са старанамі квадрата вугал 90° або 45°.



Знайдзіце плошчу кожнай фігуры, выкарыстаўшы памеры на рысунку. Праверце, ці будзе сума знойдзеных вамі плошчаў роўна плошчы ўсяго квадрата.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя. 8 кл.» можна знайсці на сайце: http://e-vedy.adu.by, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 8 кл.».

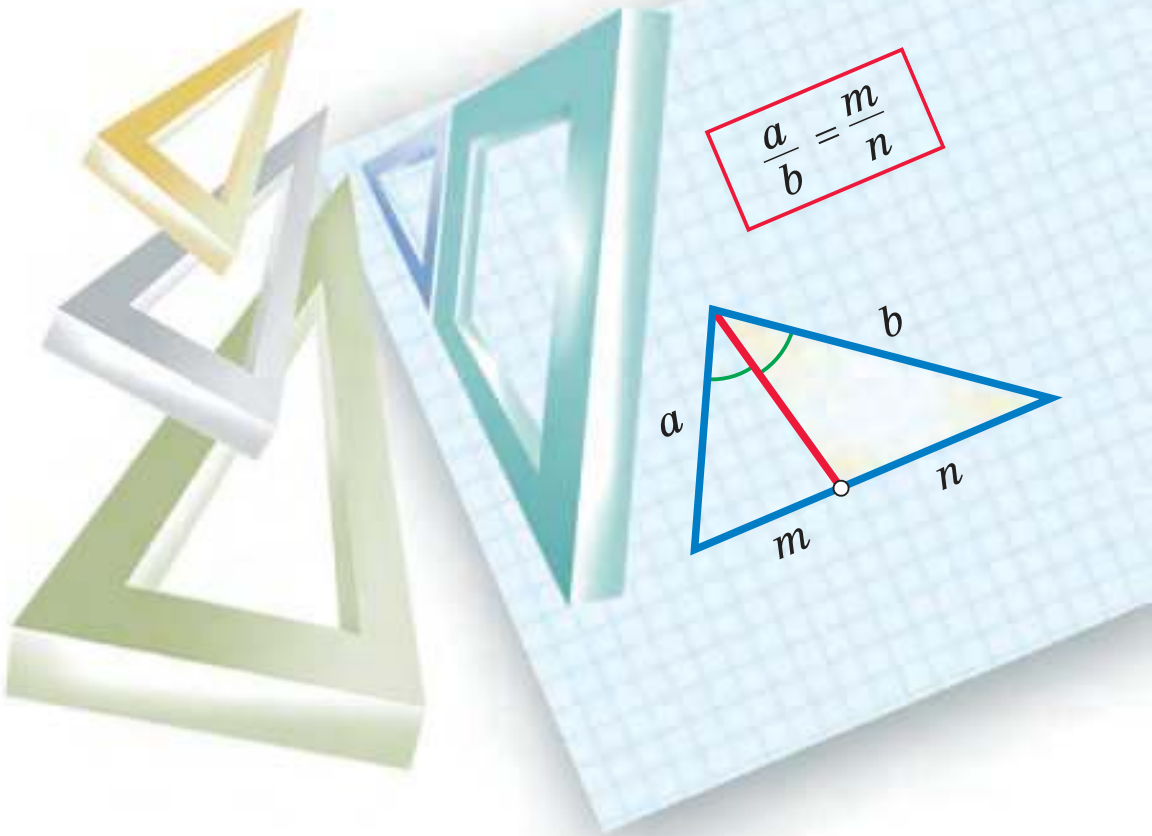
Правообладатель Народная асвета

Глава III

Падобнасць трохвугольнікаў

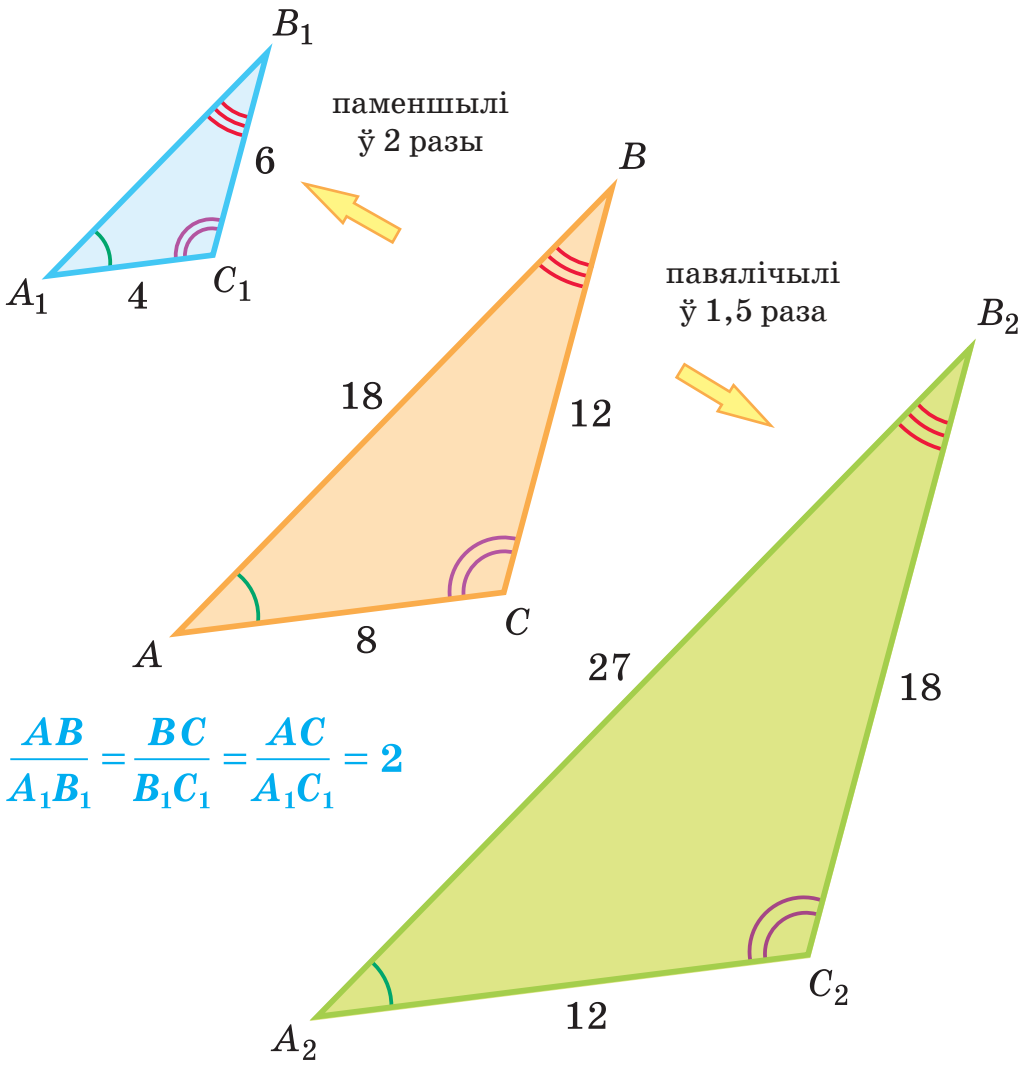
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Якія трохвугольнікі называюцца падобнымі
- Пра прыметы падобнасці трохвугольнікаў
- Пра ўласцівасць бісектрысы трохвугольніка



Правообладатель Народная асвета

Падобнасць



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$$

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{A_2C_2} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \quad k = 2$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2, \quad k = \frac{2}{3}$$

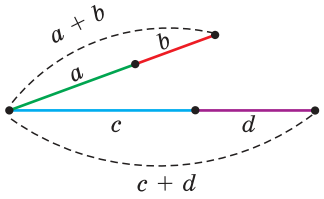
Правообладатель Народная асвета

§ 19. Абагульненая тэарэма Фалеса

Пад *адносінай* адрэзкаў a і b разумеюць адносіну іх даўжынь, г. зн. лік $\frac{a}{b}$. Няхай ёсць дзве пары адрэзкаў: a і b, c і d. Гавораць, што адрэзкі a і b *прапарцыянальны* адрэзкам c і d, калі іх адносіны роўныя, г. зн. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Напрыклад, адрэзкі $AB = 5$ см і $CD = 10$ см прапарцыянальны адрэзкам $A_1B_1 = 4$ см і $C_1D_1 = 8$ см, паколькі $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ і $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

Калі для адрэзкаў a, b, c і d справядлівая роўнасць $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то па ўласцівасці прапорцыі: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (рыс. 238).



Рыс. 238

Дадаўшы адзінку да абедзвюх частак апошняй прапорцыі, атрымаем: $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

Паняцце прапарцыянальнасці разглядаецца і для большай колькасці адрэзкаў. Так, адрэзкі a, b і c прапарцыянальны адрэзкам m, n і k, калі $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}$, або інакш — $a : b : c = m : n : k$.

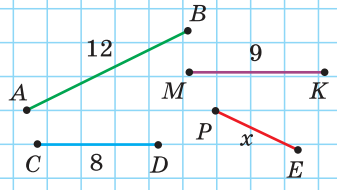
А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

Калі $AC : CB = 5 : 3$, то чаму роўна адносіна:
а) $BC : AC$; б) $AC : AB$?

Тэст 2

Калі $\frac{AB}{CD} = \frac{MK}{PE}$, то чаму роўна даўжыня адрэзка PE?

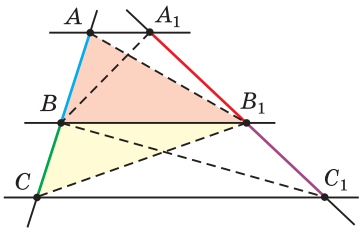


У Главе I намі даказана тэарэма Фалеса «*Калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то на другой старане вугла адкладуцца роўныя паміж сабой адрэзкі*». Гэту тэарэму можна абагульніць для выпадку адвольных адрэзкаў.

Правообладатель Народная асвета

Тэарэма Фалеса абагульненая (тэарэма аб прапарцыянальных адрэзках).
Калі на адной старане вугла адкласці некалькі адрэзкаў і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то на другой старане вугла адкладуцца адрэзкі, прапарцыянальныя дадзеным.

Можна карыстацца скарочанай фармулёўкай тэарэмы: «*Паралельныя прамыя адсякаюць на старанах вугла прапарцыянальныя адрэзкі*».



Рыс. 239

Дадзена: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рыс. 239).

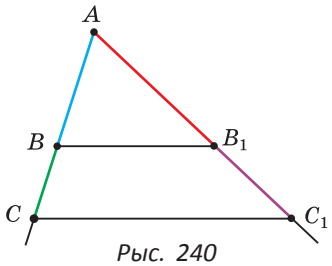
Даказаць: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Доказ. Правядзём адрэзкі AB_1, CB_1, A_1B і C_1B. Паколькі $\triangle AB_1B$ і $\triangle CB_1B$ маюць агульную вышыню, праведзеную з вяршыні B_1, то іх плошчы адносяцца як асновы: $\frac{S_{AB_1B}}{S_{CB_1B}} = \frac{AB}{BC}$.

Паколькі $\triangle A_1BB_1$ і $\triangle C_1BB_1$ маюць агульную вышыню, праведзеную з вяршыні B, то $\frac{S_{A_1BB_1}}{S_{C_1BB_1}} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Але $\triangle AB_1$B і $\triangle A_1BB_1$ роўнавялікія: у іх агульная аснова BB_1 і роўныя вышыні, праведзеныя з вяршынь A і A_1 (паколькі $AA_1 \parallel BB_1$). Таксама роўнавялікія $\triangle CB_1B$ і $\triangle C_1BB_1$: у іх агульная аснова BB_1 і роўныя вышыні, праведзеныя з вяршынь C і C_1 (паколькі $CC_1 \parallel BB_1$). Таму $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Тэарэма Фалеса абагульненая таксама справядлівая для трох і больш адкладзеных адрэзкаў, і не толькі для старон вугла, але і для адвольных прамых.

Тэарэма (адваротная абагульненай тэарэме Фалеса).
Калі на старанах вугла ад яго вяршыні паслядоўна адкласці прапарцыянальныя адрэзкі, то прамыя, якія праходзяць праз іх адпаведныя канцы, будуць паралельнымі, г. зн. калі $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$, то $BB_1 \parallel CC_1$ (рыс. 240).



Рыс. 240

Дакажыце дадзеную тэарэму самастойна, выкарыстаўшы метад ад процілеглага і даказаную вышэй прамую тэарэму Фалеса.

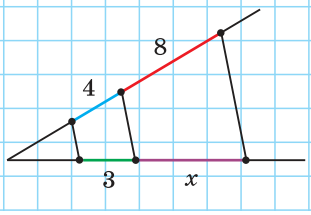
Трэба мець на ўвазе, што адваротная тэарэма Фалеса справядлівая толькі для адрэзкаў, адкладзеных ад вяршыні вугла.

А цяпер выканайце **Тэст 3** і **Тэст 4**.

Правообладатель Народная асвета

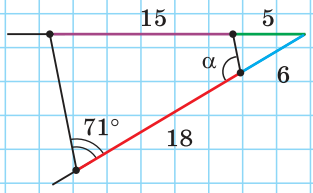
Тэст 3

Стораны вугла перасечаны паралельнымі прамымі. Знайдзіце даўжыню адрэзка x.



Тэст 4

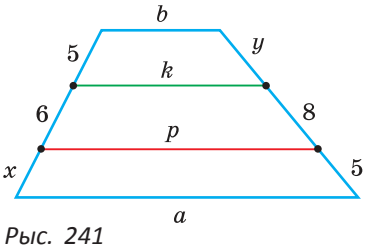
Па памерах, пазначаных на рысунку, знайдзіце велічыню вугла α.



Заданні да § 19

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *У трапецыі праведзены адрэзкі p і k, паралельныя асновам a і b трапецыі* (рыс. 241). *Знайсці x і y па памерах, пазначаных на рысунку. У адказе запісаць значэнне xy.*



Рыс. 241

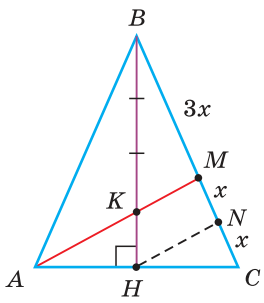
Рашэнне. Па абагульненай тэарэме Фалеса $\frac{x}{6} = \frac{5}{8}$ і $\frac{y}{8} = \frac{5}{6}$.

Тады $x = \frac{6 \cdot 5}{8} = 3\frac{3}{4}$, $y = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}$,

$xy = \frac{6 \cdot 5}{8} \cdot \frac{8 \cdot 5}{6} = 25$.

Адказ: 25.

Задача 2. *У раўнабедраным трохвугольніку ABC ($AB = BC$) праведзена вышыня BH. Пункт K дзеліць вышыню BH у адносіне $1 : 3$, лічачы ад асновы AC. Прамая AK перасякае старану BC у пункце M. Знайсці адносіну $\frac{BM}{MC}$.*



Рыс. 242

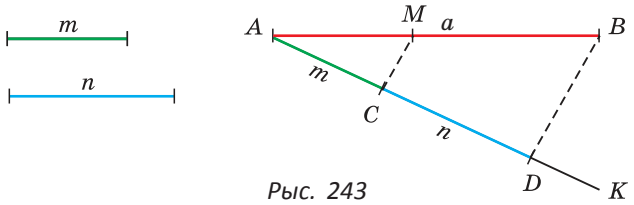
Рашэнне. У раўнабедраным трохвугольніку ABC вышыня BH будзе і медыянай, таму $AH = HC$. Правядзём $HN \parallel AM$ (рыс. 242). Па тэарэме Фалеса (для вугла C) $\frac{MN}{NC} = \frac{AH}{HC}$, адкуль $MN = NC = x$. Паколькі $\frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$ (па ўмове) і $HN \parallel KM$, то па абагульненай тэарэме Фалеса (для вугла HBC) $\frac{MN}{BM} = \frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$. Тады $BM = 3MN = 3x$, $\frac{BM}{MC} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

Адказ: $3 : 2$.

Правообладатель Народная асвета

Задача 3. *Пры дапамозе цыркуля і лінейкі: а) падзяліць дадзены адрэзак a ў адносіне $m : n$; б) па дадзеных адрэзках a, b і c пабудаваць адрэзак x, які з'яўляецца чацвёртым членам прапорцыі $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ (пабудова чацвёртага прапарцыянальнага адрэзка).*

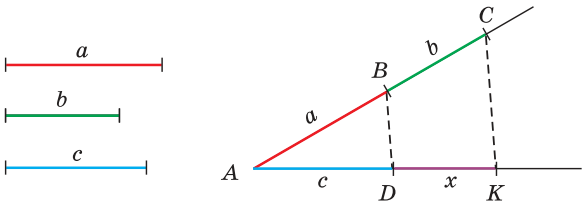
Рашэнне. а) Няхай дадзены адрэзак $AB = a$ і адрэзкі m і n (рыс. 243). З пункта A правядзём адвольны прамень AK і адкладзём на ім адрэзкі $AC = m$ і $CD = n$. Правядзём адрэзак BD. Будуем $CM \parallel BD$. Па абагульненай тэарэме Фалеса $AM : MB = AC : CD = m : n$.



Рыс. 243

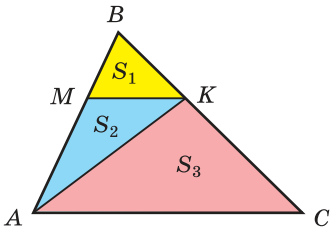
Заўвага. Калі адносіна адрэзкаў дадзена ў выглядзе адносіны натуральных лікаў m і n, на прамені AK адкладваюць паслядоўна m адвольных роўных адрэзкаў, а потым n такіх жа адрэзкаў. Далейшая пабудова супадае.

б) Будуем адвольны вугал A (рыс. 244). На адной яго старане адкладваем адрэзкі $AB = a$, $BC = b$. На другой старане — адрэзак $AD = c$. Праводзім адрэзак BD. Будуем $CK \parallel BD$, $K \in AD$. Адрэзак $DK = x$ — шуканы, паколькі з абагульненай тэарэмы Фалеса вынікае $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.



Рыс. 244

Задача 4*. *Плошча трохвугольніка ABC* роўна 36 см^2, $BM = \frac{1}{3}AB$, *$MK \parallel AC$. Знайсці плошчы S_1, S_2 і S_3 трохвугольнікаў MBK, AMK і AKC* (рыс. 245).



Рыс. 245

Рашэнне. З умовы вынікае $BM : AB = 1 : 3$. Паколькі BM змяшчае 1 частку, AB — 3 часткі, то MA — 2 часткі. Адсюль $BM : MA = 1 : 2$. Па тэарэме аб прапарцыянальных адрэзках $BK : KC = BM : MA = 1 : 2$. Паколькі $\triangle AKC$ і $\triangle ABK$ маюць агульную вышыню, праведзеную з вяршыні A, то іх плошчы адносяцца як асновы BK і KC, г. зн. $1 : 2$. Тады

Правообладатель Народная асвета

$S_3 = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$ (см^2), $S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ (см^2). Паколькі $\triangle MBK$ і $\triangle AMK$ маюць агульную вышыню, апушчаную з вяршыні K, то іх плошчы адносяцца як асновы BM і MA, г. зн. $1 : 2$. Тады $S_1 = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ (см^2), $S_2 = \frac{2}{3}S_{ABK} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ (см^2).

Адказ: 4 см^2, 8 см^2, 24 см^2.

Заўвага. Рашэнне можна скараціць:

1) $S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, $S_{MBK} = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot 36 = 4$ (см^2),

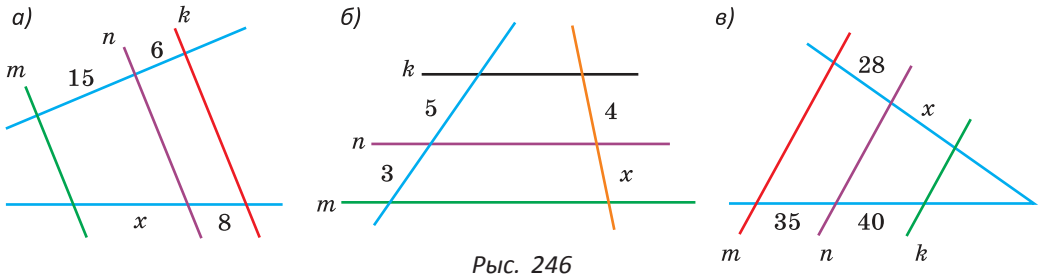
2) $S_{AMK} = 2S_{MBK} = 2 \cdot 4 = 8$ (см^2), $S_{AKC} = 36 - 4 - 8 = 24$ (см^2).

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

261. Дадзены два адрэзкі: $a = 3$ см, $b = 4$ см. Якія з наступных пар адрэзкаў прапарцыянальны адрэзкам a і b:

а) $m = 6$ мм, $n = 8$ мм;
б) $c = 1\frac{1}{2}$ км, $p = 2$ км;
в) $k = 9$ см, $p = 16$ см;
г) $l = 3{,}6$ м, $g = 180$ см?

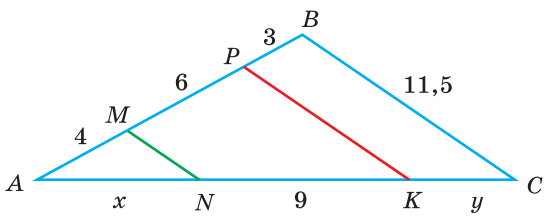
262. На рысунках 246, *а*)—*в*) $m \parallel n \parallel k$. Знайдзіце даўжыню адрэзка x (усе памеры дадзены ў сантыметрах).



Рыс. 246

263. На рысунку 247 адрэзкі MN і PK паралельныя адрэзку BC. Знайдзіце:

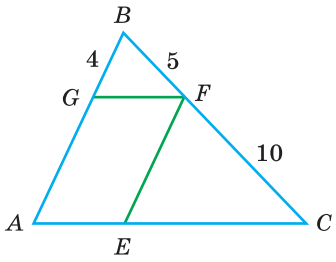
а) адрэзкі AN і KC;
б) перыметр $\triangle ABC$ (усе памеры дадзены ў сантыметрах).



Рыс. 247

Правообладатель Народная асвета

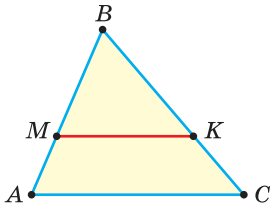
264. На рысунку 248 $AGFE$ — паралелаграм, $GB = 4$ см, $BF = 5$ см, $FC = 10$ см. Перыметр трохвугольніка ABC роўны 45 см. Знайдзіце:
а) адрэзкі AG, AC, AE;
б) перыметр паралелаграма $AGFE$.



Рыс. 248

265. У $\triangle ABC$ праведзена бісектрыса AK і адрэзак KM, паралельны старане AC, дзе пункт M належыць старане AB; $MB = 6$ см, $BK : KC = 2 : 3$. Знайдзіце:
а) адрэзак AM;
б) адрэзак MK.

266. На рысунку 249 $MK \parallel AC$. Знайдзіце:
а) MB, калі $AB = 32$ см, $BK : KC = 5 : 3$;
б) AB, калі $AM = 18$ см, $BC : BK = 3 : 2$;
в) BK, калі $BM = 12$ см, $AM : KC = 4 : 5$;
г) BC, калі $AM : AB = 2 : 7$, $BK - KC = 6$ см.



Рыс. 249

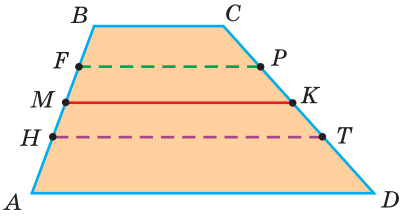
267. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі падзяліце дадзены адрэзак у адносіне: а) $2 : 3$; б) $3 : 5$ (для правядзення паралельных прамых можна карыстацца чарцёжным трохвугольнікам).

268. У трапецыі $ABCD$ (рыс. 250) праведзены адрэзкі FP і HT, паралельныя асновам, MK — сярэдняя лінія трапецыі, $CD = 60$ см. Калі $MF : FB = 2 : 3$, $MH : HA = 1 : 2$, то чаму роўна даўжыня адрэзка PT?

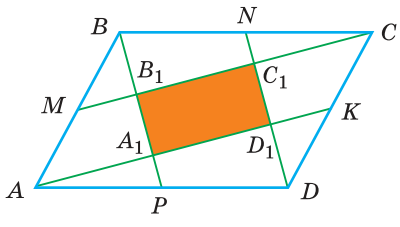
269*. У трохвугольніку ABC праведзена медыяна BM, пункт F — яе сярэдзіна. Прамая CF перасякае старану AB у пункце K. Плошча чатырохвугольніка $AKFM$ роўна 50 см^2. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

270*. Пункты M, N, K і P — сярэдзіны старон паралелаграма $ABCD$ (рыс. 251). Плошча паралелаграма $ABCD$ роўна 120 см^2. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $A_1B_1C_1D_1$.

271*. Дадзены адрэзкі a і b. Знайдзіце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі адрэзка x, калі $x = \frac{a^2}{b}$.



Рыс. 250



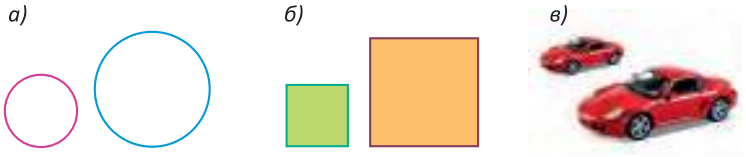
Рыс. 251

Правообладатель Народная асвета

§ 20. Падобнасць трохвугольнікаў

Падобнымі з'яўляюцца фігуры аднолькавай формы, але розных памераў. Напрыклад, падобныя дзве акружнасці рознага радыуса (252, *а*), два квадраты з рознай даўжынёй стараны (рыс. 252, *б*) і наогул дзве фігуры F_1 і F_2, кожная з якіх уяўляе сабой паменшаную або павялічаную копію другой, напрыклад як на рысунку 252, *в*).

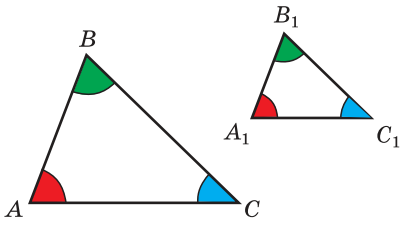
Для абазначэння падобнасці фігур F_1 і F_2 выкарыстоўваюць знак «$\sim$». Пішуць $F_1 \sim F_2$.



Рыс. 252

Азначэнне. Два трохвугольнікі называюцца **падобнымі**, калі ў іх адпаведныя вуглы роўныя, а адпаведныя стораны прапарцыянальныя.

Адпаведнымі старанамі падобных трохвугольнікаў называюцца стораны, якія ляжаць насупраць адпаведна роўных вуглоў гэтых трохвугольнікаў.



Рыс. 253

Калі для $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (рыс. 253) выконваюцца дзве ўмовы:

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то трохвугольнікі падобныя.

Для зручнасці падобныя трохвугольнікі звычайна запісваюць і называюць у парадку размяшчэння адпаведных вяршынь. Так, калі $\triangle ABC \sim \triangle MNK$, то вяршыні A і M, B і N, C і K — адпаведныя.

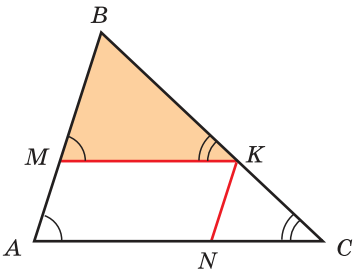
Адносіна адпаведных старон падобных трохвугольнікаў называецца *каэфіцыентам падобнасці трохвугольнікаў*. Калі $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1} = k$ — каэфіцыент падобнасці. Для вызначэння каэфіцыента падобнасці знаходзяць адносіну стараны першага з запісаных або названых падобных трохвугольнікаў да адпаведнай стараны другога трохвугольніка. Напрыклад, калі $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = 2$, то $k = 2$. Пры гэтым $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ з каэфіцыентам падобнасці $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

Можна вылучыць наступныя ўласцівасці падобных трохвугольнікаў:

1. Калі $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, а $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.
2. Калі $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ і $k = 1$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$.

Тэарэма (аб паралельнай прамой).
Прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму.



Рыс. 254

У тэарэме гаворка ідзе аб прамой, якая перасякае стораны трохвугольніка.

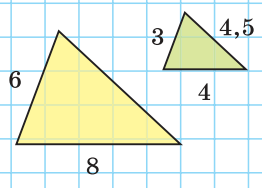
Дадзена: $\triangle ABC$, $MK \parallel AC$ (рыс. 254).
Даказаць: $\triangle MBK \sim \triangle ABC$.
Доказ. У трохвугольнікаў MBK і ABC вуглы роўныя: $\angle BMK = \angle BAC$, $\angle BKM = \angle BCA$ як адпаведныя пры паралельных прамых MK і AC, $\angle B$ — агульны.

Дакажам, што ў трохвугольнікаў MBK і ABC адпаведныя стораны прапарцыянальныя. Па абагульненай тэарэме Фалеса $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$, адкуль $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC}$. Правядзём $KN \parallel AB$. Па абагульненай тэарэме Фалеса $\frac{AN}{NC} = \frac{BK}{KC}$, адкуль $\frac{AN}{AC} = \frac{BK}{BC}$. Але $AMKN$ — паралелаграм ($MK \parallel AC$, $KN \parallel AB$). Таму $MK = AN$ і $\frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC}$. Тады $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{MK}{AC}$. Паколькі ў трохвугольнікаў MBK і ABC вуглы роўныя, а стораны прапарцыянальныя, то трохвугольнікі падобныя. Тэарэма даказана.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

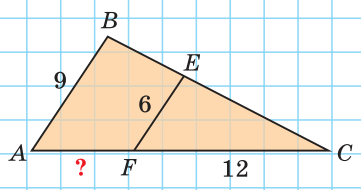
Тэст 1

Калі жоўты і зялёны трохвугольнікі падобныя, то перыметр жоўтага трохвугольніка роўны...
а) 20; б) 18; в) 24; г) 23.



Тэст 2

Калі $EF \parallel AB$, то AF = ...
а) 6; б) 7; в) 8; г) 6,5.

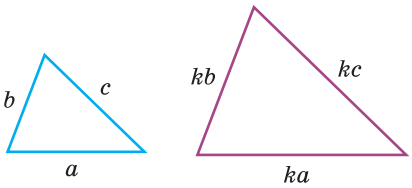


Правообладатель Народная асвета

Заданні да § 20

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што перыметры падобных трохвугольнікаў адносяцца як іх адпаведныя стораны.*



Рыс. 255

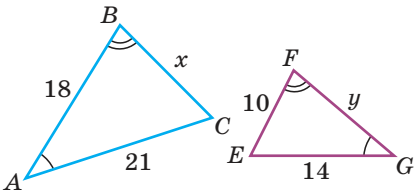
Доказ. Няхай стораны аднаго з падобных трохвугольнікаў роўны a, b і c. Тады стораны падобнага яму трохвугольніка — ka, kb і kc, дзе k — каэфіцыент падобнасці (рыс. 255). Адносіна перыметраў

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = \frac{k(a + b + c)}{a + b + c} = k.$$

Атрымалі, што адносіна перыметраў роўна каэфіцыенту падобнасці. А каэфіцыент падобнасці роўны адносіне адпаведных старон падобных трохвугольнікаў.

Заўвага. У падобных трохвугольнікаў адносіна любых адпаведных лінейных элементаў (вышынь, бісектрыс, медыян і г. д.) роўна каэфіцыенту падобнасці.

Задача 2. *Трохвугольнікі на рысунку* 256 *падобныя. Прычым* $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, $AB = 18$ см, $AC = 21$ см, $FE = 10$ см, $EG = 14$ см. *Знайсці даўжыні старон* BC *і* FG.



Рыс. 256

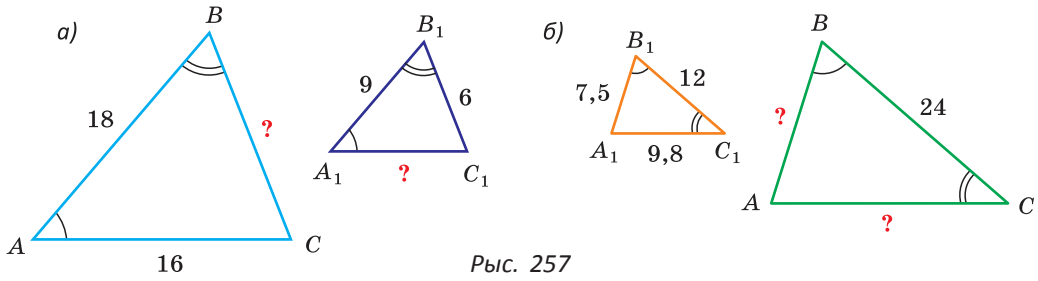
Рашэнне. Паколькі $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, то $\angle C = \angle E$. Стораны AC і EG, AB і FG, BC і FE — адпаведныя, паколькі ляжаць насупраць роўных вуглоў. Няхай $BC = x$ см, $FG = y$ см. Паколькі ў падобных трохвугольнікаў адпаведныя стораны прапарцыянальныя, то $\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{EG}$, або $\frac{x}{10} = \frac{21}{14}$, адкуль $x = \frac{10 \cdot 21}{14} = 15$, $BC = 15$ см. Аналагічна, $\frac{FG}{BA} = \frac{EG}{AC}$, $\frac{y}{18} = \frac{14}{21}$, $y = \frac{18 \cdot 14}{21} = 12$, $FG = 12$ см.

Адказ: $BC = 15$ см, $FG = 12$ см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

272. Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ на рысунках 257, *а*), *б*) (гл. с. 126) падобныя. Па пазначаных памерах знайдзіце невядомыя стораны трохвугольнікаў, абазначаныя пытальнікам (усе памеры дадзены ў сантыметрах).

Правообладатель Народная асвета

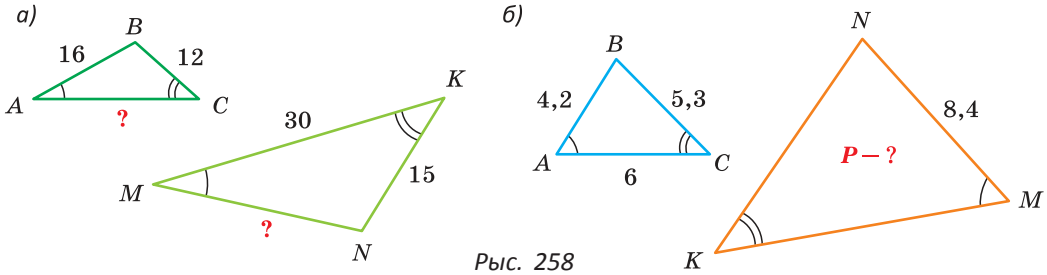


Рыс. 257

273. Трохвугольнікі ABC і MNK на рысунках 258, *а*), *б*) падобныя, $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle K$. Знайдзіце:

а) суму $AC + MN$;

б) перыметр трохвугольніка MNK (усе памеры дадзены ў сантыметрах).



Рыс. 258

274. Вядома, што $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Знайдзіце:

а) велічыню вугла B, калі $\angle M = 80°$, $\angle K = 40°$;

б) велічыню вугла K, калі $\angle N = 75°$, $\angle A = \angle B$;

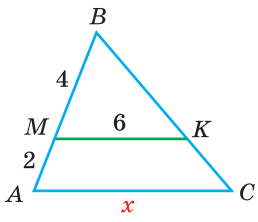
в) даўжыню стараны AB, калі $BC = 15$ см, $MN = 21$ см, $NK = 45$ см;

г) плошчу трохвугольніка MNK, калі $\angle A = 90°$, $BC = 15$ см, $AB = 12$ см, $NK = 5$ см.

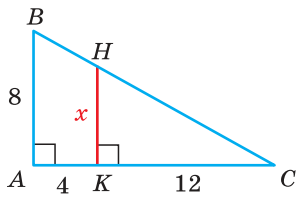
275. На рысунку 259 $MK \parallel AC$, $MK = 6$ м, $MB = 4$ м, $AM = 2$ м. Знайдзіце AC.

276. На рысунку 260 $\angle BAC = 90°$, $HK \perp AC$, $AK = 4$ см, $KC = 12$ см, $AB = 8$ см. Знайдзіце HK.

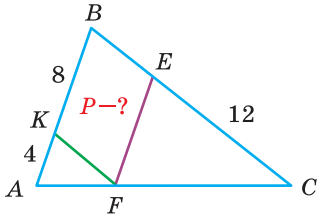
277. На рысунку 261 $AK = 4$ см, $KB = 8$ см, $EC = 12$ см. Знайдзіце перыметр паралелаграма $KBEF$.



Рыс. 259



Рыс. 260

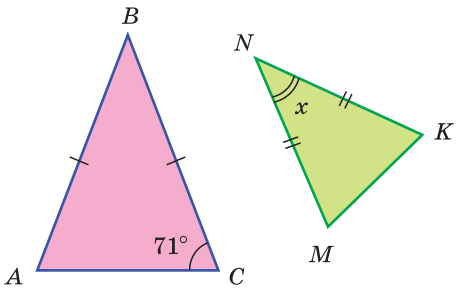


Рыс. 261

Правообладатель Народная асвета

278. Раўнабедраныя трохвугольнікі на рысунку 262 падобныя, $\angle C = 71°$. Знайдзіце велічыню вугла N.

279. Трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя. Перыметр $\triangle ABC$ роўны 24 см, перыметр $A_1B_1C_1$ роўны 36 см. Старана AB роўна 8 см. Знайдзіце адпаведную ёй старану A_1B_1.



Рыс. 262

280. Вядома, што $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ з каэфіцыентам падобнасці $k = 3$ $\left(\frac{AB}{MN} = k\right)$. Знайдзіце перыметр $\triangle MNK$, калі $AB = 4$ см, $BC = 5\frac{1}{3}$ см, $AC = 2\frac{2}{3}$ см.

281. Дакажыце, што сярэдняя лінія трохвугольніка адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму. Знайдзіце каэфіцыент падобнасці гэтых трохвугольнікаў.

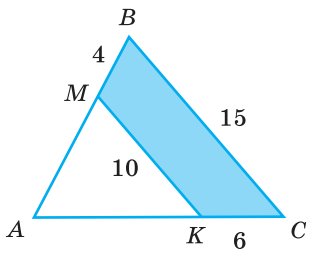
282. Начарціце трохвугольнік ABC. Праз яго вяршыні правядзіце прамыя, паралельныя процілеглым старанам. Дакажыце, што ўтвораны імі трохвугольнік $A_1B_1C_1$ падобны трохвугольніку ABC.

283. Дадзена трапецыя $ABCD$, $AD = 15$ см, $BC = 6$ см — асновы трапецыі, $AB = 6$ см, $CD = 12$ см. Бакавыя стораны трапецыі прадоўжаны да перасячэння ў пункце K. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў BK і CK.

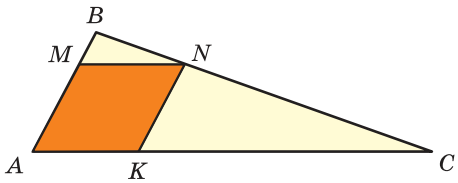
284. Дадзена трапецыя $ABCD$. Пункт K належыць бакавой старане AB, пункт P — бакавой старане CD, $KP \parallel AD$, $BC = 4$ см, $AD = 11$ см, $KP = 6$ см. Знайдзіце адносіну $CP : PD$.

285. На рысунку 263 $MBCK$ — трапецыя са старанамі, роўнымі 10 м, 15 м, 4 м і 6 м. Знайдзіце адносіну перыметра трохвугольніка ABC да перыметра трапецыі.

286*. У трохвугольніку ABC $AB = 4$ см, $AC = 12$ см (рыс. 264). Знайдзіце перыметр ромба $AMNK$.



Рыс. 263



Рыс. 264

Правообладатель Народная асвета

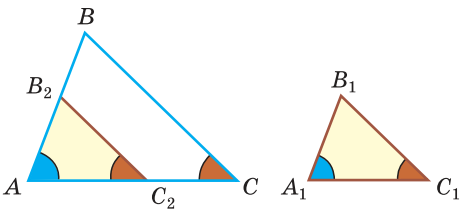
287*. $\triangle ABC$ падобны $\triangle A_1B_1C_1$ з каэфіцыентам падобнасці $k = \frac{2}{3}$. Вядома, што $AB + BC = 24$ см, $A_1B_1 - B_1C_1 = 6$ см. Знайдзіце AB.

288*. Стораны аднаго з двух падобных трохвугольнікаў роўны 6 см і 12 см, другога — 12 см і 18 см. Знайдзіце невядомыя стораны кожнага з трохвугольнікаў, калі каэфіцыент падобнасці 2-га трохвугольніка 1-му: а) цэлы лік; б) дробавы лік.

289*. На каардынатнай плоскасці дадзены трохвугольнік OAB, дзе $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 5)$, $B(3;\ 0)$. Пабудуйце якісьці трохвугольнік OA_1B_1, падобны дадзенаму, стораны якога ў 2 разы большыя за старану трохвугольніка OAB. Запішыце каардынаты пунктаў A_1 і B_1.

§ 21. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў

Тэарэма (1-я прымета падобнасці трохвугольнікаў).
Калі два вуглы аднаго трохвугольніка адпаведна роўны двум вуглам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі падобныя.



Рыс. 265

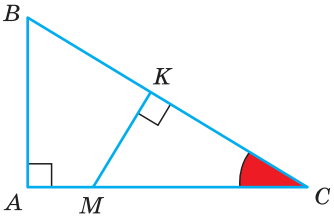
Дадзена: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Даказаць: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Адкладзём на старане AC трохвугольніка ABC адрэзак AC_2, роўны старане A_1C_1, і правядзём $C_2B_2 \parallel CB$ (рыс. 265). Атрымаем $\triangle AB_2C_2$. Паколькі прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму, то $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Паколькі $\angle C_2 = \angle C$ як адпаведныя пры паралельных прамых BC і B_2C_2 і сякучай AC, а $\angle C = \angle C_1$ па ўмове, то $\angle C_2 = \angle C_1$ і $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Такім чынам, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Тэарэма даказана.

Вынік.

Калі востры вугал аднаго прамавугольнага трохвугольніка роўны вострому вуглу другога прамавугольнага трохвугольніка, то такія трохвугольнікі падобныя. У дадзеным выпадку гавораць, што прамавугольныя трохвугольнікі падобныя па вострым вугле.

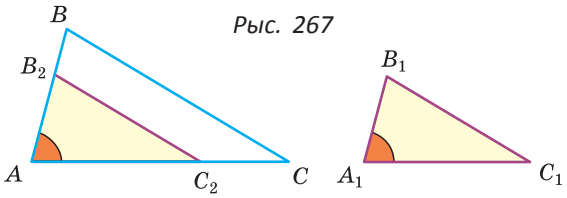


Рыс. 266

На рысунку 266 прамавугольныя трохвугольнікі MKC і BAC падобныя, паколькі ў іх $\angle C$ — агульны. Прычым, $\frac{KM}{AB} = \frac{KC}{AC} = \frac{MC}{BC}$.

Правообладатель Народная асвета

Тэарэма (2-я прымета падобнасці трохвугольнікаў).
Калі дзве стараны аднаго трохвугольніка прапарцыянальны двум старанам другога трохвугольніка, а вуглы, змешчаныя паміж гэтымі старанамі, роўныя, то такія трохвугольнікі падобныя.



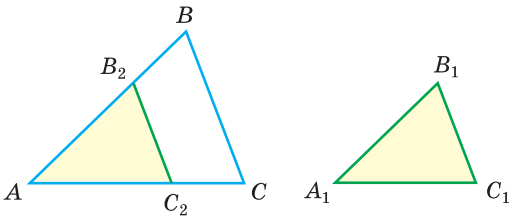
Рыс. 267

Дадзена: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$.

Даказаць: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказ. Адкладзём на старане AC трохвугольніка ABC адрэзак AC_2, роўны старане A_1C_1, і правядзём $C_2B_2 \parallel CB$ (рыс. 267). Атрымаем $\triangle AB_2C_2$. Паколькі прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму, то $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Тады $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$ (1). Па ўмове $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. З улікам $A_1C_1 = AC_2$ атрымліваем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$ (2). Параўнаўшы роўнасці (1) і (2), прыходзім да высновы, што $AB_2 = A_1B_1$. Тады $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Такім чынам, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (3-я прымета падобнасці трохвугольнікаў).
Калі тры стараны аднаго трохвугольніка прапарцыянальны тром старанам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі падобныя.



Рыс. 268

Дадзена: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Даказаць: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

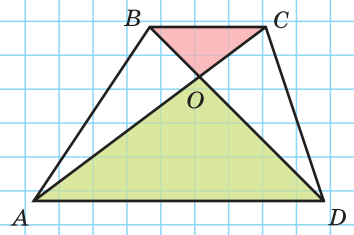
Доказ. Адкладзём на старане AC трохвугольніка ABC адрэзак AC_2, роўны старане A_1C_1, і правядзём $C_2B_2 \parallel CB$ (рыс. 268). Атрымаем $\triangle AB_2C_2$. Паколькі прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму, то $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Тады $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$ (1). Па ўмове $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. З улікам $AC_2 = A_1C_1$ атрымліваем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (2). Параўнаўшы роўнасці (1) і (2), прыходзім да высновы, што $AB_2 = A_1B_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$. Тады $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ па 3-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Такім чынам, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

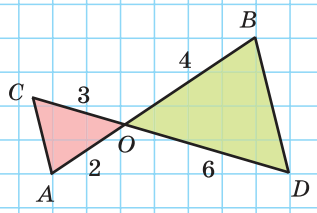
Тэст 1

$ABCD$ — трапецыя. Па якой прымеце $\triangle BOC \sim \triangle DOA$?



Тэст 2

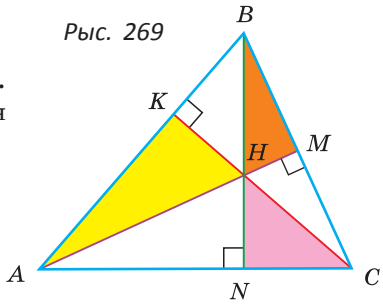
Ці падобныя $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$? Калі падобныя, то па якой прымеце?



Гімнастыка розуму

У трохвугольніку правялі тры вышыні (рыс. 269). Колькі пар падобных трохвугольнікаў утварылася пры гэтым?

Рыс. 269

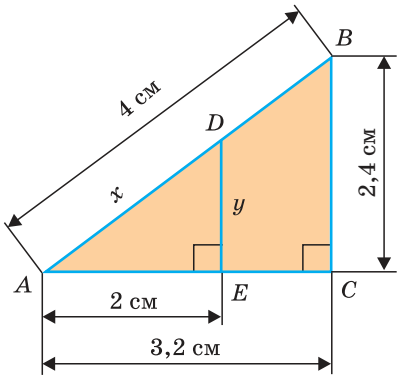


Заданні да § 21

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Па памерах, пазначаных на рысунку* 270, *знайсці даўжыні адрэзкаў* AD *і* DE.



Рыс. 270

Р а ш э н н е. Прамавугольныя трохвугольнікі ABC і ADE падобныя па вострым вугле ($\angle A$ — агульны). Таму іх адпаведныя стораны прапарцыянальныя.

Знойдзем адрэзак AD: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, або $\frac{x}{4} = \frac{2}{3{,}2}$, $x = \frac{4 \cdot 2}{3{,}2} = 2{,}5$ (см).

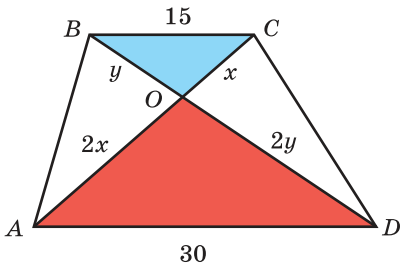
Знойдзем адрэзак DE: $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, або $\frac{y}{2{,}4} = \frac{2}{3{,}2}$, $y = \frac{2{,}4 \cdot 2}{3{,}2} = 1{,}5$ (см).

А д к а з: $AD = 2{,}5$ см, $DE = 1{,}5$ см.

Заўвага. Умова задачы мае лішкавыя даныя. Так, для задання прамавугольнага трохвугольніка ABC дастаткова ведаць даўжыні толькі дзвюх яго старон, а трэцюю старану можна знайсці па тэарэме Піфагора.

Правообладатель Народная асвета

Задача 2. *ABCD — трапецыя, AD = 30 см і BC = 15 см — яе асновы, AC = 27 см, BD = 33 см — дыяганалі трапецыі, якія перасякаюцца ў пункце O. Знайсці перыметр трохвугольніка AOD* (рыс. 271).

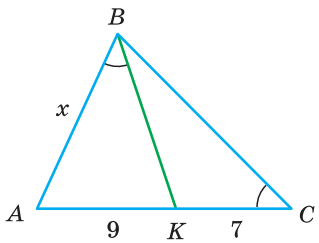


Рыс. 271

Р а ш э н н е. Трохвугольнікі *BOC* і *DOA* падобныя па 1-й прымеце падобнасці трохвугольнікаў: $\angle CBO = \angle ADO$ як накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых *AD* і *BC* і сякучай *BD*, $\angle COB = \angle AOD$ як вертыкальныя. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае: $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$. Інакш кажучы, $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$ і $\frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}$. Калі $OC = x$ см, то $OA = 2x$ см. Адсюль $2x + x = 27$, $x = 9$, $OC = 9$ см, $OA = 18$ см. Калі $OB = y$ см, то $OD = 2y$. Адсюль $y + 2y = 33$, $y = 11$, $OB = 11$ см, $OD = 22$ см. $P_{AOD} = OA + OD + AD = 18 + 22 + 30 = 70$ (см).

А д к а з: 70 см.

Задача 3. *У трохвугольніку ABC праведзены адрэзак BK так, што* $\angle ABK = \angle ACB$, *AK = 9 см, KC = 7 см. Знайсці старану AB* (рыс. 272).



Рыс. 272

Р а ш э н н е. У трохвугольнікаў *ABC* і *AKB* $\angle A$ — агульны, $\angle ABK = \angle ACB$ па ўмове. Таму $\triangle ABC \sim \triangle AKB$ па двух вуглах. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle ABC = \angle AKB$ і $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB}$. Калі $AB = x$ см, то $\frac{x}{16} = \frac{9}{x}$, $x^2 = 9 \cdot 16$, $x = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$, $AB = 12$ см.

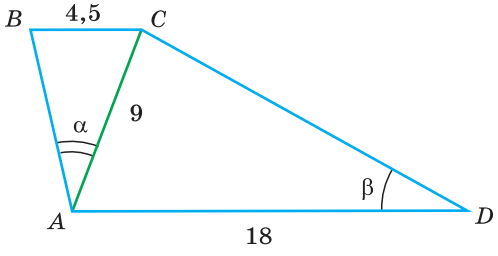
А д к а з: 12 см.

Заўвага. Калі размова ідзе аб дзвюх парах адпаведных старон падобных трохвугольнікаў, зручна запісваць адносіну дзвюх старон аднаго трохвугольніка і прыраўноўваць яе да адносіны дзвюх адпаведных старон другога трохвугольніка.

Задача 4. *Дадзена трапецыя ABCD, яе асновы AD = 18 і BC = 4,5, дыяганаль AC = 9. Калі* $\alpha + \beta = 64°$, *то чаму роўны вугал* α (рыс. 273)?

Р а ш э н н е. Разгледзім $\triangle ABC$ і $\triangle DCA$: $\frac{BC}{AC} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{AD} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, $\angle ACB = \angle CAD$ (як накрыжлеглыя пры паралельных прамых *AD* і *BC* і сякучай *AC*). Тады $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі (па 2-й прымеце падобнасці трохвугольнікаў). Тады $\angle BAC = \angle ADC$ як адпаведныя вуглы ў падобных трохвугольніках, г. зн. $\alpha = \beta$. Адсюль $\alpha = \frac{64°}{2} = 32°$.

А д к а з: 32°.



Рыс. 273

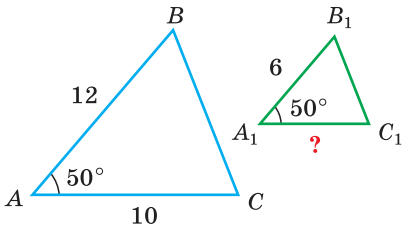
Правообладатель Народная асвета

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

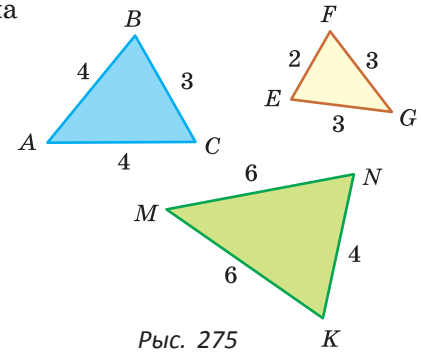
290. Пабудуйце адвольны $\triangle ABC$. На прамені AB за пункт B адкладзіце адрэзак BB_1, у 2 разы большы за адрэзак AB, на прамені AC за пункт C адкладзіце адрэзак CC_1, у 2 разы большы за адрэзак AC. Растлумачце, чаму $\triangle AB_1C_1$ падобны $\triangle ABC$. Чаму роўны каэфіцыент падобнасці?

291. Знайдзіце, пры якой даўжыні стараны A_1C_1 трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ будуць падобнымі (рыс. 274)? Назавіце прымету падобнасці.

292. Якія з трохвугольнікаў, паказаных на рысунку 275, падобныя і чаму?

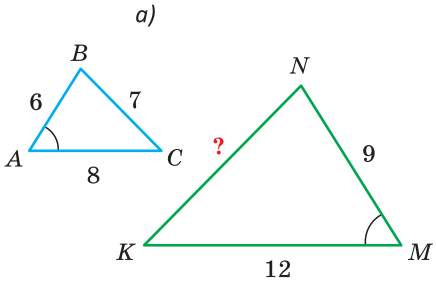


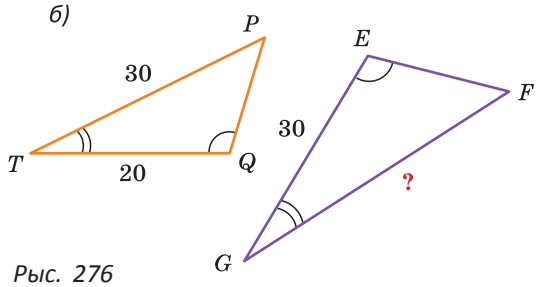
Рыс. 274



Рыс. 275

293. Па даных на рысунках 276, *а*), *б*) дакажыце падобнасць трохвугольнікаў. Знайдзіце даўжыню стараны, абазначанай пытальнікам (усе памеры дадзены ў сантыметрах).

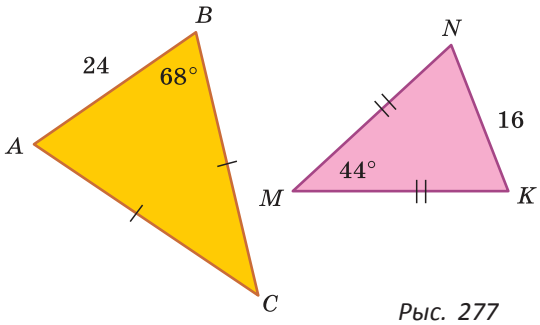




Рыс. 276

294. Дакажыце, што калі ў раўнабедраных трохвугольнікаў роўныя вуглы пры вяршыні, то такія трохвугольнікі падобныя.

295. Дакажыце, што раўнабедраныя трохвугольнікі на рысунку 277 падобныя. Знайдзіце адносіну перыметраў гэтых трохвугольнікаў: $P_{ABC} : P_{KNM}$.



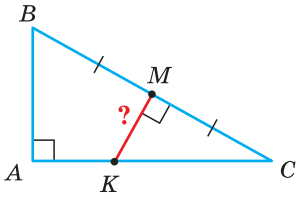
Рыс. 277

Правообладатель Народная асвета

296. Вядома, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ падобныя.

а) Калі $AB = 21$ см, $BC = 27$ см, $B_1C_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 10$ см, то чаму роўны перыметр трохвугольніка ABC?
б) Калі $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 6$ см, $A_1C_1 = 8$ см, перыметр $\triangle ABC$ роўны 27 см, то чаму роўна даўжыня найбольшай стараны $\triangle ABC$?

297. У прамавугольным трохвугольніку ABC (рыс. 278) $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. З сярэдзіны гіпатэнузы BC адноўлены перпендыкуляр MK. Знайдзіце даўжыню адрэзка MK.

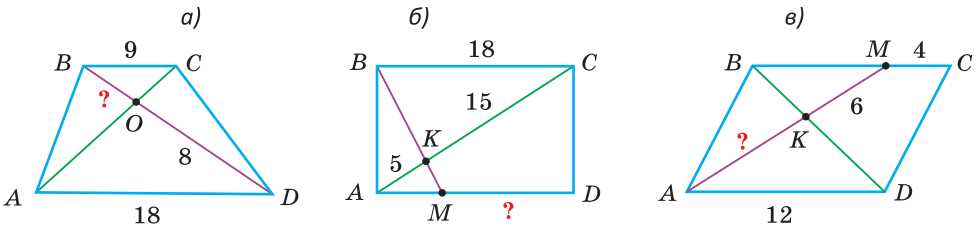


Рыс. 278

298. У трохвугольніку ABC правялі сярэднія лініі MK, KN і MN, $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in AC$. Дакажыце, што $\triangle ABC \sim \triangle NKM$.

299. Пункты M, N і K — адпаведна сярэдзіны старон AB, BC і AC трохвугольніка ABC, $MN : KN : MK = 5 : 3 : 4$, $P_{ABC} = 48$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

300. а) У трапецыі $ABCD$ (рыс. 279, *а*) $BC = 9$ см, $AD = 18$ см, $OD = 8$ см. Знайдзіце BO.
б) У прамавугольніку $ABCD$ (рыс. 279, *б*) $BC = 18$ см, $AK = 5$ см, $KC = 15$ см. Знайдзіце MD.
в) У паралелаграме $ABCD$ (рыс. 279, *в*) $AD = 12$ см, $MC = 4$ см, $KM = 6$ см. Знайдзіце AK.



Рыс. 279

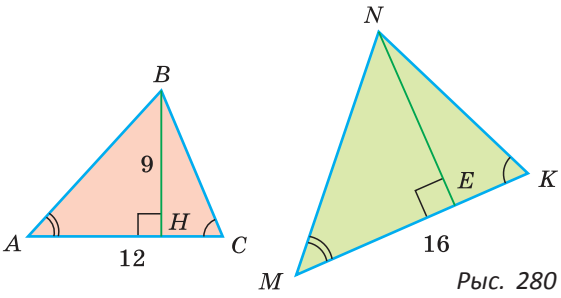
301. Дакажыце, што калі катэт a і гіпатэнуза c аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна прапарцыянальны катэту a_1 і гіпатэнузе c_1 другога прамавугольнага трохвугольніка $\left(\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}\right)$, то такія трохвугольнікі падобныя.

302. Дакажыце, што ў падобных трохвугольнікаў:

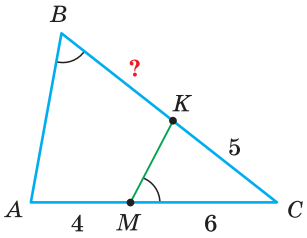
а) адпаведныя вышыні ...
б) адпаведныя бісектрысы ...
в) адпаведныя медыяны ...
адносяцца як адпаведныя сторны гэтых трохвугольнікаў.

303. Дадзены $\triangle ABC$ і $\triangle MNK$ (рыс. 280). Па памерах на рысунку знайдзіце плошчу $\triangle MNK$ (усе памеры дадзены ў сантыметрах).

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 280

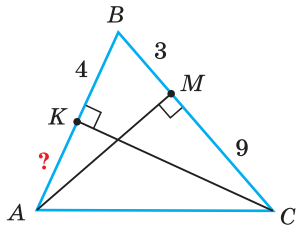


Рыс. 281

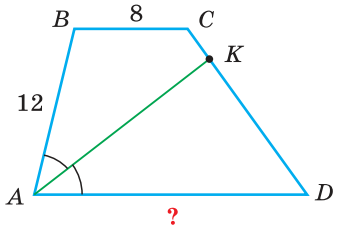
304. Дадзена трапецыя $ABCD$ з асновамі $AD = 21$ см, $BC = 7$ см. Дыяганалі трапецыі роўны $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей. Знайдзіце перыметр $\triangle AOD$.

305. На рысунку 281 $\angle KMC = \angle ABC$, $AM = 4$ см, $MC = 6$ см, $KC = 5$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка BK.

306. На рысунку 282 AM і CK — вышыні трохвугольніка ABC, $CM = 9$ см, $BM = 3$ см, $BK = 4$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AK.



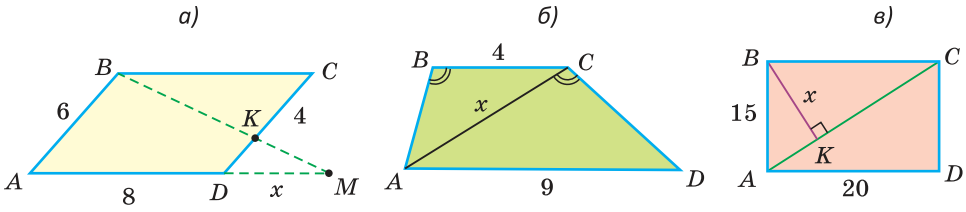
Рыс. 282



Рыс. 283

307. На рысунку 283 $ABCD$ — трапецыя, AK — бісектрыса вугла BAD, $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $CK : KD = 1 : 5$. Знайдзіце даўжыню асновы AD.

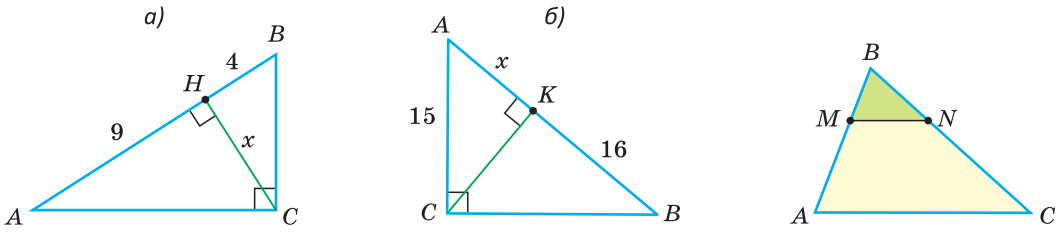
308. На рысунках 284, *а*)—*в*) паказаны паралелаграм, трапецыя і прамавугольнік. Па даных на рысунках знайдзіце даўжыню адрэзка x.



Рыс. 284

309. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік ABC ($\angle C = 90°$), правядзіце вышыню CH. Запішыце ўсе пары атрыманых падобных трохвугольнікаў і для кожнай пары запішыце адносіну адпаведных старон.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 285 Рыс. 286

310. Па памерах, пазначаных на рысунках 285, *а*), *б*), знайдзіце:
а) вышыню CH;
б) адрэзак AK (праекцыю катэта AC на гіпатэнузу AB).

311. У раўнабедраным трохвугольніку ABC, у якога $AB = BC$ і $\angle B = 36°$, правялі бісектрысу AK. Вызначыце, якія з атрыманых трохвугольнікаў падобныя.

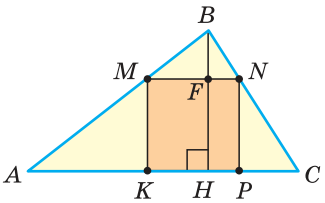
312. Перыметр трапецыі $AMNC$ роўны 22 см (рыс. 286), перыметр трохвугольніка ABC роўны 24 см, перыметр трохвугольніка MBN роўны 8 см. Знайдзіце: а) MN; б) AC.

313. а) У трохвугольніку ABC правялі адрэзак BM (M ляжыць на старане AC), $\angle BMC = \angle ABC$, $AM = 7$ м, $MC = 9$ м. Знайдзіце старану BC.
б) У трохвугольніку ABC правялі адрэзак BM (M ляжыць на старане AC), $\angle ABM = \angle ACB$, $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Знайдзіце адрэзкі AM і MC.
в) У трохвугольніку ABC правялі адрэзак BM (M ляжыць на старане AC), $\angle ABM = \angle ACB$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $BM = 3$ см. Знайдзіце старану AC.

314. а) У паралелаграме $ABCD$ на старане BC адзначаны пункт M так, што $BM : MC = 5 : 7$. Прамень DM перасякае прамень AB у пункце K. Знайдзіце BK, калі $AB = 42$ см.
б) У паралелаграме $ABCD$ на прадаўжэнні стараны AB за пункт B адзначаны пункт M. Прамая DM перасякае дыяганаль AC у пункце K так, што $AK : KC = 11 : 4$. Знайдзіце даўжыню адрэзка BM, калі $AB = 640$ м.

315*. Квадрат упісаны ў трохвугольнік, як паказана на рысунку 287. Калі $AC = 70$ см, $BH = 30$ см — вышыня, то чаму роўна даўжыня стараны квадрата?

316*. Дадзены прамавугольнік $ABCD$ з плошчай 210 см^2. На старане AD адзначаны пункт K, на старане CD — пункт M так, што $AK : KD = 2 : 1$, $CM : MD = 2 : 3$. Адрэзкі AM і BK перасякаюцца ў пункце P. Знайдзіце плошчу трохвугольніка APK.



Рыс. 287

Правообладатель Народная асвета

317*. Асновы трапецыі $ABCD$ роўны $AD = a$ см і $BC = b$ см. Адрэзак KM праходзіць праз пункт O перасячэння дыяганалей трапецыі паралельна асновам, яго канцы ляжаць на бакавых старанах трапецыі. Дакажыце, што $KM = \frac{2ab}{a+b}$.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як Фалес з Мілета вызначыў вышыню егіпецкай піраміды, уразіўшы сваімі ведамі фараона Амасіса.

Растлумачце рашэнне Фалеса пры знаходжанні вышыні піраміды. Падумайце, як Фалес знайшоў даўжыню той часткі ценю, якая знаходзіцца ў аснове піраміды і недаступна для непасрэднага вымярэння.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне падобных трохвугольнікаў.
2. Тэарэму аб прапарцыянальных адрэзках (абагульненую тэарэму Фалеса).
3. Тэарэму аб прамой, паралельнай старане трохвугольніка.
4. Тры прыметы падобнасці трохвугольнікаў.
5. Прымету падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў.

Умеем

1. Вызначаць адпаведныя стораны падобных трохвугольнікаў і запісваць адносіны іх даўжынь у выглядзе прапорцый.
2. Вызначаць, па якой прымеце трохвугольнікі падобныя.
3. Даказваць тры прыметы падобнасці трохвугольнікаў.

§ 22. Уласцівасць бісектрысы трохвугольніка

Тэарэма. Бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам.

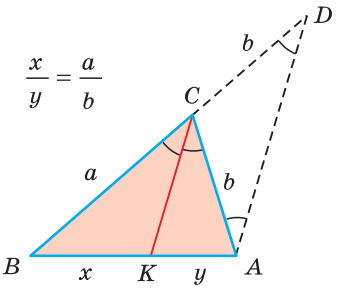
Дадзена: $\triangle ABC$, CK — бісектрыса.

Даказаць: $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$.

Доказ. З пункта A правядзём прамень, паралельны бісектрысе CK да перасячэння яго ў пункце D з прадаўжэннем стараны BC (рыс. 288, гл. с. 137). $\angle BCK = \angle BDA$ як адпаведныя пры паралельных прамых CK і DA

Правообладатель Народная асвета

і сякучай BD; $\angle KCA = \angle DAC$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых CK і DA і сякучай AC. З прычыны таго што $\angle BCK = \angle KCA$ (CK — бісектрыса), атрымаем, што $\angle CDA = \angle CAD$. Тады $\triangle ACD$ — раўнабедраны (па прымеце раўнабедранага трохвугольніка), $CD = CA$. Па абагульненай тэарэме Фалеса $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{CD}$, адкуль $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$. Тэарэма даказана.



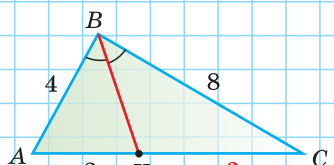
Рыс. 288

Тэарэму таксама называюць «*уласцівасцю бісектрысы вугла трохвугольніка*».

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

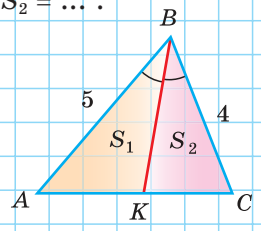
Тэст 1

Калі $\angle ABK = \angle CBK$, то KC = ...



Тэст 2

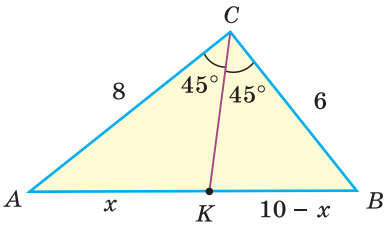
Калі BK — бісектрыса вугла ABC, то $S_1 : S_2$ = ...



Заданні да § 22

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Катэты прамавугольнага трохвугольніка роўны* 6 *і* 8. *Знайсці адрэзкі, на якія бісектрыса прамога вугла трохвугольніка дзеліць гіпатэнузу.*



Рыс. 289

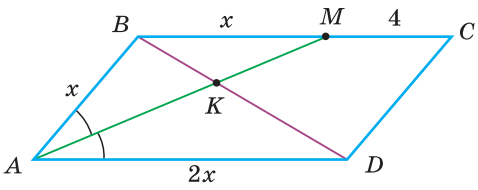
Р а ш э н н е. Няхай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $AC = 8$, CK — бісектрыса (рыс. 289). Па тэарэме Піфагора $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Абазначым $AK = x$, $KB = 10 - x$. Па ўласцівасці бісектрысы трохвугольніка $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC}$, г. зн. $\frac{x}{10 - x} = \frac{8}{6}$ або $\frac{x}{10 - x} = \frac{4}{3}$. Тады $3x = 4(10 - x)$, $7x = 40$, $x = \frac{40}{7}$. Адсюль $10 - x = 10 - \frac{40}{7} = \frac{30}{7}$.

Атрымалі: $AK = 5\frac{5}{7}$, $KB = 4\frac{2}{7}$.

А д к а з: $5\frac{5}{7}$; $4\frac{2}{7}$.

Правообладатель Народная асвета

Задача 2. *Бісектрыса вугла A паралелаграма ABCD перасякае дыяганаль BD у пункце K, а старану BC — у пункце M. Вядома, што MC = 4, BK : KD = 1 : 2. Знайсці перыметр паралелаграма* (рыс. 290).



Рыс. 290

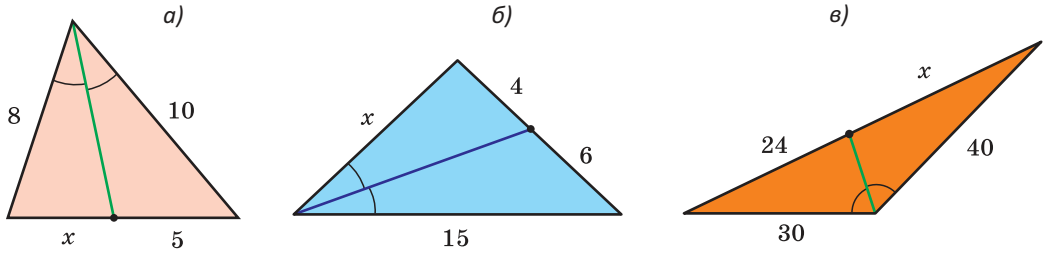
Р а ш э н н е. Разгледзім $\triangle ABD$, AK — яго бісектрыса. А бісектрыса дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам, г. зн. $\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{1}{2}$, $AB = x$, $AD = 2x$. Паколькі $\angle BAM = \angle DAM$ (AM — бісектрыса), а $\angle DAM = \angle AMB$ як накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых AD і BC і сякучай AM, то $\angle BAM = \angle BMA$. Тады $\triangle AMB$ — раўнабедраны, $AB = BM = x$, $BC = x + 4$. З другога боку, $BC = AD = 2x$. Тады $2x = x + 4$, $x = 4$, $AB = 4$, $AD = 8$, $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(4 + 8) = 24$.

А д к а з: 24.

Заўвага. Для рашэння задачы можна было карыстацца падобнасцю трохвугольнікаў BKM і DKA.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

318. На рысунках 291, *а*)—*в*) у кожным трохвугольніку праведзена бісектрыса. Знайдзіце даўжыню адрэзка x (усе памеры дадзены ў см).



Рыс. 291

319. У $\triangle ABC$ $AC = 8$ см. На старане BC адзначаны пункт F так, што $\angle BAF = \angle CAF$, $BF = 3$ см, $FC = 4$ см. Знайдзіце перыметр $\triangle ABC$.

320. У раўнабедраным $\triangle ABC$, дзе $AC = BC = 16$ см, праведзена бісектрыса BK, $AK : KC = 1 : 4$. Знайдзіце аснову AB.

321. Стораны трохвугольніка роўны 6 см, 7 см і 8 см. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў, на якія бісектрыса сярэдняга па велічыні вугла трохвугольніка дзеліць процілеглую старану.

322. Знайдзіце даўжыню бісектрысы AK прамавугольнага трохвугольніка ABC, калі катэт $AC = 6$ см, гіпатэнуза $AB = 10$ см.

Правообладатель Народная асвета

323. У трохвугольніку ABC $AC = 48$ см, $BC = 36$ см. На старане AB адзначаны пункт D, такі, што $AD : DB = 4 : 3$, $\angle BDC + \angle ACD = 104°$. Знайдзіце $\angle ACB$.

324*. Дадзены прамавугольнік $ABCD$, у якога $AB = 15$ см, $AD = 30$ см. Пункт M ляжыць на дыяганалі BD і роўнааддалены ад старон BC і CD. Знайдзіце плошчу трохвугольніка CMD.

325*. Бісектрыса знешняга вугла трохвугольніка ABC пры вяршыні B перасякае прамую AC у пункце K. Дакажыце, што $AK : CK = AB : BC$.

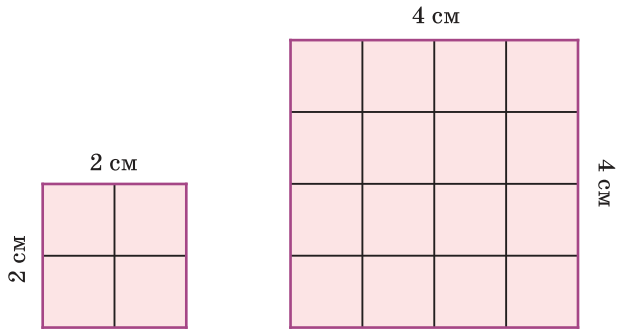
§ 23. Уласцівасць плошчаў падобных трохвугольнікаў

Часта школьнікам задаюць «правакацыйнае» пытанне: «Калі стораны квадрата павялічыць у 2 разы, то ў колькі разоў павялічыцца плошча квадрата?» Пры гэтым часта атрымліваюць адказ: «У 2 разы!», які з'яўляецца няправільным.

Пераканаемся ў гэтым. На рысунку 292 старана малога квадрата роўна 2 см, а плошча 4 см^2. Павялічыўшы ўсе стораны квадрата ў 2 разы, атрымаем вялікі квадрат са стараной 4 см і плошчай 16 см^2. Як бачым, плошча квадрата павялічылася ў 4 разы!

Лёгка зразумець, што калі стораны квадрата павялічыць у 3 разы, то яго плошча павялічыцца ў 3^2 разоў, г. зн. у 9 разоў.

Аналагічнае сцверджанне справядлівае і для трохвугольнікаў. Сфармулюем яго ў выглядзе наступнай тэарэмы.

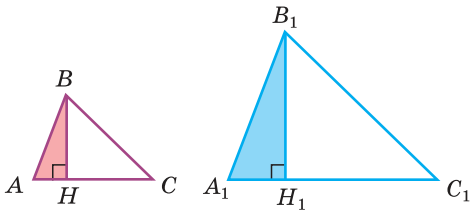


Рыс. 292

$S = 2^2 = 4\,(\text{см}^2)$ $S = 4^2 = 16\,(\text{см}^2)$

Тэарэма (аб плошчах падобных трохвугольнікаў).
Плошчы падобных трохвугольнікаў адносяцца як квадраты адпаведных старон.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 293

Дадзена: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (рыс. 293).

Даказаць: $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}$.

Доказ. Няхай k — каэфіцыент падобнасці $\triangle A_1B_1C_1$ і $\triangle ABC$, дзе $\angle A$ — востры. Тады $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$. Правядзём вышыні BH і B_1H_1 дадзеных трохвугольнікаў. Паколькі $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, то $\angle A_1 = \angle A$. Прамавугольныя трохвугольнікі $A_1B_1H_1$ і ABH падобныя па вострым вугле. Адсюль $\frac{B_1H_1}{BH} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$, $B_1H_1 = k \cdot BH$.

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1H_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (k \cdot AC) \cdot (k \cdot BH)}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = k^2 = \left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2 = \frac{A_1C_1^2}{AC^2}.$$

Тэарэма даказана.

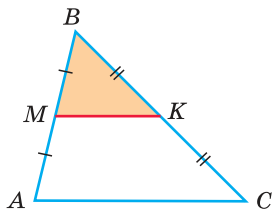
Існуе і іншая фармулёўка гэтай тэарэмы.

Адносіна плошчаў падобных трохвугольнікаў роўна квадрату каэфіцыента падобнасці.

Заданні да § 23

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што сярэдняя лінія трохвугольніка адсякае ад яго трохвугольнік, плошча якога складае $\frac{1}{4}$ плошчы дадзенага.*

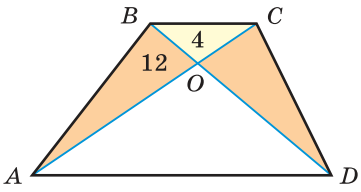


Рыс. 294

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC (рыс. 294) MK — сярэдняя лінія. Сярэдняя лінія паралельна аснове і роўна яе палавіне, г. зн. $MK \parallel AC$ і $MK = \frac{1}{2}AC$. Прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму. Тады $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Паколькі плошчы падобных трохвугольнікаў адносяцца як квадраты адпаведных старон, то $\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \frac{MK^2}{AC^2} = \left(\frac{MK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, г. зн. $S_{MBK} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Што і трэба было даказаць.

Задача 2. *Дадзена трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC* (рыс. 295). *Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце O, $S_{BOC} = 4$ см^2, $S_{AOB} = 12$ см^2. Знайсці плошчу трапецыі.*

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 295

Р а ш э н н е. *Спосаб* 1. Дыяганалі трапецыі дзеляць яе на 4 трохвугольнікі. Раней было даказана, што трохвугольнікі, прылеглыя да бакавых старон, роўнавялікія, а прылеглыя да асноў — падобныя. Інакш кажучы, $S_{AOB} = S_{DOC}$, $\triangle BOC \sim \triangle DOA$. Адсюль $S_{DOC} = 12$ см^2. Далей заўважым, што $\triangle BOC$ і $\triangle AOB$ маюць агульную вышыню, апушчаную з вяршыні B. Таму іх плошчы адносяцца як адпаведныя гэтай вышыні асновы: $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CO}{AO}$. Інакш кажучы, $\frac{CO}{AO} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Стораны CO і AO з'яўляюцца адпаведнымі старанамі падобных трохвугольнікаў BOC і DOA (яны ляжаць насупраць роўных вуглоў OBC і ODA). Па тэарэме аб плошчах падобных трохвугольнікаў $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \frac{CO^2}{AO^2} = \left(\frac{CO}{AO}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Адсюль $S_{DOA} = 9S_{BOC} = 9 \cdot 4 = 36$ (см^2). Шуканая плошча трапецыі: $S_{ABCD} = 12 + 12 + 4 + 36 = 64$ (см^2).

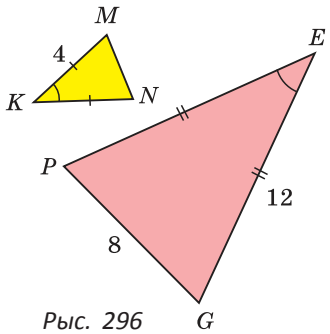
Спосаб 2. Трохвугольнікі COD і AOD маюць агульную вышыню, праведзеную з вяршыні D. Тады іх плошчы адносяцца як асновы CO і AO, г. зн. 1 : 3. Значыць, $S_{AOD} = 3S_{COD} = 3 \cdot 12 = 36$ (см^2), $S_{ABCD} = 64$ (см^2).
А д к а з: 64 см^2.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

326. Як зменіцца плошча трохвугольніка, калі ўсе яго стораны:
а) павялічыць у 2 разы;
б) павялічыць у 3 разы;
в) павялічыць у 2,5 раза;
г) паменшыць у 10 разоў?

327. Для $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ выконваецца $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1{,}5$ см, $S_{ABC} = 90$ см^2. Знайдзіце $S_{A_1B_1C_1}$.

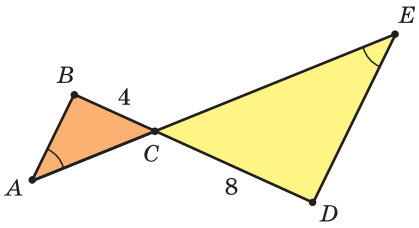
328. а) Перыметры двух падобных трохвугольнікаў адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце адносіну плошчаў дадзеных трохвугольнікаў.
б) Плошчы двух падобных трохвугольнікаў адносяцца як 64 : 25. Знайдзіце адносіну перыметраў гэтых трохвугольнікаў.



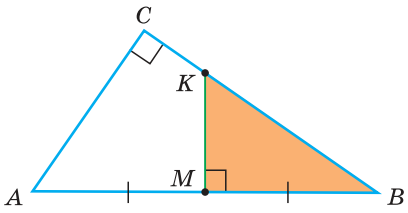
Рыс. 296

329. Знайдзіце адносіну плошчы $\triangle KMN$ да плошчы $\triangle EPG$ (рыс. 296), калі $\angle K = \angle E$.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 297



Рыс. 298

330. На рысунку 297 $\angle A = \angle E$, $BC = 4$ см, $CD = 8$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2. Знайдзіце S_{EDC}.

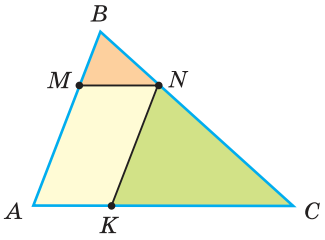
331. На рысунку 298 $\angle C = 90°$, $AC = 6$ м, $BC = 8$ м, $AM = MB$, $KM \perp AB$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка KMB.

332. На рысунку 299 $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$, $MB : AM = 1 : 2$, $S_{ABC} = 360$ см^2. Знайдзіце S_{AMNK}.

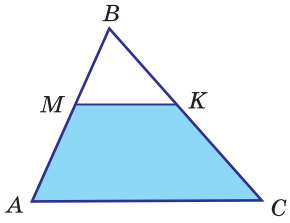
333. Плошча трапецыі $AMKC$ (рыс. 300) роўна 80 м^2, $AM : MB = 4 : 3$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка MBK.

334. На рысунку 301 $AMKE$ — паралелаграм, $S_{MBK} = S_1 = 16$ см^2, $S_{EKC} = S_2 = 9$ см^2.

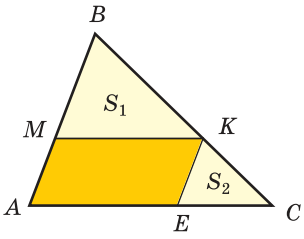
а) Знайдзіце плошчу паралелаграма $AMKE$.
б) Выразіце плошчу паралелаграма S_{AMKE} праз S_1 і S_2.
в) Выразіце плошчу трохвугольніка ABC праз S_1 і S_2.



Рыс. 299



Рыс. 300



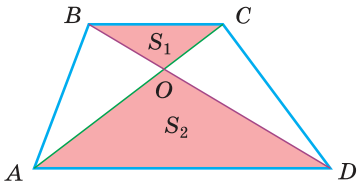
Рыс. 301

335. а) У трапецыі $ABCD$ (рыс. 302) $BC = \frac{1}{3}AD$, $S_1 + S_2 = 60$ см^2. Знайдзіце плошчу S трапецыі $ABCD$.
б)* Выведзіце формулу залежнасці плошчы S трапецыі $ABCD$ ад плошчаў S_1 і S_2.

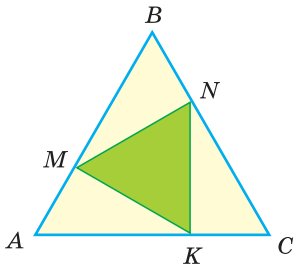
336. На рысунку 303 $\triangle ABC$ — роўнастаронні, $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$. Калі плошча трохвугольніка ABC роўна 72 см^2, то чаму роўна плошча трохвугольніка MNK?

337. Праз цэнтр роўнастаронняга трохвугольніка (пункт перасячэння медыян) правялі прамыя, паралельныя яго старанам (рыс. 304).

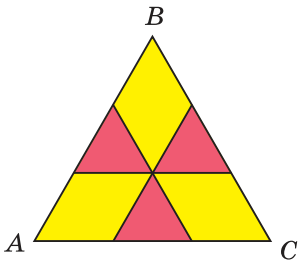
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 302



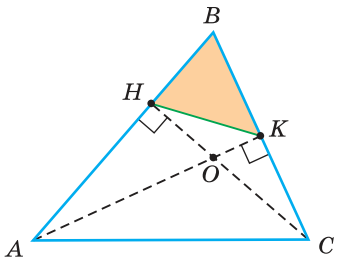
Рыс. 303



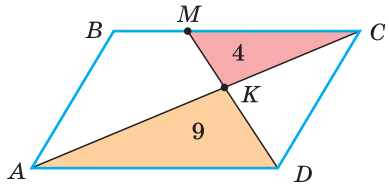
Рыс. 304

Якую частку плошчы трохвугольніка ABC займае частка, занятая чырвонымі трохвугольнікамі?

338*. AK і CH — вышыні трохвугольніка ABC (рыс. 305), $BK : AB = 2 : 5$, $S_{ABC} = 50$ см^2. Знайдзіце плошчу трохвугольніка HBK.



Рыс. 305



Рыс. 306

339*. У паралелаграме $ABCD$ праведзены адрэзак DM (рыс. 306), які перасякае дыяганаль AC у пункце K. Вядома, што $S_{MCK} = 4$ см^2, $S_{DKA} = 9$ см^2. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$.

340*. У прамавугольным трохвугольніку ABC да гіпатэнузы праведзена вышыня BH. Вядома, што $S_{ABH} = 4$ см^2, $S_{CBH} = 16$ см^2. Знайдзіце гіпатэнузу AC.

341*. Дадзена трапецыя $ABCD$ з асновамі $BC = 4$ см і $AD = 8$ см і вышынёй, роўнай 3 см. Бакавыя стораны трапецыі прадоўжылі да перасячэння ў пункце K. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BKC.

342*. Асновы трапецыі роўны a і b. Знайдзіце даўжыню адрэзка з канцамі на бакавых старанах трапецыі, паралельнага асновам, які дзеліць трапецыю на дзве роўнавялікія часткі.

343*. Падзяліце пры дапамозе цыркуля і лінейкі дадзены трохвугольнік на дзве роўнавялікія часткі прамой, паралельнай яго старане.

Правообладатель Народная асвета

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

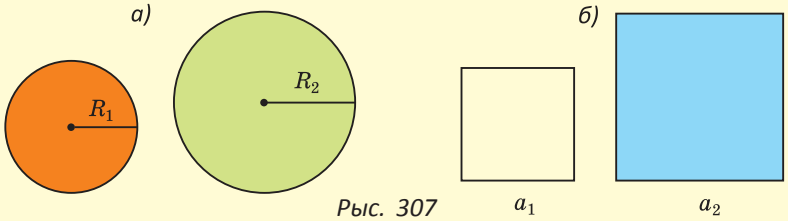
1. Уласцівасць бісектрысы трохвугольніка.
2. Тэарэму аб адносіне плошчаў падобных трохвугольнікаў.
3. У колькі разоў павялічыцца плошча трохвугольніка, калі яго стораны павялічыць у 2 разы, у 3 разы, у k разоў.

Умеем

1. Знаходзіць плошчу аднаго з двух падобных трохвугольнікаў, калі вядома плошча другога і адносіна адпаведных старон.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці бісектрысы трохвугольніка.
3. Даказваць тэарэму аб адносіне плошчаў падобных трохвугольнікаў.

Геаметрыя 3D

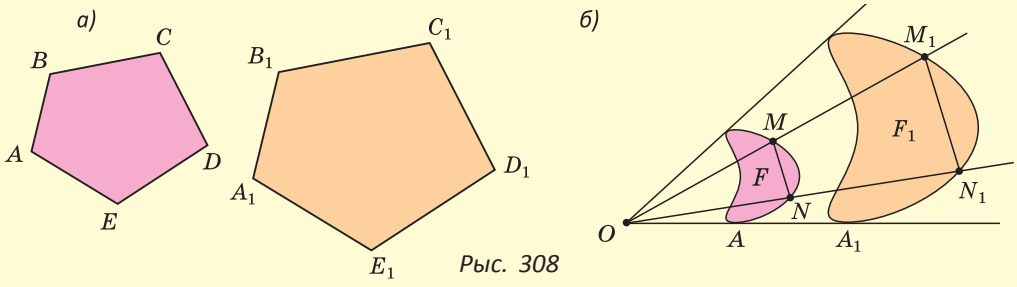
Як ужо гаварылася, любыя два кругі з'яўляюцца падобнымі (рыс. 307, *а*). Падобнымі таксама з'яўляюцца любыя два квадраты (рыс. 307, *б*). Каэфіцыент падобнасці ў першым выпадку можа быць вызначаны як адносіна радыусаў кругоў, а ў другім — як адносіна старон квадратаў, г. зн. $k = \frac{R_1}{R_2}$ або $k = \frac{a_1}{a_2}$.



Рыс. 307

Два многавугольнікі называюцца падобнымі, калі ў іх адпаведныя вуглы роўныя, а адпаведныя стораны прапарцыянальныя (рыс. 308, *а*).

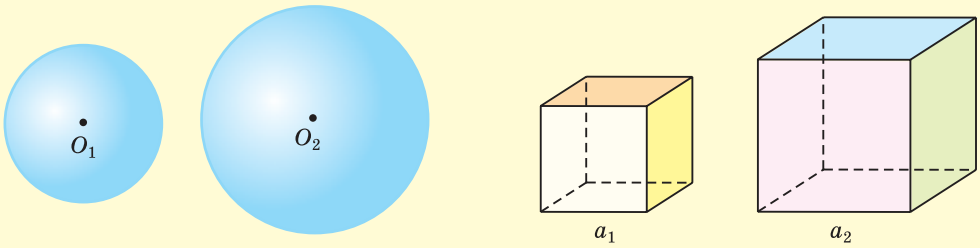
Фігуры F і F_1 называюцца *падобнымі*, калі паміж іх пунктамі можна ўстанавіць такую адпаведнасць, што для любых пар пунктаў M, N і M_1, N_1 (рыс. 308, *б*) выконваецца ўмова $\frac{M_1N_1}{MN} = k$. Лік k — каэфіцыент падобнасці. Можна даказаць, што адносіна перыметраў падобных фігур роўна k, а адносіна іх плошчаў — k^2.



Рыс. 308

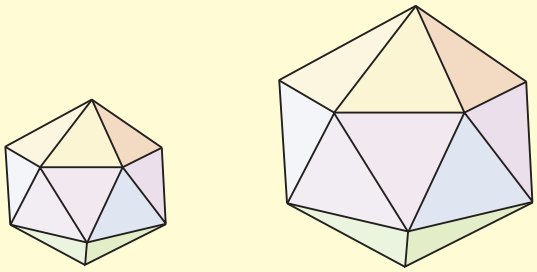
Правообладатель Народная асвета

Падобнасць таксама ўстанаўліваецца і для прасторавых фігур. Так, падобнымі з'яўляюцца любыя два шары або любыя два кубы (рыс. 309).



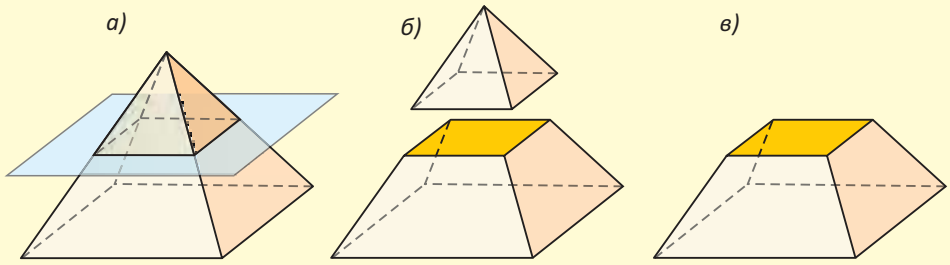
Рыс. 309

Павялічыўшы даўжыню ўсіх кантаў любога мнагагранніка ў адну і тую ж колькасць разоў і захаваўшы велічыні ўсіх вуглоў, атрымаем мнагагранні, падобны дадзенаму (рыс. 310).



Рыс. 310

Мы ведаем, што прамая, паралельная аснове трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму. Аналагічна, у прасторы плоскасць, паралельная аснове піраміды, адсякае ад яе піраміду, падобную дадзенай (рыс. 311, *а*, *б*). Гэта значыць, адсечаная піраміда будзе мець такую ж форму, але будзе адрозніваца памерамі. Калі адкінуць адсечаную піраміду, то атрымаецца ўсечаная піраміда (рыс. 311, *в*).



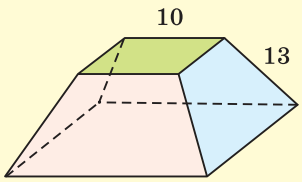
Рыс. 311

Усечаная піраміда мае дзве асновы: верхнюю і ніжнюю, якія з'яўляюцца падобнымі многавугольнікамі, а бакавыя грані з'яўляюцца трапецыямі.

У аснове *правільнай чатырохвугольнай піраміды* ляжыць квадрат, і ўсе яе бакавыя канты роўныя. Калі ад яе адсячы плоскасцю, паралельнай аснове, піраміду, то атрымаецца *правільная ўсечаная піраміда*. Асновы яе — квадраты, а бакавыя грані — роўныя раўнабедраныя трапецыі.

Правообладатель Народная асвета

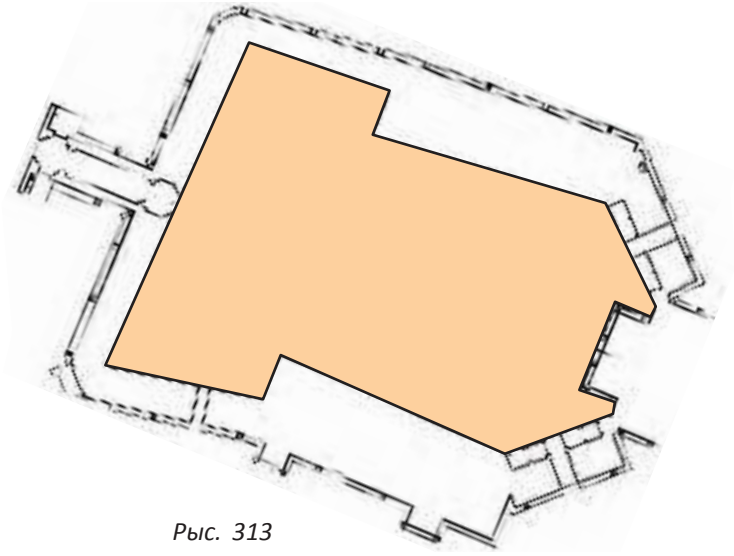
Задача. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні правільнай усечанай чатырохвугольнай піраміды (рыс. 312), у якой стораны асноў роўны 20 см і 10 см, а бакавы кант роўны 13 см.



Рыс. 312

Мадэляванне

На рысунку 313 паказаны план участка пад Нясвіжскім замкам у маштабе 1 : 1500. Пры дапамозе лінейкі вызначыце памеры ўнутранага двара (вылучаны карычневым колерам) і знайдзіце яго плошчу, выкарыстаўшы формулы плошчы прамавугольніка і трапецыі. Знайдзіце перыметр і плошчу сапраўднага ўчастка пры дапамозе ўласцівасцей падобных многавугольнікаў.



Рыс. 313

Цікава ведаць. Нясвіжскі замак — палацава-паркавы комплекс, які знаходзіцца ў паўночна-ўсходняй частцы горада Нясвіжа Мінскай вобласці Беларусі. У XVI—XIX стагоддзях — цэнтр рэзідэнцыі яе ўладальнікаў з роду Радзівілаў. Архітэктурны ансамбль Нясвіжскага замка ў цяперашні час з'яўляецца гісторыка-культурным музеем-запаведнікам. З 2005 года ўнесены ў спіс Сусветнай спадчыны ЮНЕСКА. Нясвіжскі замак намаляваны на нашай 100-рублёвай купюры.

Правообладатель Народная асвета

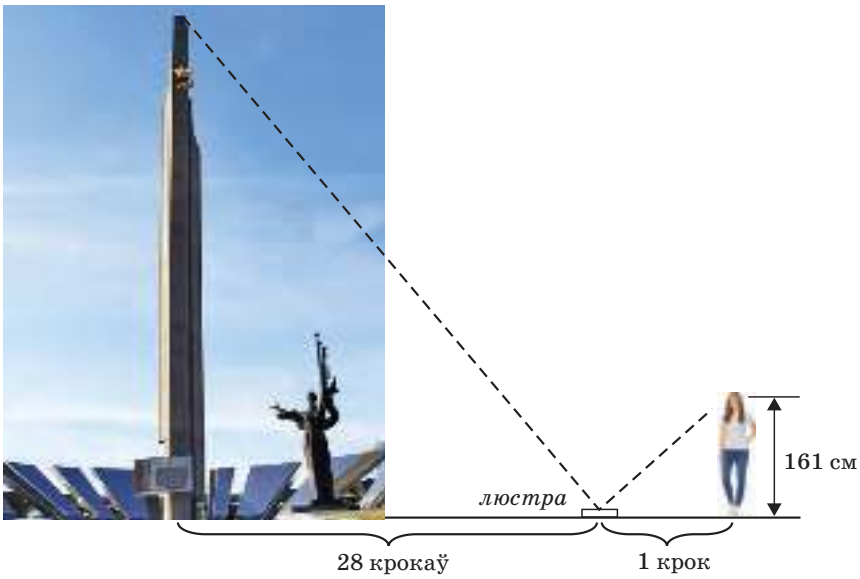
Рэальная геаметрыя

Задача для дзяўчынак. Паглядзеўшы на рысунак, складзіце план, як пры дапамозе люстра, ведаючы ўласны рост, шырыню свайго кроку, вызначыць прыкладную вышыню стэлы «Мінск — горад герой» — галоўнага сімвала сталіцы Беларусі.

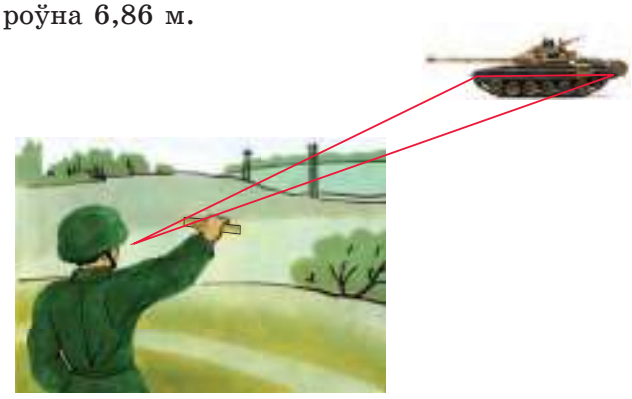
Знайдзіце вышыню стэлы, выкарыстаўшы даныя на рысунку.

Пры рашэнні задачы ўлічыце закон адбіцця сонечнага святла, які гучыць так: «вугал падзення роўны вуглу адбіцця».

Замест люстра можна выкарыстаць экран тэлефона або планшэта.



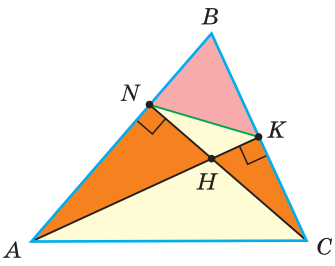
Задача для хлопчыкаў. У арміі вучаць вызначаць адлегласць да салдата праціўніка або да танка пры дапамозе выцягнутай рукі і лінейкі (патрона або нават пальца). Вызначыце адлегласць ад назіральніка да танка, калі даўжыня часткі лінейкі, якая перакрывае танк, роўна 5 см, даўжыня рукі ад пляча да лінейкі — 50 см і вядома, што даўжыня дадзенага танка роўна 6,86 м.



Правообладатель Народная асвета

§ 24*. Рашэнне задач па тэме «Падобнасць трохвугольнікаў»

Задача 1. *У вастравугольным трохвугольніку ABC праведзены вышыні AK і CN, якія перасякаюцца ў пункце H* (рыс. 314). *Даказаць, што:*
а) $AH \cdot KH = CH \cdot NH$; б) $\triangle KBN \sim \triangle ABC$; в) $\angle NKB = \angle CAB$.



Рыс. 314

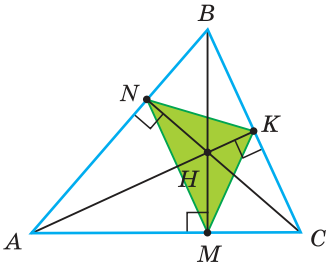
Доказ. а) $\triangle AHN \sim \triangle CHK$ па вострым вугле ($\angle AHN = \angle CHK$ як вертыкальныя). Адсюль $\frac{NH}{AH} = \frac{KH}{CH}$, $AH \cdot KH = CH \cdot NH$;

б) $\triangle ABK \sim \triangle CBN$ па вострым вугле ($\angle B$ — агульны). Таму $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC}$. Тады $\triangle KBN \sim \triangle ABC$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі;

в) паколькі $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{KN}{AC}$, то $\angle NKB = \angle CAB$.

Вынік.

Трохвугольнік NKM (рыс. 315) *з вяршынямі ў асновах вышынь дадзенага вастравугольнага трохвугольніка ABC мае вуглы, роўныя* $180° - 2\angle A$, $180° - 2\angle B$, $180° - 2\angle C$. *Яго бісектрысы ляжаць на вышынях трохвугольніка ABC.*



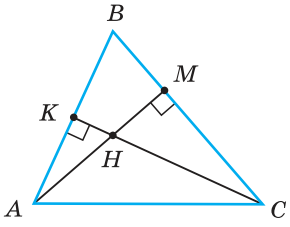
Рыс. 315

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

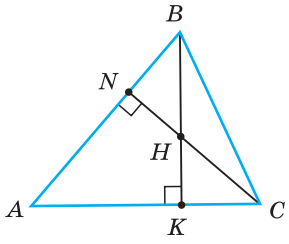
344. На рысунку 316 $KH = 2$, $HC = 10$, $AH = 5$. Знайдзіце HM.

345. На рысунку 317 $CH = 12$, $BH \cdot HK = 108$. Знайдзіце CN.

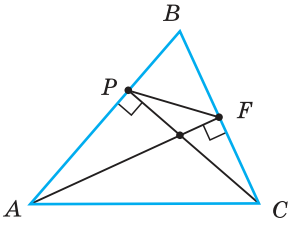
346. На рысунку 318 $BP = 4$, $BC = 10$, $PF = 6$. Знайдзіце AC.



Рыс. 316



Рыс. 317



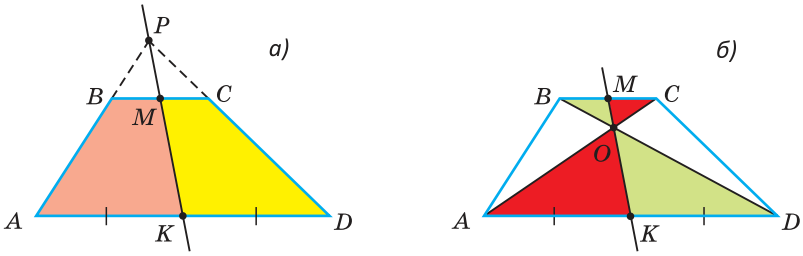
Рыс. 318

Задача 2. *а) Даказать, што пункт перасячэння прадаўжэнняў бакавых старон трапецыі і сярэдзіны асноў ляжаць на адной прамой. б) Даказать, што пункт перасячэння дыяганалей трапецыі і сярэдзіны асноў ляжаць на адной прамой.*

Правообладатель Народная асвета

Доказ.

а) Няхай K — сярэдзіна асновы AD трапецыі $ABCD$, P — пункт перасячэння прадаўжэнняў бакавых старон трапецыі, прамая PK перасякае адрэзак BC у пункце M. Дакажам, што M — сярэдзіна BC (рыс. 319, *а*).



Рыс. 319

Паколькі $\triangle BPM \sim \triangle APK$ ($BC \parallel AD$), то $\frac{BM}{AK} = \frac{PM}{PK}$. Аналагічна, паколькі $\triangle CPM \sim \triangle DPK$, то $\frac{CM}{DK} = \frac{PM}{PK}$. Адсюль $\frac{BM}{AK} = \frac{CM}{DK}$ або $\frac{BM}{CM} = \frac{AK}{DK}$. Але $\frac{AK}{DK} = 1$, адкуль $\frac{BM}{CM} = 1$, $BM = MC$, пункт M — сярэдзіна BC.

б) Няхай K — сярэдзіна асновы AD трапецыі $ABCD$, O — пункт перасячэння дыяганалей, і прамая KO перасякае адрэзак BC у пункце M. Дакажам, што M — сярэдзіна BC (рыс. 319, *б*).

Паколькі $\triangle BOM \sim \triangle DOK$ (па двух вуглах), то $\frac{BM}{DK} = \frac{MO}{KO}$. Аналагічна, паколькі $\triangle COM \sim \triangle AOK$, то $\frac{CM}{AK} = \frac{MO}{KO}$. Адсюль $\frac{BM}{DK} = \frac{CM}{AK}$ або $\frac{BM}{CM} = \frac{DK}{AK}$. Але $\frac{DK}{AK} = 1$, адкуль $\frac{BM}{CM} = 1$, $BM = MC$, пункт M — сярэдзіна BC.

Вынікі.

1. *Пункт перасячэння прадаўжэнняў бакавых старон трапецыі, пункт перасячэння дыяганалей і сярэдзіны асноў трапецыі ляжаць на адной прамой.*

2. *У трохвугольніку медыяна дзеліць папалам любы адрэзак з канцамі на старанах трохвугольніка, паралельны старане, да якой праведзена медыяна.*

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

347. У трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 20$, $BC = 12$, $\angle A = 65°$, $\angle D = 25°$. Знайдзіце даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны асноў.

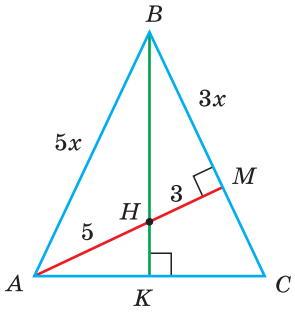
348. Дыяганалі трапецыі ўзаемна перпендыкулярныя і роўныя 6 і 8. Знайдзіце даўжыню адрэзка, які злучае сярэдзіны асноў.

Правообладатель Народная асвета

Метад падобнасці

Калі пры рашэнні геаметрычнай задачы, якая можа быць рэшана рознымі спосабамі, выкарыстоўваюць падобнасць трохвугольнікаў, то гавораць, што задача рэшана *метадам падобнасці.*

Задача 3. *Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC ($AB = BC$), вышыні BK і AM перасякаюцца ў пункце H* (рыс. 320). *Знайсці вышыню BK, калі $AH = 5$, $HM = 3$.*



Рыс. 320

Р а ш э н н е. Паколькі вышыня BK будзе і бісектрысай, то BH — бісектрыса трохвугольніка ABM. Па ўласцівасці бісектрысы трохвугольніка атрымаем: $\frac{AB}{BM} = \frac{AH}{HM} = \frac{5}{3}$. Няхай $AB = 5x$, $BM = 3x$.

Па тэарэме Піфагора для трохвугольніка AMB: $AB^2 = AM^2 + BM^2$, $(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$, $x^2 = 4$, $x = 2$.

Тады $AB = 5 \cdot 2 = 10$, $BM = 3 \cdot 2 = 6$.

Па тэарэме Піфагора для трохвугольніка HMB:

$$BH = \sqrt{BM^2 + HM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Трохвугольнікі BKC і BMH падобныя па вострым вугле ($\angle KBC$ — агульны). З падобнасці вынікае, што $\frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BH}$, г. зн. $\frac{BK}{10} = \frac{6}{3\sqrt{5}}$. Адсюль $BK = \frac{10 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$.

А д к а з: $4\sqrt{5}$.

Заўвага. Знайсці BK можна і не выкарыстоўваючы падобнасць. *Спосаб* 2: $MC = 4$, $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = 4\sqrt{5}$, $KC = 2\sqrt{5}$, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = 4\sqrt{5}$. *Спосаб* 3 (*метад плошчаў*): $MC = 4$, $AC = 4\sqrt{5}$, $2S_{ABC} = AC \cdot BK = BC \cdot AM$, $4\sqrt{5} \cdot BK = 10 \cdot 8$, $BK = 4\sqrt{5}$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

349. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC, $AB = BC = 20$. Плошча трохвугольніка роўна 160. Вышыні BK і AM перасякаюцца ў пункце H. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABH.

350. У раўнабедраным трохвугольніку ABC ($AB = BC$) вышыні BE і AK перасякаюцца ў пункце M, $BM = 4$, $ME = 2$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

Правообладатель Народная асвета

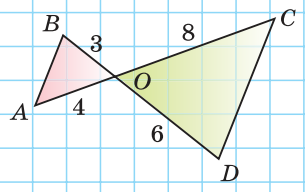
ЗАПАМІНАЕМ

1. У падобных трохвугольнікаў адпаведныя вуглы роўныя, а стораны прапарцыянальныя.
2. Паралельныя прамыя адсякаюць на старанах вугла прапарцыянальныя адрэзкі.
3. Прамая, паралельная старане трохвугольніка, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму.
4. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў:
   1) па двух вуглах;
   2) па дзвюх старанах і вугле паміж імі;
   3) па трох старанах.
5. Прамавугольныя трохвугольнікі падобныя па вострым вугле.
6. Бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам.
7. Плошчы падобных трохвугольнікаў адносяцца як квадраты адпаведных старон.

Правяраем сябе

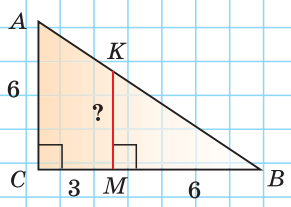
Тэст 1

Па даных на рысунку дакажыце, што $AB \parallel CD$.



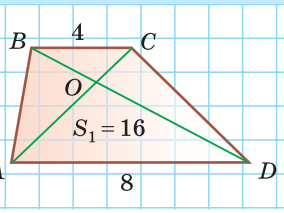
Тэст 2

Па даных на рысунку знайдзіце даўжыню адрэзка KM.



Тэст 3

$S_{AOD} = 16$ см^2. Знайдзіце плошчу трапецыі $ABCD$.



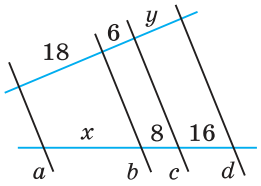
Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя. 8 кл.» можна знайсці на сайце: http://e-vedy.adu.by, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 8 кл.».

Правообладатель Народная асвета

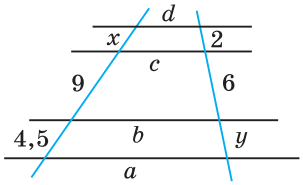
ПАДРЫХТОЎКА ДА КАНТРОЛЬНАЙ РАБОТЫ № 3

1. Знайдзіце значэнне $x + y$, калі $a \parallel b \parallel c \parallel d$.

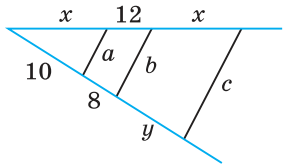
а)



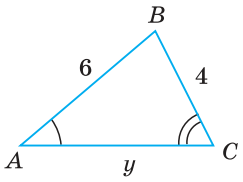
б)

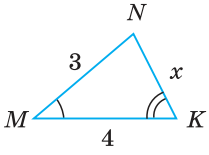


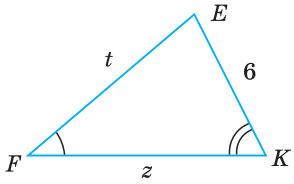
в)



2. $\triangle ABC \sim \triangle MNK$, $\triangle MNK \sim \triangle FEK$. Знайдзіце:
а) x і y; б) t і z; в) $P_{ABC} : P_{FEK}$.

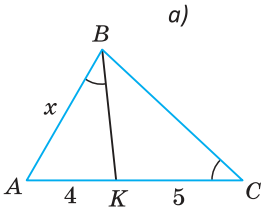




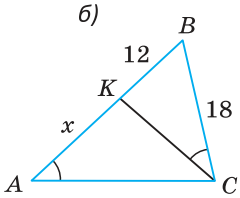


3. Знайдзіце даўжыню адрэзка x.

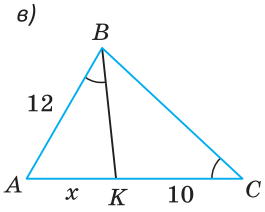
а)



б)

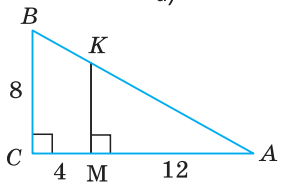


в)

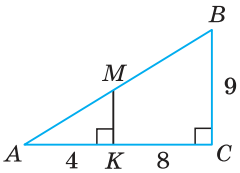


4. Знайдзіце S_{AMK}.

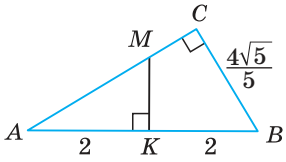
а)



б)

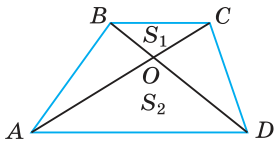


в)

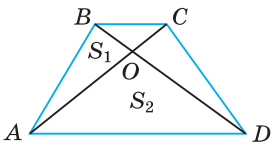


5. Знайдзіце адносіну $BC : AD$, калі:
а) $S_1 = 4$, $S_2 = 25$; б) $S_1 = 6$, $S_2 = 18$; в) $S_1 = 8$, $S_2 = 16$.

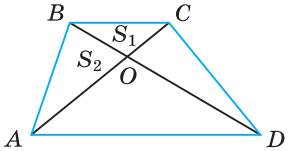
а)



б)



в)



Правообладатель Народная асвета

Глава IV

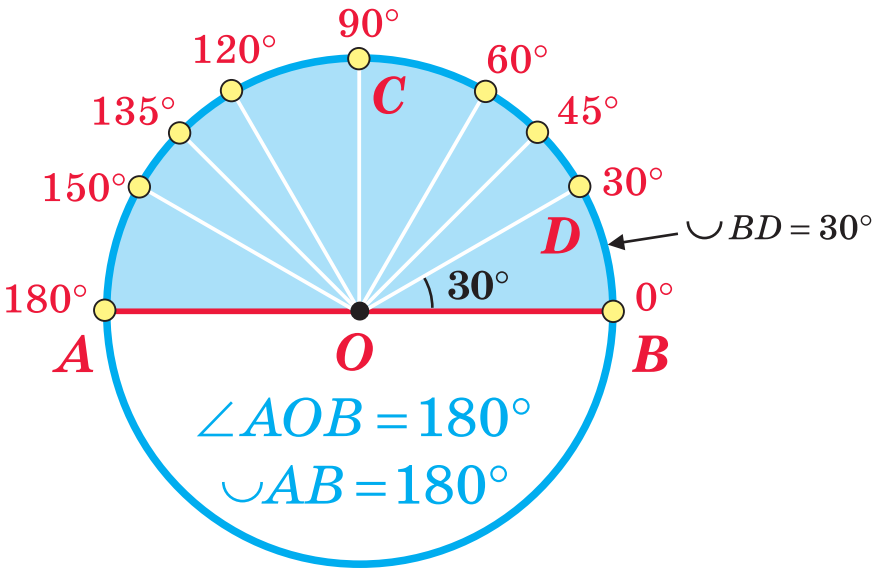
Акружнасць

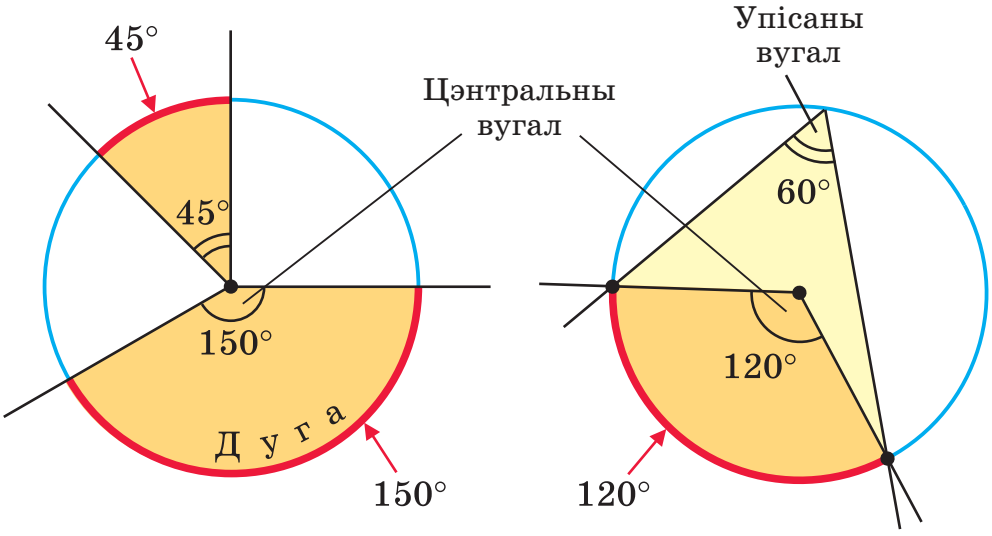
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Якая прамая называецца датычнай да акружнасці
- Які вугал называюць упісаным у акружнасць
- Пра ўласцівасць перасякальных хорд акружнасці

Правообладатель Народная асвета

Вуглы ў акружнасці





Упісаны $= \frac{1}{2}$ **Цэнтральнага**

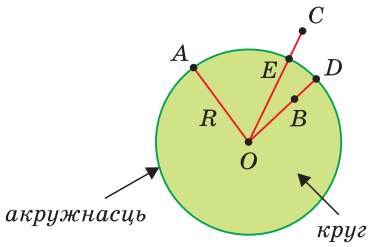
Правообладатель Народная асвета

§ 25. Датычная да акружнасці

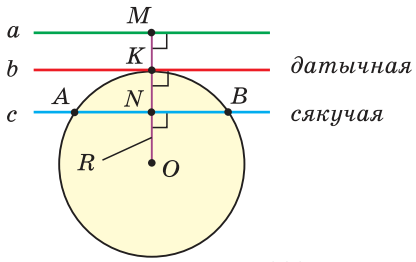
Акружнасць — гэта фігура, якая складаецца з усіх пунктаў плоскасці, што знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад яе цэнтра, роўнай радыусу акружнасці. Калі адлегласць ад цэнтра да пункта большая за радыус акружнасці, то гавораць, што пункт знаходзіцца *па-за* акружнасцю, а калі меншая за радыус, то — *унутры* акружнасці. Усе пункты плоскасці, якія знаходзяцца ад цэнтра акружнасці на адлегласці, меншай або роўнай радыусу, утвараюць *круг*.

На рысунку 321 пункты A, E, D належаць акружнасці з радыусам R і цэнтрам O, пункт B знаходзіцца ўнутры акружнасці (унутры круга), пункт C — па-за акружнасцю (па-за кругам), $OA = OE = OD = R$, $OB < R$, $OC > R$.

Можна пераканацца, што прамая і акружнасць могуць мець толькі тры розныя ўзаемныя становішчы (рыс. 322): прамая і акружнасць не маюць агульных пунктаў (прамая a), маюць адзін агульны пункт (прамая b), маюць два агульныя пункты (прамая c).



Рыс. 321



Рыс. 322

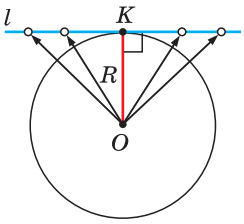
У першым выпадку адлегласць ад цэнтра да прамой большая за радыус ($OM > R$), у другім — роўна радыусу ($OK = R$), у трэцім — меншая за радыус ($ON < R$). Гавораць, што прамая b датыкаецца да акружнасці ў пункце K, дзе K — пункт дотыку прамой і акружнасці, а прамая c перасякае акружнасць у пунктах A і B.

Азначэнне. Прамая, якая праходзіць праз два пункты акружнасці, называецца сякучай да акружнасці.

Азначэнне. Прамая, якая мае з акружнасцю толькі адзін агульны пункт, называецца **датычнай** да акружнасці.

Тэарэма (прымета датычнай).
Калі прамая праходзіць праз пункт акружнасці і перпендыкулярна да радыуса, праведзенага ў гэты пункт, то яна з'яўляецца датычнай да акружнасці.

Правообладатель Народная асвета



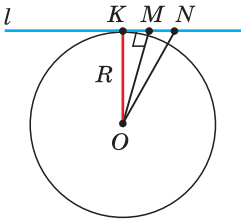
Рыс. 323

Доказ. Няхай OK — радыус акружнасці, прамая l праходзіць праз пункт K і перпендыкулярна да OK (рыс. 323). Трэба даказаць, што l — датычная.

Паколькі нахіленая даўжэйшая за перпендыкуляр, то адлегласць ад пункта O да ўсіх астатніх пунктаў прамой l большая за радыус OK. Таму ўсе пункты прамой, акрамя пункта K, ляжаць па-за акружнасцю. Такім чынам, прамая l і акружнасць маюць адзіны агульны пункт K, і прамая l па азначэнні з'яўляецца датычнай. Тэарэма даказана.

Даказаная тэарэма гарантуе, што датычная да акружнасці існуе ў кожным яе пункце, і дае спосаб пабудовы датычнай.

Тэарэма (уласцівасць датычнай).
Датычная да акружнасці перпендыкулярна да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку.



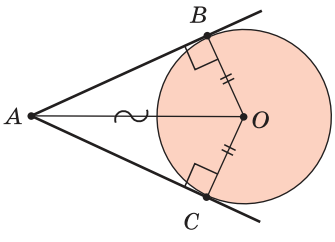
Рыс. 324

Доказ. Няхай l — датычная да акружнасці з цэнтрам у пункце O, дзе K — пункт дотыку, OK — радыус (рыс. 324). Трэба даказаць, што $OK \perp l$.

Няхай радыус OK не перпендыкулярны да l, а перпендыкулярам з'яўляецца адрэзак OM. На прамой l адкладзём $MN = KM$. Атрымаем роўныя прамавугольныя трохвугольнікі OMK і OMN (па двух катэтах), адкуль $ON = OK$. Паколькі адрэзак ON роўны радыусу, то пункт N належыць акружнасці. Тады прамая l і акружнасць маюць, прынамсі, два агульныя пункты, што супярэчыць азначэнню датычнай. Значыць, $OK \perp l$. Тэарэма даказана.

Заўважым, што з пункта па-за акружнасцю да адной акружнасці можна правесці роўна дзве датычныя, якія валодаюць наступнай уласцівасцю.

Тэарэма (аб датычных, праведзеных з аднаго пункта).
Адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці (якім адпавядаюць дадзены пункт і пункт дотыку), роўныя паміж сабой.



Рыс. 325

Доказ. Няхай AB і AC — датычныя да акружнасці, дзе B і C — пункты дотыку. Трэба даказаць, што $AB = AC$ (рыс. 325). Правядзём адрэзак AO і радыусы OB і OC. Паколькі радыус акружнасці, праведзены ў пункт дотыку, перпендыкулярны да датычнай, то $OB \perp AB$, $OC \perp AC$. Прамавугольныя трохвугольнікі ABO і ACO роўныя па катэце ($OB = OC$ як радыусы) і гіпатэнузе (гіпатэнуза AO — агульная). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $AB = AC$. Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

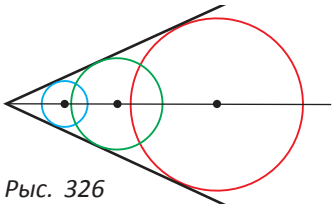
Гавораць, што акружнасць датыкаецца да праменя (адрэзка), калі яна датыкаецца да прамой, якая змяшчае гэты прамень (адрэзак) у пункце, які належыць праменю (адрэзку).

Азначэнне. Калі акружнасць датыкаецца да старон вугла, то яна называецца **ўпісанай у вугал**.

Тэарэма (аб акружнасці, упісанай у вугал).
Цэнтр акружнасці, упісанай у вугал, ляжыць на бісектрысе вугла.

Дакажыце гэту тэарэму самастойна, выкарыстаўшы рысунак 325.

З тэарэмы вынікае, што цэнтры ўсіх акружнасцей, упісаных у вугал, ляжаць на бісектрысе вугла (рыс. 326).

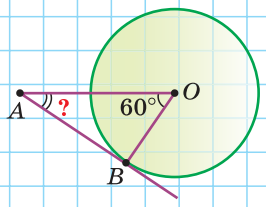


Рыс. 326

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

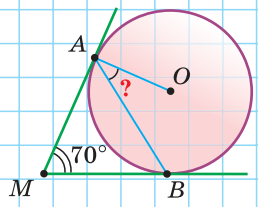
Тэст 1

Знайдзіце вугал A, калі AB — датычная.



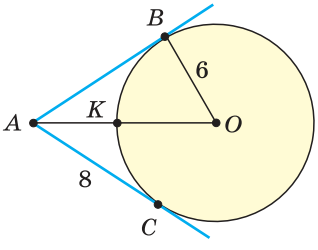
Тэст 2

A і B — пункты дотыку. Знайдзіце $\angle BAO$.



Заданні да § 25

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы



Рыс. 327

Задача 1. *З пункта A да акружнасці з цэнтрам O праведзены дзве датычныя AB і AC, дзе B і C — пункты дотыку, $OB = 6$ см, $AC = 8$ см. Знайсці даўжыню адрэзка AK* (рыс. 327).

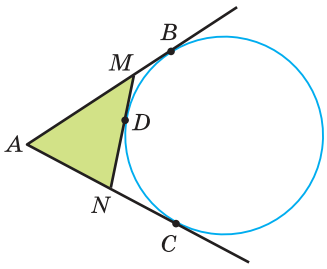
Рашэнне. Выкарыстаем тое, што датычная перпендыкулярна да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку, і тое, што адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж са-

Правообладатель Народная асвета

бой. Тады $AB = AC = 8$ см, $OB \perp AB$ і $\triangle ABO$ — прамавугольны. Па тэарэме Піфагора $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см). Паколькі $OK = OB = 6$ см як радыусы адной акружнасці, то $AK = AO - OK = 10 - 6 = 4$ (см).

Адказ: 4 см.

Задача 2. *У вугал A ўпісана акружнасць, прамая MN — датычная* (рыс. 328). *Знайсці перыметр трохвугольніка AMN, калі $AB = 12$ см.*



Рыс. 328

Рашэнне. Няхай B, C і D — пункты дотыку. Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $AC = AB = 12$ см, $MB = MD$ і $NC = ND$.

Тады $AM + MD = AM + MB = AB = 12$ см,

$AN + ND = AN + NC = AC = 12$ см,

$P_{AMN} = (AM + MD) + (AN + ND) = AB + AC = 12 + 12 = 24$ (см).

Адказ: 24 см.

Заўвага. Карысна запомніць: $P_{AMN} = 2AB$.

Задача 3. *Пабудаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі датычную да дадзенай акружнасці, праведзеную праз пункт, узяты па-за акружнасцю.*

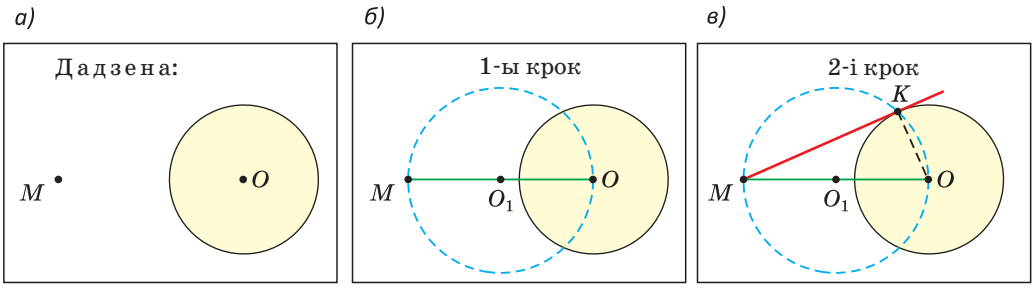
Рашэнне. Няхай дадзена акружнасць з зададзеным цэнтрам O і пункт M па-за акружнасцю (рыс. 329, *а*).

Пабудова.

1-ы *крок*. Праводзім адрэзак MO і на ім як на дыяметры будуем акружнасць (рыс. 329, *б*). Для чаго адрэзак MO дзелім папалам, знаходзім яго сярэдзіну O_1 і будуем акружнасць радыусам O_1M.

2-і *крок*. Адзначаем пункт K перасячэння пабудаванай акружнасці і дадзенай. Праводзім прамую MK, якая і будзе шуканай датычнай да дадзенай акружнасці (рыс. 329, *в*).

Доказ. Вугал MKO — прамы, паколькі яго вяршыня ляжыць на акружнасці і ён абапіраецца на дыяметр (даказана ў 7-м класе). Таму $OK \perp MK$, і тады па прымеце датычнай прамая MK з'яўляецца датычнай да акружнасці.



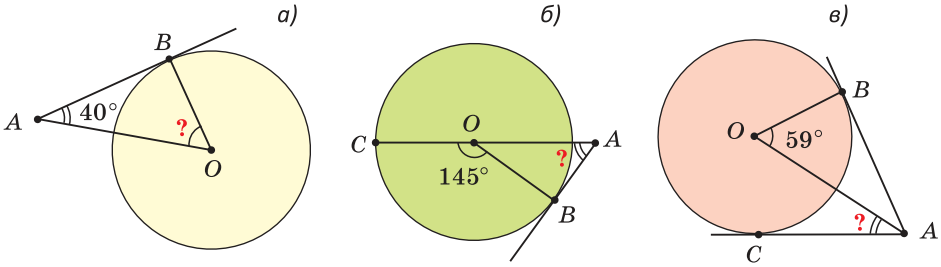
Рыс. 329

Правообладатель Народная асвета

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

351. Пакажыце відарыс акружнасці з цэнтрам у пункце O і радыусам 3 см. Па-за акружнасцю адзначце пункт A, дзе $OA = 5$ см. Правядзіце з пункта A датычную да дадзенай акружнасці. Абазначце пункт дотыку літарай B. Растлумачце, чаму $\triangle AOB$ — прамавугольны. Правядзіце другую датычную AC, дзе C — пункт дотыку. Растлумачце, адкуль вынікае, што $AB = AC$. Знайдзіце пры дапамозе тэарэмы Піфагора даўжыню адрэзка AB. Праверце атрыманы вынік вымярэннем.

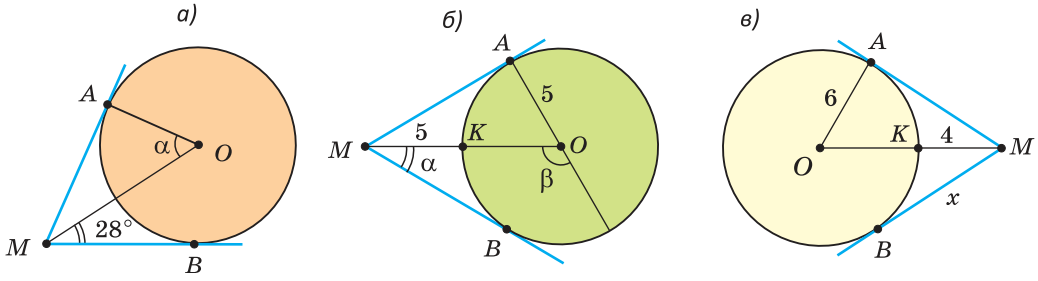
352. На рысунках 330, *а*)—*в*) з пункта A праведзены датычныя да акружнасці з цэнтрам у пункце O. Знайдзіце велічыню вугла, абазначанага пытальнікам.



Рыс. 330

353. На рысунках 331, *а*)—*в*) пункт O — цэнтр акружнасці, прамыя MA і MB — датычныя, A і B — пункты дотыку. Знайдзіце:

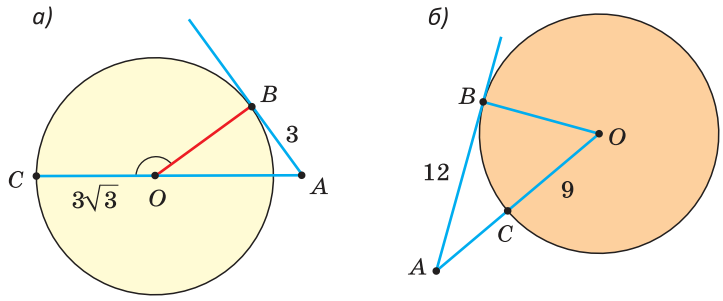
а) велічыню вугла α (рыс. 331, *а*);
б) суму вуглоў $\alpha + \beta$, калі $MK = OA = 5$ см (рыс. 331, *б*);
в) даўжыню адрэзка BM, калі $OA = 6$ см, $KM = 4$ см (рыс. 331, *в*).



Рыс. 331

354. На рысунках 332, *а*), *б*) AB — датычная да акружнасці, B — пункт дотыку, O — цэнтр акружнасці. Знайдзіце:

Правообладатель Народная асвета

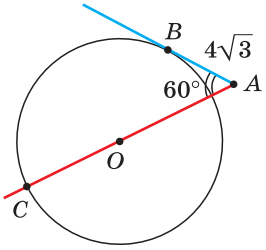


Рыс. 332

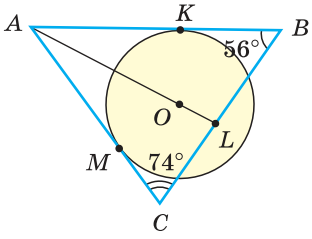
а) $\angle BOC$, калі $OC = 3\sqrt{3}$ см, $AB = 3$ см (рыс. 332, *а*);
б) AC, калі $AB = 12$ см, $OC = 9$ см (рыс. 332, *б*).

355. Да акружнасці праведзены датычная AB (B — пункт дотыку) і сякучая AC, якая праходзіць праз цэнтр O акружнасці, $\angle A = 60°$, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці (рыс. 333).

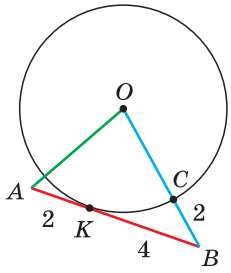
356. Акружнасць з цэнтрам у пункце O датыкаецца да старон AB і AC трохвугольніка ABC, $\angle B = 56°$, $\angle C = 74°$ (рыс. 334). Знайдзіце $\angle ALB$.



Рыс. 333



Рыс. 334



Рыс. 335

357. Акружнасць з цэнтрам у пункце O датыкаецца да стараны AB трохвугольніка AOB у пункце K і перасякае старану OB у пункце C (рыс. 335); $BC = 2$ см, $AK = 2$ см, $KB = 4$ см. Знайдзіце:

а) OB; б) S_{AOB}.

358. Акружнасць з цэнтрам O ўпісана ў вугал BAC, B і C — пункты дотыку. Адрэзкі AO і BC перасякаюцца ў пункце K, $OK = 2$ см, $OB = 4$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AK.

359. Пункт M ляжыць па-за акружнасцю з цэнтрам у пункце O. Пункт K належыць акружнасці. Дакажыце, што калі $\angle KMO + \angle MOK = 90°$, то прамая MK — датычная да акружнасці.

360. З пункта A да акружнасці з цэнтрам O праведзены сякучая і датычная AB (дзе B — пункт дотыку). Адлегласць ад цэнтра акружнасці да сякучай роўна 6 см, даўжыня адрэзка сякучай унутры акружнасці роўна 16 см, $AO = 26$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB.

Правообладатель Народная асвета

361. Дадзены трохвугольнік са старанамі 12, 15 і 18. Акружнасць датыкаецца да дзвюх меншых старон трохвугольніка, а яе цэнтр ляжыць на большай старане. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў, на якія цэнтр акружнасці дзеліць большую старану.

362*. На каардынатнай плоскасці зададзена акружнасць з цэнтрам $P(3; 2)$ і радыусам, роўным 2. З пункта $A(-2; 0)$ да акружнасці праведзена датычная, адрозная ад восі абсцыс, якая датыкаецца да акружнасці ў пункце B. Знайдзіце плошчу трохвугольніка APB.

363*. Пабудуйце пры дапамозе цыркуля і лінейкі акружнасць зададзенага радыуса m, якая датыкаецца да дадзенай прамой l у адзначаным на ёй пункце K.

364*. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі ўпішыце ў дадзены вугал A акружнасць дадзенага радыуса R.

365*. Знайдзіце геаметрычнае месца цэнтраў акружнасцей, калі ўсе акружнасці праходзяць праз два дадзеныя пункты A і B.

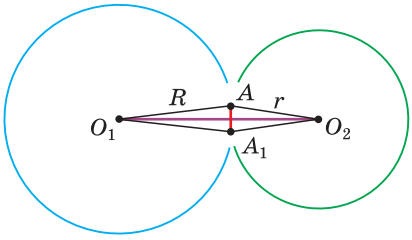
§ 26. Узаемнае размяшчэнне акружнасцей

Калі дзве акружнасці маюць толькі адзін агульны пункт, то яны называюцца *датычнымі* адна да адной у гэтым пункце. А калі яны маюць два агульныя пункты, то — *перасякальнымі*. Прамая, якая праходзіць праз цэнтры дзвюх акружнасцей, называецца *лініяй цэнтраў* гэтых акружнасцей.

Справядлівая ўласцівасць: **«Пункт дотыку дзвюх датычных акружнасцей належыць лініі цэнтраў гэтых акружнасцей».**

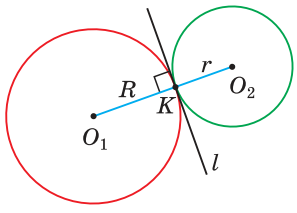
Сапраўды, няхай дзве акружнасці з цэнтрамі ў пунктах O_1 і O_2 і радыусамі R і r датыкаюцца ў пункце A, які з'яўляецца іх адзіным агульным пунктам.

Будзем меркаваць, што пункт A не належыць прамой O_1O_2 (рыс. 336). Пабудуем сіметрычны яму пункт A_1 адносна прамой O_1O_2. Паколькі O_1O_2 — пасярэдні перпендыкуляр да адрэзка AA_1, то $O_1A = O_1A_1 = R$, $O_2A = O_2A_1 = r$. Значыць, пункт A_1 належыць кожнай з дадзеных акружнасцей, г. зн. з'яўляецца іх другім агульным пунктам. Але па ўмове агульны пункт адзін. Значыць, пункт A належыць лініі цэнтраў.



Рыс. 336

Дзве датычныя акружнасці маюць *агульную датычную*, якая праходзіць праз іх агульны пункт (рыс. 337). Няхай K — пункт дотыку акружнасцей з цэнтрамі O_1 і O_2, ён

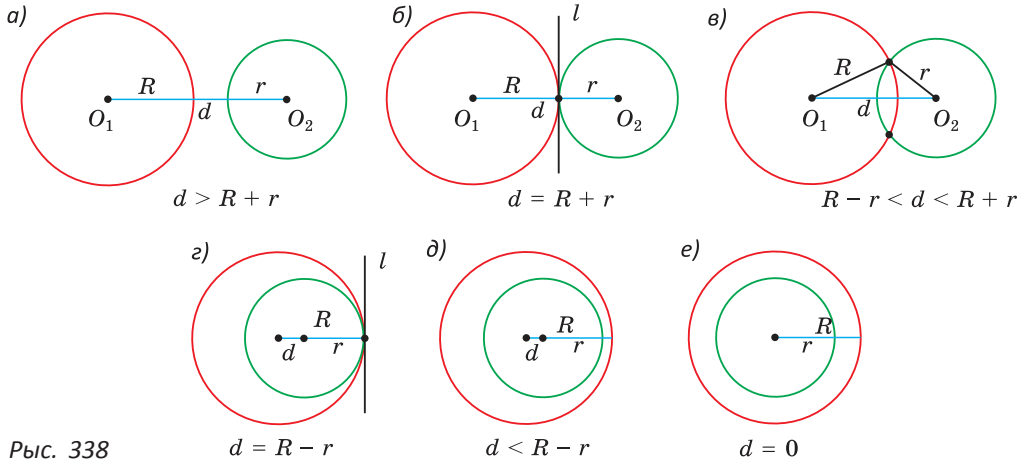


Рыс. 337

Правообладатель Народная асвета

належыць прамой O_1O_2. Правядзём праз пункт K прамую $l \perp O_1O_2$. Па прымеце датычнай прамая l з'яўляецца датычнай да кожнай з акружнасцей, г. зн. l — агульная датычная дзвюх акружнасцей. Датычныя акружнасці могуць размяшчацца як з розных бакоў ад іх агульнай датычнай, так і з аднаго боку ад яе (гл. рыс. 338, *г*). У першым выпадку гавораць, што яны датыкаюцца *знешнім чынам*, у другім, — што яны датыкаюцца *ўнутраным чынам*.

Для дзвюх акружнасцей з радыусамі R і r ($R > r$) і адлегласцю $d = O_1O_2$ паміж іх цэнтрамі можна вылучыць шэсць розных выпадкаў іх узаемнага размяшчэння на плоскасці (рыс. 338, *а*)—*е*):



Рыс. 338

а) акружнасці размешчаны знешнім чынам і не датыкаюцца: $d > R + r$;

б) акружнасці датыкаюцца знешнім чынам: $d = R + r$;

в) акружнасці перасякаюцца (у 2 пунктах): $R - r < d < R + r$ (няроўнасць трохвугольніка);

г) акружнасці датыкаюцца ўнутраным чынам: $d = R - r$;

д) акружнасці размешчаны ўнутраным чынам, не датыкаюцца, і іх цэнтры не супадаюць: $d < R - r$;

е) акружнасці размешчаны ўнутраным чынам, іх цэнтры супадаюць (*канцэнтрычныя* акружнасці): $d = 0$.

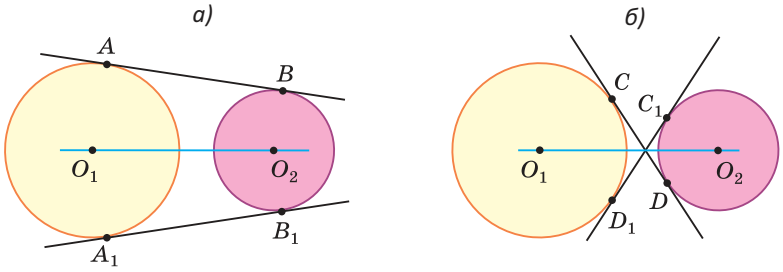
Са сказанага вынікае, што з трох адрэзкаў можна пабудаваць трохвугольнік, калі кожны з іх меншы за суму двух астатніх.

А цяпер выканайце **Тэст 1.**

Тэст 1

Радыусы дзвюх акружнасцей роўны 12 см і 16 см. Адлегласць паміж іх цэнтрамі 24 см. Колькі агульных пунктаў маюць гэтыя акружнасці:
а) адзін; б) два; в) тры; г) ні аднаго?

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 339

Калі дзве акружнасці размешчаны знешнім чынам або перасякаюцца, то можна пабудаваць іх агульную датычную, такую, што акружнасці будуць ляжаць з аднаго боку ад гэтай датычнай. Такая датычная называецца *агульнай знешняй датычнай* для дадзеных акружнасцей. На рысунку 339, *а*) гэта датычныя AB і A_1B_1.

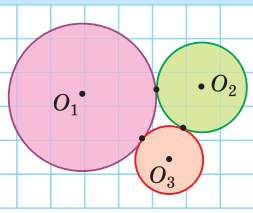
Для акружнасцей, размешчаных знешнім чынам, можна пабудаваць такую агульную датычную, што акружнасці будуць ляжаць з розных бакоў ад яе. Такая датычная называецца *агульнай унутранай датычнай* для дзвюх дадзеных акружнасцей. На рысунку 339, *б*) гэта датычныя CD і C_1D_1.

Існуюць дзве знешнія і дзве ўнутраныя датычныя для дзвюх дадзеных акружнасцей. Гэтыя датычныя сіметрычныя адносна лініі цэнтраў O_1O_2. Адрэзкі гэтых датычных, змешчаныя паміж пунктамі дотыку, роўныя паміж сабой ($AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$), а пункты перасячэння дзвюх знешніх датычных (у выпадку няроўных акружнасцей) і дзвюх унутраных датычных ляжаць на лініі цэнтраў.

А цяпер выканайце **Тэст 2.**

Тэст 2

Тры акружнасці з дыяметрамі 6 см, 8 см і 10 см парамі датыкаюцца адна да адной. Знайдзіце перыметр трохвугольніка $O_1O_2O_3$, дзе O_1, O_2, O_3 — цэнтры акружнасцей.

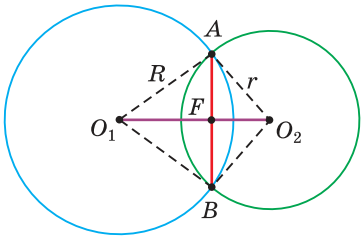


Заданні да § 26

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што агульная хорда дзвюх перасякальных акружнасцей перпендыкулярна да лініі іх цэнтраў і дзеліцца ёй папалам.*

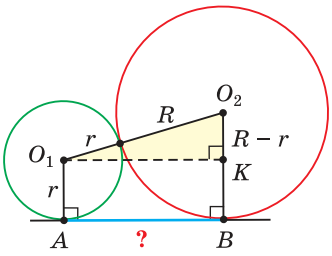
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 340

Доказ. Няхай дзве акружнасці з радыусамі R і r адпаведна з цэнтрамі ў пунктах O_1 і O_2 перасякаюцца ў пунктах A і B (рыс. 340). Паколькі пункт O_1 роўнааддалены ад пунктаў A і B ($O_1A = O_1B = R$), то ён ляжыць на пасярэднім перпендыкуляры да адрэзка AB. Пункт O_2 таксама роўнааддалены ад канцоў адрэзка AB ($O_2A = O_2B = r$), значыць, ён таксама ляжыць на пасярэднім перпендыкуляры да адрэзка AB. Паколькі праз два пункты праходзіць адзіная прамая, то O_1O_2 — пасярэдні перпендыкуляр да адрэзка AB, г. зн. $O_1O_2 \perp AB$, $AF = FB$. Што і трэба было даказаць.

Задача 2. *Дзве акружнасці з радыусамі R і r датыкаюцца знешнім чынам. Знайсці даўжыню адрэзка агульнай знешняй датычнай гэтых акружнасцей, змешчанага паміж пунктамі дотыку.*



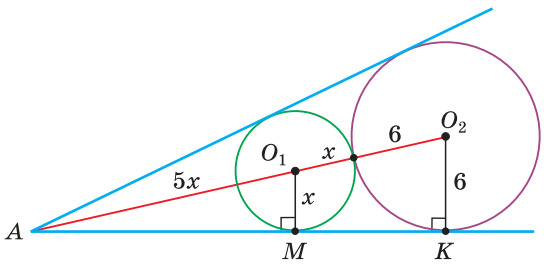
Рыс. 341

Рашэнне. Няхай AB — агульная знешняя датычная дзвюх акружнасцей з цэнтрамі O_1 і O_2 (рыс. 341), якія датыкаюцца знешнім чынам, AB — шуканы адрэзак. Правядзём радыусы $O_1A = r$ і $O_2B = R$ у пункты дотыку. Па ўласцівасці датычнай $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$. З пункта O_1 правядзём перпендыкуляр O_1K да прамой O_2B. Чатырохвугольнік AO_1KB — прамавугольнік, паколькі ўсе яго вуглы прамыя. Адсюль $O_1K = AB$, $BK = AO_1 = r$. У прамавугольным $\triangle O_1O_2K$ $O_2K = O_2B - BK = R - r$, $O_1O_2 = R + r$. Па тэарэме Піфагора: $O_1K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. Значыць, $AB = 2\sqrt{Rr}$.

Адказ: $2\sqrt{Rr}$.

Задача 3. *У вугал упісаны дзве акружнасці, якія датыкаюцца знешнім чынам. Радыус большай з іх роўны* 6, *адлегласць ад яе цэнтра да вяршыні вугла роўна* 30. *Знайсці радыус меншай акружнасці* (рыс. 342).

Рашэнне. Няхай O_1 і O_2 — цэнтры дадзеных акружнасцей, упісаных у вугал A, M і K — пункты дотыку акружнасцей са стараной вугла, O_1M, O_2K — радыусы. Тады $O_2K \perp AK$, $O_1M \perp AK$, $O_2K = 6$, $O_1M = x$, $AO_2 = 30$. З падобнасці



Рыс. 342

Правообладатель Народная асвета

прамавугольных трохвугольнікаў AO_1M і AO_2K (па агульным вострым вугле O_2AK) вынікае, што $\frac{O_1M}{AO_1} = \frac{O_2K}{AO_2} = \frac{6}{30}$, г. зн. $\frac{x}{AO_1} = \frac{1}{5}$. Адсюль $AO_1 = 5x$, $O_1O_2 = x + 6$, $AO_2 = AO_1 + O_1O_2$, $5x + (x + 6) = 30$, $6x = 24$, $x = 4$. Шуканы радыус $O_1M = 4$.

Адказ: 4.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

366. Дадзены дзве акружнасці з радыусамі R і r і адлегласцю d паміж іх цэнтрамі. Вызначыце, як размешчаны акружнасці адна адносна другой, калі:

а) $R = 12$ см, $r = 5$ см, $d = 10$ см;
б) $R = 36$ см, $r = 12$ см, $d = 48$ см;
в) $R = 45$ см, $r = 15$ см, $d = 70$ см.

367. Дзве акружнасці з дыяметрамі 16 м і 6 м датыкаюцца знешнім чынам. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей.

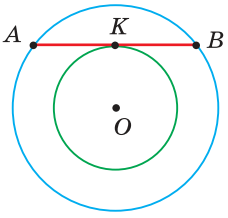
368. Дзве акружнасці датыкаюцца ўнутраным чынам. Адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей 224 см. Радыус меншай акружнасці роўны 56 см. Знайдзіце радыус большай акружнасці.

369. Тры акружнасці з цэнтрамі O_1, O_2, O_3 і радыусамі, роўнымі 2 см, 4 см і 6 см, парамі датыкаюцца адна да адной знешнім чынам. Знайдзіце плошчу трохвугольніка $O_1O_2O_3$.

370. Тры роўныя акружнасці з цэнтрамі ў пунктах A, B і C парамі датыкаюцца адна да адной. Перыметр трохвугольніка ABC роўны 24 см. Знайдзіце радыус гэтых акружнасцей.

371. Дадзены дзве роўныя перасякальныя акружнасці з радыусам 5 м. Даўжыня іх агульнай хорды AB роўна 8 м. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей.

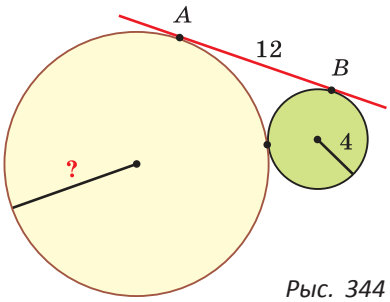
372. Дыяметры дзвюх канцэнтрычных акружнасцей роўны 6 м і 10 м. Хорда AB агульнай акружнасці датыкаецца да меншай акружнасці (рыс. 343). Знайдзіце даўжыню хорды AB.



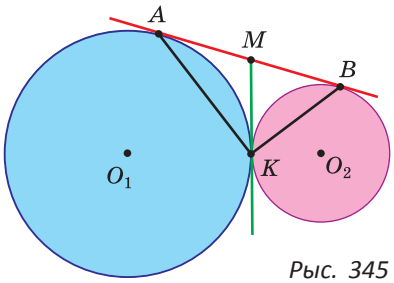
Рыс. 343

373. Дадзены дзве акружнасці, якія датыкаюцца знешнім чынам (рыс. 344, с. 166). Радыус меншай акружнасці роўны 4 см. Даўжыня адрэзка AB знешняй датычнай, дзе A і B — пункты дотыку, роўна 12 см. Знайдзіце радыус большай акружнасці.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 344



Рыс. 345

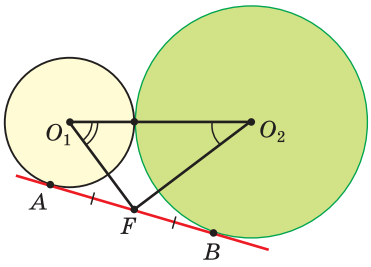
374. Дзве акружнасці датыкаюцца знешнім чынам у пункце K (рыс. 345). Прамая AB — іх агульная знешняя датычная, дзе A і B — пункты дотыку. Прамая KM — агульная ўнутраная датычная гэтых акружнасцей. Дакажыце, што:

а) $KM = \frac{1}{2}AB$; б) $\angle AKB = 90°$.

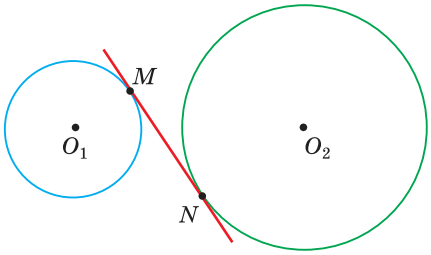
375. Прамая AB — агульная знешняя датычная дзвюх акружнасцей з цэнтрамі O_1 і O_2, якія датыкаюцца знешнім чынам (рыс. 346), A і B — пункты дотыку прамой AB і акружнасцей, пункт F — сярэдзіна адрэзка AB, $\angle O_1O_2F = 37°$. Знайдзіце $\angle FO_1O_2$.

376*. Дадзены дзве акружнасці з радыусамі 9 см і 4 см. Трэцяя акружнасць датыкаецца да дзвюх дадзеных акружнасцей і іх агульнай знешняй датычнай a. Знайдзіце радыус гэтай акружнасці. Разгледзьце ўсе варыянты.

377*. Прамая MN — агульная ўнутраная датычная дзвюх акружнасцей, радыусы якіх роўны 3 см і 5 см, M і N — пункты дотыку (рыс. 347). Адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей роўна 10 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN.



Рыс. 346



Рыс. 347

378*. Дадзены радыусы R і r дзвюх акружнасцей. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце:

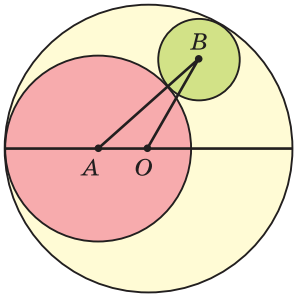
а) дзве акружнасці з радыусамі R і r, якія датыкаюцца адна да адной знешнім чынам;

б) дзве акружнасці з радыусамі R і r, якія датыкаюцца адна да адной унутраным чынам.

Правообладатель Народная асвета

379*. Дадзены дзве акружнасці, размешчаныя знешнім чынам ($d > R + r$). Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце:

а) іх агульную знешнюю датычную;
б) іх агульную ўнутраную датычную.



Рыс. 348

Гімнастыка розуму

Дыяметр вялікай акружнасці з цэнтрам у пункце O роўны 24 см (рыс. 348). Другая акружнасць з цэнтрам у пункце A датыкаецца да вялікай акружнасці ўнутраным чынам. Трэцяя акружнасць з цэнтрам у пункце B датыкаецца да першай акружнасці ўнутраным, а да другой — знешнім чынам. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABO.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне датычнай да акружнасці.
2. Уласцівасць датычнай і прымету датычнай.
3. Уласцівасць датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці.
4. Уласцівасць акружнасці, упісанай у вугал.
5. Усе выпадкі ўзаемнага размяшчэння дзвюх акружнасцей.

Умеем

1. Даказваць прымету датычнай.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці датычнай.
3. Даказваць тэарэму аб роўнасці адрэзкаў датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці.
4. Будаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі датычную да дадзенай акружнасці, якая праходзіць праз пункт, дадзены па-за акружнасцю.

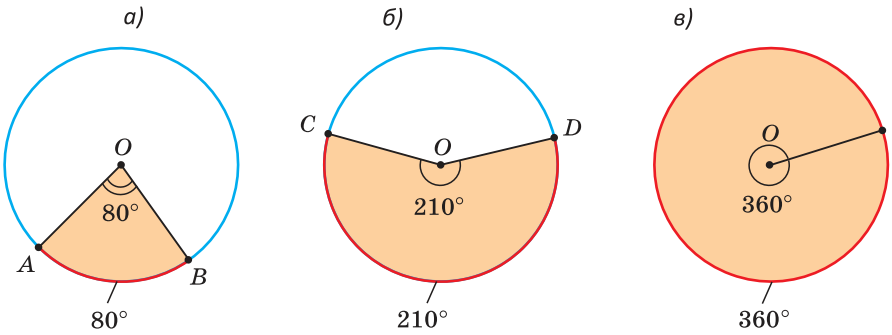
§ 27. Цэнтральны і ўпісаны вуглы

Азначэнне. **Цэнтральным вуглом** акружнасці называецца вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры акружнасці.

Дуга акружнасці, змешчаная ўнутры цэнтральнага вугла, і гэты цэнтральны вугал называюцца *адпаведнымі адзін аднаму*.

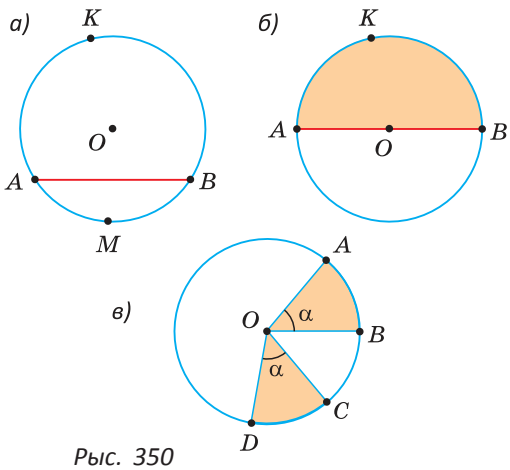
Азначэнне. **Градусная мера** дугі акружнасці называецца градусная мера адпаведнага ёй цэнтральнага вугла.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 349

На рысунку 349, *а*) паказаны цэнтральны вугал AOB, роўны 80°. Яму адпавядае дуга AB, змешчаная ўнутры вугла. Таму $\smile AB = 80°$. На рысунку 349, *б*) цэнтральны вугал COD роўны 210°, дуга CD, якая яму адпавядае, таксама роўна 210°. Поўнаму цэнтральнаму вугламу (рыс. 349, *в*) адпавядае ўся акружнасць. Таму акружнасць змяшчае 360°. Цэнтральны вугал і адпаведная яму дуга могуць змяняцца ад 0° да 360°.



Рыс. 350

На рысунку 350, *а*) дугі AKB і AMB з'яўляюцца *дадатковымі* (дапаўняюць адна адну да акружнасці), таму сума іх градусных мер 360°. Гавораць, што хорда AB *сцягвае* дугу AMB і дугу AKB.

На рысунку 350, *б*) дыяметр AB сцягвае паўакружнасць AKB, якая роўна 180°, паколькі ёй адпавядае цэнтральны вугал AOB, які з'яўляецца разгорнутым.

Дугі адной акружнасці або роўных акружнасцей называюцца роўнымі, калі роўныя іх градусныя меры. Большай лічыцца тая дуга, якая мае большую градусную меру. Калі $\angle AOB = \alpha$ і $\angle DOC = \alpha$ (рыс. 350, *в*), то $\smile AB = \smile DC$.

Адзначым, што акружнасць і любая яе дуга характарызуюцца і даўжынёй, і градуснай мерай. Гавораць «дуга акружнасці роўна 6 см», таксама гавораць «дуга акружнасці роўна 30°». Даўжыня дугі прама прапарцыянальна яе градуснай меры. Дугі адной акружнасці, якія маюць роўныя градусныя меры, роўныя па даўжыні і наадварот.

Правообладатель Народная асвета

А цяпер выканайце **Тэст 1.**

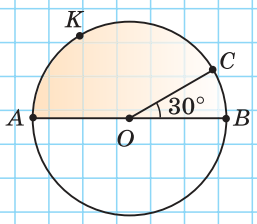
Тэст 1

Калі AB — дыяметр, O — цэнтр акружнасці, то:

а) $\smile CB = \ldots^\circ$

б) $\smile AKC = \ldots^\circ$

в) $\smile ABC = \ldots^\circ$



Азначэнне. Упісаным вуглом называецца вугал, у якога вяршыня належыць акружнасці, а стораны перасякаюць акружнасць.

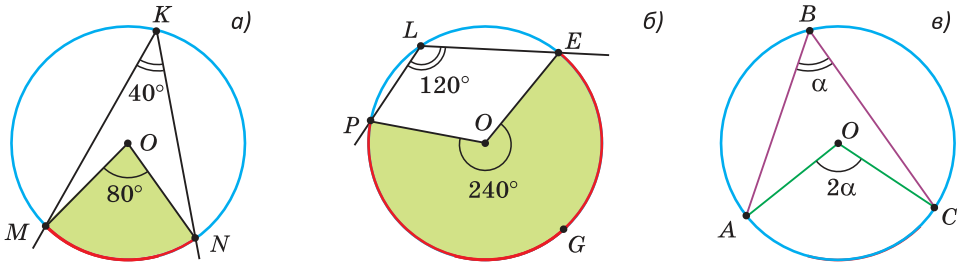
У азначэнні ўпісанага вугла маецца на ўвазе вугал, меншы за 180°.

На рысунку 351, *а*) $\angle MKN$ — упісаны. Яму адпавядае дуга MN, змешчаная ўнутры гэтага ўпісанага вугла, і цэнтральны $\angle MON$. Гавораць, што $\angle MKN$ і $\angle MON$ *абапіраюцца* на дугу MN.

На рысунку 351, *б*) $\angle PLE$ — упісаны. Яму адпавядае дуга PGE і цэнтральны вугал POE, большы за 180°, які змяшчае гэту дугу.

Любы ўпісаны вугал у 2 разы меншы за адпаведны цэнтральны вугал і дугу, на якую ён абапіраецца. Калі $\angle MKN = 40^\circ$, то $\angle MON = \smile MN = 80^\circ$, калі $\angle PLE = 120^\circ$, то $\angle POE = \smile PGE = 240^\circ$.

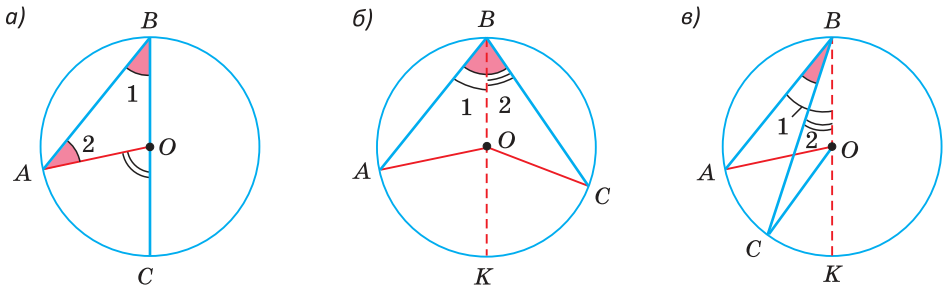
Інакш кажучы, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$ (рыс. 351, *в*). Дакажам гэта сцверджанне.



Рыс. 351

Тэарэма (аб упісаным вугле).
Упісаны вугал роўны палавіне адпаведнага яму цэнтральнага вугла, а таксама палавіне дугі, на якую ён абапіраецца.

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 352

Доказ. Разгледзім тры выпадкі.

а) Няхай цэнтр O акружнасці ляжыць на старане BC упісанага вугла ABC (рыс. 352, *а*). Тады BC — дыяметр, $OA = OB$ як радыусы, $\triangle AOB$ — раўнабедраны, $\angle 1 = \angle 2$ як вуглы пры яго аснове; $\angle AOC$ — знешні для $\triangle AOB$. Па ўласцівасці знешняга вугла трохвугольніка $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle ABC$, адкуль $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$.

б) Няхай цэнтр акружнасці ляжыць унутры ўпісанага вугла ABC (рыс. 352, *б*). Правядзём дыяметр BK. Па даказаным у п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup KC$, тады $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KC) = \frac{1}{2}\cup AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

в) Няхай цэнтр акружнасці ляжыць па-за ўпісаным вуглом ABC (рыс. 352, *в*). Правядзём дыяметр BK. Па даказаным у п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CK$, тады $\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK - \cup CK) = \frac{1}{2}\cup AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

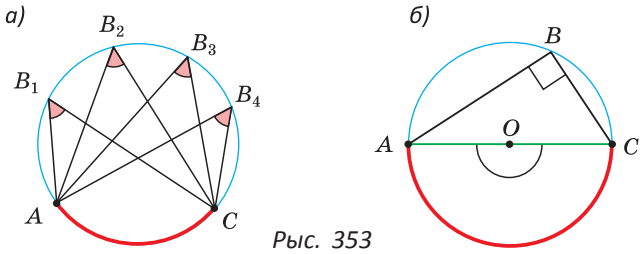
Тэарэма даказана.

Вынікі.

1. Упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу, роўныя паміж сабой.

2. Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, — прамы. І наадварот, калі ўпісаны вугал — прамы, то ён абапіраецца на дыяметр.

На рысунку 353, *а*) $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \angle AB_4C$, паколькі ўсе гэтыя ўпісаныя вуглы абапіраюцца на агульную дугу AC, а, значыць, іх градусныя меры роўны палавіне градуснай меры дугі AC.



Рыс. 353

Правообладатель Народная асвета

На рысунку 353, *б*) упісаны вугал ABC абапіраецца на дыяметр AC. Паколькі адпаведны вуглу ABC цэнтральны вугал AOC — разгорнуты, а адпаведная дуга AC з'яўляецца паўакружнасцю, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

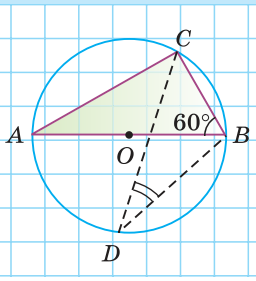
Тэст 2

Калі AB — дыяметр, $\angle ABC = 60^\circ$, то

а) $\angle ACB = \ldots$

б) $\angle CAB = \ldots$

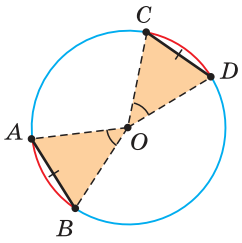
в) $\angle CDB = \ldots$



Заданні да § 27

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што роўныя хорды адной акружнасці сцягваюць роўныя дугі (размова ідзе пра дугі, адначасова меншыя (большыя) за паўакружнасць).*

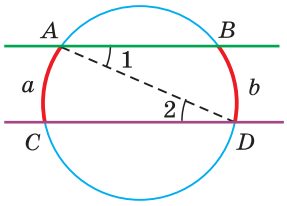


Рыс. 354

Доказ. Няхай хорды AB і CD роўныя (рыс. 354). Гэтыя хорды сцягваюць адпаведна дугі AB і CD. Паколькі $\triangle AOB = \triangle COD$ па трох старанах ($OA = OB = OC = OD$ як радыусы адной акружнасці), то $\angle AOB = \angle COD$. Адсюль вынікае, што $\smile AB = \smile CD$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Сфармулюйце і дакажыце адваротнае сцвярджанне.

Задача 2. *Даказаць, што дугі, змешчаныя паміж паралельнымі сякучымі да акружнасці, роўныя паміж сабой.*



Рыс. 355

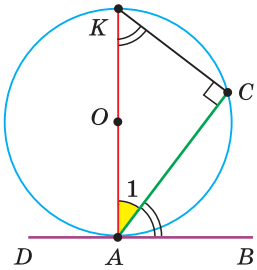
Доказ.

Няхай $AB \parallel CD$ (рыс. 355). Правядзём хорду AD. Вуглы 1 і 2 роўныя як накрыжлеглыя пры паралельных прамых.

З роўнасці ўпісаных вуглоў вынікае роўнасць дуг, на якія яны абапіраюцца, г. зн. $\smile AC = \smile BD$.

Правообладатель Народная асвета

Задача 3. *Даказаць тэарэму:* ***«Вугал паміж датычнай і хордай, якая выходзіць з пункта дотыку, вымяраецца палавінай дугі, змешчанай унутры вугла».***

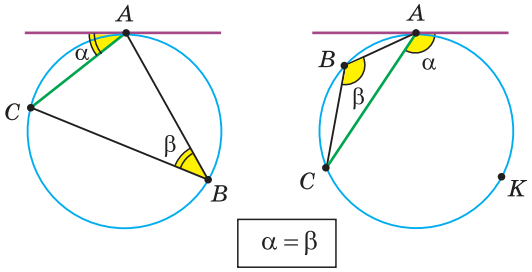


Рыс. 356

Доказ. Няхай DB — датычная да акружнасці з цэнтрам у пункце O, дзе A — пункт дотыку, AC — хорда. Дакажам, што $\angle CAB = \frac{1}{2}\cup AC$ (рыс. 356). Правядзём дыяметр AK. Па ўласцівасці датычнай $\angle KAB = 90°$ і $\angle CAB$ дапаўняе $\angle 1$ да $90°$. З другога боку, $\angle C = 90°$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, таму $\angle AKC$ таксама дапаўняе $\angle 1$ да $90°$. Таму $\angle CAB = \angle AKC$. Але $\angle AKC = \frac{1}{2}\cup AC$. Адкуль $\angle CAB = \frac{1}{2}\cup AC$. Што і трэба было даказаць.

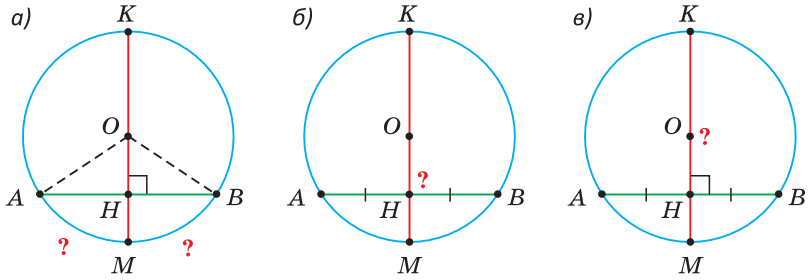
Выпадак, калі вугал паміж хордай і датычнай прамы ($\angle BAK$) або тупы ($\angle CAD$), разгледзьце самастойна.

Заўвага. Карысна запомніць уласцівасць: **«Вугал паміж датычнай і хордай, якая выходзіць з пункта дотыку, роўны ўпісанаму вуглу, які абапіраецца на дугу, змешчаную паміж датычнай і хордай»** (рыс. 357).



Рыс. 357

Задача 4. *Даказаць наступныя сцверджанні: а) дыяметр, перпендыкулярны да хорды, дзеліць хорду і дугі, якія яна сцягвае, папалам; б) дыяметр, праведзены праз сярэдзіну хорды, якая не з'яўляецца дыяметрам, перпендыкулярны да гэтай хорды і дзеліць дугі, якія яна сцягвае, папалам; в) пасярэдні перпендыкуляр да хорды праходзіць праз цэнтр акружнасці і дзеліць дугі, якія сцягвае хорда, папалам* (рыс. 358, *а*—*в*).



Рыс. 358

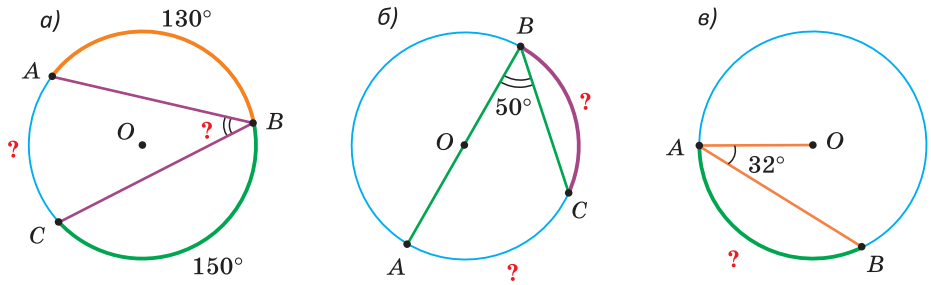
Правообладатель Народная асвета

Доказ. а) $\triangle AOB$ — раўнабедраны ($OA = OB$ як радыусы), а яго вышыня OH, праведзеная да асновы AB, з'яўляецца медыянай і бісектрысай (рыс. 358, *а*). Таму $AH = HB$, $\angle AOM = \angle BOM$, $\smile AM = \smile BM$.
Сцверджанні б) і в) дакажыце самастойна (рыс. 358, *б*, *в*).

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

380. Нарысуйце акружнасць, пабудуйце цэнтральны вугал AOB і ўпісаны вугал AKB, якія абапіраюцца на тую ж дугу, калі цэнтральны вугал роўны: а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) 270°. Запішыце, колькі градусаў змяшчае ў кожным выпадку ўпісаны вугал і адпаведная дуга.

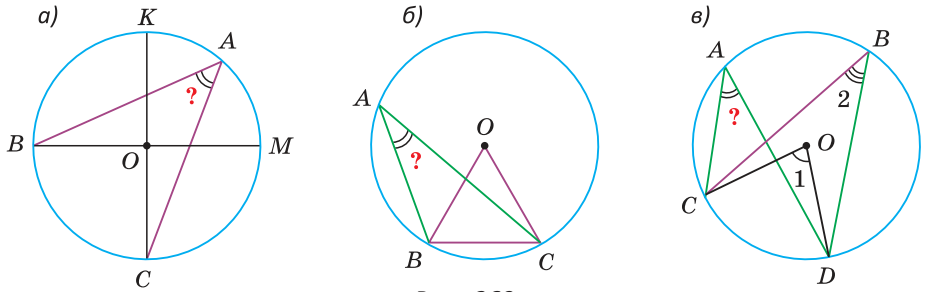
381. Па даных на рысунках 359, *а*)—*в*) знайдзіце градусную меру вугла або дугі, якія абазначаны пытальнікам (O — цэнтр акружнасці).



Рыс. 359

382. Радыус акружнасці роўны 24 см. Знайдзіце даўжыню хорды, якая сцягвае дугу, роўную:
а) 60°; б) 90°; в) 180°; г) 300°.

383. На рысунках 360, *а*)—*в*) O — цэнтр акружнасці. Знайдзіце вугал A, калі:
а) $BM \perp KC$; б) $\triangle BOC$ — роўнастаронні; в) $\angle 1 + \angle 2 = 126°$.



Рыс. 360

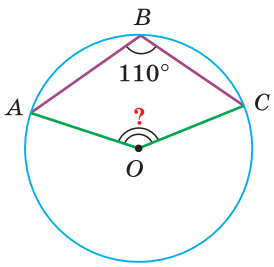
Правообладатель Народная асвета

384. Пункты A, B і C ляжаць на акружнасці і з'яўляюцца вяршынямі раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і вуглом пры вяршыні, роўным 78°. Знайдзіце градусныя меры дуг AB, BC і AC, якія змяшчаюцца ўнутры вуглоў трохвугольніка ABC.

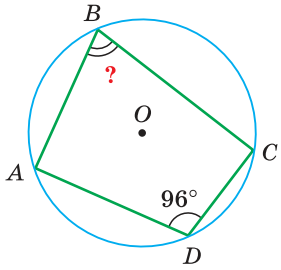
385. а) Упісаны вугал ABC на 32° меншы за адпаведны цэнтральны вугал AOC. Знайдзіце цэнтральны вугал AOC.
б) Цэнтральны і адпаведны яму ўпісаны вугал разам складаюць 63°12′. Знайдзіце гэтыя вуглы.
в) Упісаны вугал, адпаведны яму цэнтральны вугал і дуга, на якую гэтыя вуглы абапіраюцца, разам складаюць 200°. Знайдзіце градусныя меры гэтых вуглоў і дугі.

386. Пункт O — цэнтр акружнасці (рыс. 361), $\angle B = 110°$. Знайдзіце $\angle AOC$.

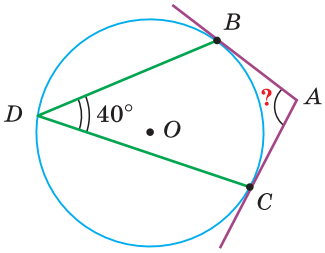
387. Па даных на рысунку 362 знайдзіце велічыню вугла B.



Рыс. 361



Рыс. 362



Рыс. 363

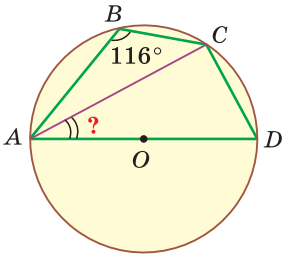
388. Акружнасць упісана ў вугал BAC, B і C — пункты дотыку прамых AB і AC і акружнасці (рыс. 363). Вугал BDC роўны 40°. Знайдзіце велічыню вугла A.

389. а) У акружнасці, радыус якой роўны 10 см, праведзена хорда даўжынёй 16 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці да прамой, якая змяшчае гэту хорду.
б) Хорда акружнасці роўна 24 см, адлегласць ад цэнтра акружнасці да прамой, якая змяшчае хорду, роўна 5 см. Знайдзіце дыяметр акружнасці.
в) У акружнасці, радыус якой 5 см, праведзены дзве паралельныя хорды даўжынёй 6 см і 8 см з розных бакоў ад цэнтра. Знайдзіце адлегласць паміж хордамі.

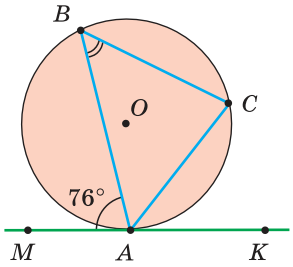
390. а) Дакажыце, што дуга акружнасці, роўная 60°, сцягваецца хордай, роўнай радыусу акружнасці.
б) Дакажыце, што ўпісаны вугал, роўны 30°, абапіраецца на хорду, роўную радыусу акружнасці.

391. Дадзена акружнасць з цэнтрам O і радыусам R і ўпісаны ў яе $\angle ABC$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка AOC, калі:
а) $\angle ABC = 30°$, $R = 4$ см; б) $\angle ABC = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$ см.

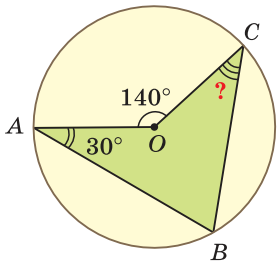
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 364



Рыс. 365



Рыс. 366

392. Пункт O з'яўляецца цэнтрам акружнасці (рыс. 364), $\angle ABC = 116°$. Знайдзіце $\angle CAD$.

393. Прамая MK датыкаецца да акружнасці ў пункце A, $\angle BAM = 76°$, AC — бісектрыса вугла BAK (рыс. 365). Знайдзіце велічыню вугла ABC.

394. Акружнасць датыкаецца да стараны AC трохвугольніка ABC у пункце K, праходзіць праз яго вяршыню B і перасякае стораны AB і BC адпаведна ў пунктах M і N, $\angle CKN = 40°$, $\angle AKM = 60°$, $\angle A = 50°$. Знайдзіце $\angle C$.

395. а) Дакажыце, што прамы ўпісаны вугал абапіраецца на дыяметр.
б) На акружнасці з радыусам 9 см адзначаны пункты A, B і C такія, што $\angle BAC = 52°$, $\angle ACB = 38°$. Знайдзіце даўжыню хорды AC.
в) Вяршыні трохвугольніка ABC належаць акружнасці, радыус якой роўны 8,5 см, $\angle A + \angle B = 90°$, $AC = 8$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

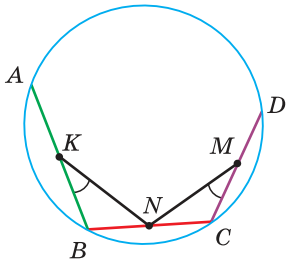
396. Хорда AC акружнасці роўна 6 см і сцягвае дугу AC, роўную 60°. Хорда AB праходзіць праз цэнтр акружнасці. Знайдзіце плошчу $\triangle ABC$.

397. Дакажыце, што акружнасць, пабудаваная на бакавой старане раўнабедранага трохвугольніка як на дыяметры, праходзіць праз сярэдзіну асновы.

398*. Па даных на рысунку 366 знайдзіце $\angle BCO$, дзе O — цэнтр акружнасці.

399*. У акружнасці праведзены тры адвольныя хорды AB, BC і CD (рыс. 367). Пункты M, N і K — адпаведна сярэдзіны дадзеных хорд. Дакажыце, што $\angle BKN = \angle CMN$.

400*. Знайдзіце геаметрычнае месца сярэдзін хорд акружнасці, праведзеных з аднаго пункта акружнасці.

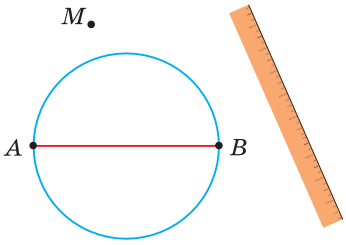


Рыс. 367

Правообладатель Народная асвета

Гімнастыка розуму

На плоскасці паказана акружнасць, яе дыяметр AB і пункт M па-за акружнасцю (рыс. 368). Пры дапамозе аднабаковай лінейкі апусціце перпендыкуляр з пункта M на дыяметр. (Аднабаковая лінейка без дзяленняў дазваляе праводзіць толькі прамыя лініі.)



Рыс. 368

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

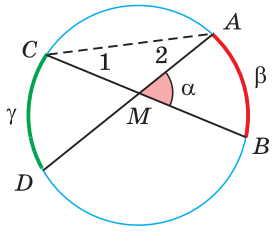
1. Азначэнне ўпісанага і цэнтральнага вуглоў.
2. Як вызначаецца градусная мера дугі акружнасці і колькі градусаў змяшчае ўся акружнасць.
3. Тэарэму аб велічыні ўпісанага і цэнтральнага вуглоў акружнасці.
4. Уласцівасць упісаных вуглоў, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу.
5. Уласцівасць упісанага вугла, які абапіраецца на дыяметр.
6. Чаму роўны вугал паміж хордай і датычнай, якія маюць агульны пункт на акружнасці.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб тым, што ўпісаны вугал роўны палавіне цэнтральнага вугла.
2. Даказваць тэарэму аб вугле паміж хордай і датычнай.

§ 28. Вуглы, утвораныя хордамі, сякучымі і датычнымі

Тэарэма. **Вугал паміж хордамі, якія перасякаюцца, роўны паўсуме дуг, змешчаных унутры дадзенага вугла і вугла, вертыкальнага дадзенаму**, г. зн. $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ (рыс. 369).



$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$

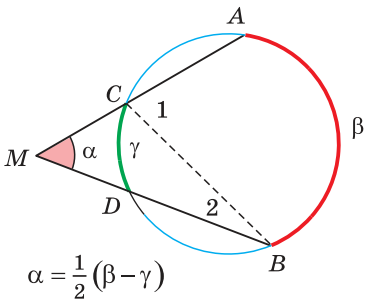
Рыс. 369

Доказ. Трэба даказаць, што вугал AMB роўны паўсуме $\cup AB = \beta$ і $\cup CD = \gamma$ (гл. рыс. 369). Правядзём хорду AC. Для $\triangle AMC$ вугал AMB — знешні, таму $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Але вуглы 1 і 2 — упісаныя. Па ўласцівасці ўпісанага вугла $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CD$.

Тады $\angle AMB = \frac{1}{2}\cup AB + \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

Тэарэма. **Вугал паміж сякучымі, якія праходзяць праз адзін пункт па-за акружнасцю, роўны паўрознасці дуг, якія змяшчаюцца ўнутры вугла, г. зн.** $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ **(рыс. 370).**



Рыс. 370

Доказ. Трэба даказаць, што вугал AMB роўны паўрознасці $\cup AB = \beta$ і $\cup CD = \gamma$ (гл. рыс. 370). Правядзём хорду BC. Для $\triangle MBC$ $\angle 1$ — знешні, таму $\angle 1 = \alpha + \angle 2$, адкуль $\alpha = \angle 1 - \angle 2$. Але вуглы 1 і 2 — упісаныя. Па ўласцівасці ўпісанага вугла $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CD$.

Тады $\angle AMB = \frac{1}{2}\cup AB - \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

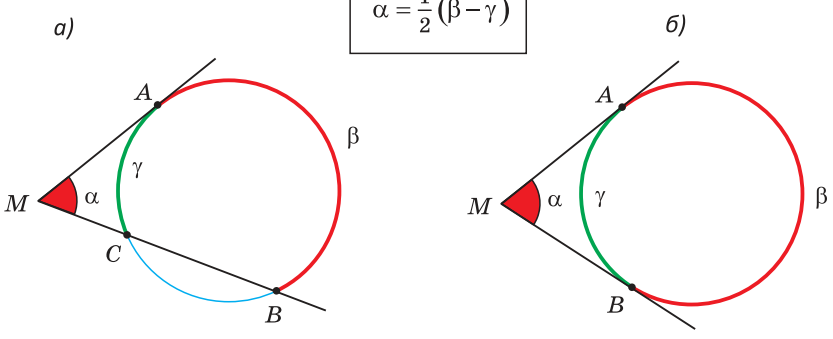
Тэарэма даказана.

Уласцівасць 1. Вугал паміж сякучай і датычнай, якія праходзяць праз адзін пункт па-за акружнасцю, роўны паўрознасці дуг, якія змяшчаюцца ўнутры вугла і абмежаваны пунктамі перасячэння і пунктам дотыку.

Уласцівасць 2. Вугал паміж дзвюма датычнымі, якія праходзяць праз адзін пункт па-за акружнасцю, роўны паўрознасці дуг, якія змяшчаюцца ўнутры вугла і абмежаваны пунктамі дотыку.

На рысунку 371, *а*) вугал M, роўны α, з'яўляецца вуглом паміж датычнай і сякучай, на рысунку 371, *б*) — вуглом паміж датычнымі. У абодвух выпадках $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Дакажыце дадзеныя ўласцівасці самастойна.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$



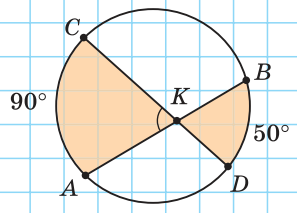
Рыс. 371

Правообладатель Народная асвета

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

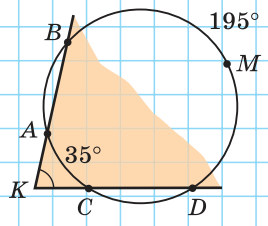
Тэст 1

Калі $\smile AC = 90°$, $\smile BD = 50°$, то $\angle AKC$ =...



Тэст 2

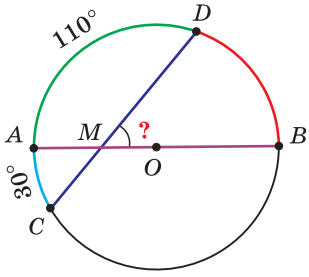
Калі $\smile BMD = 195°$, $\smile AC = 35°$, то $\angle BKD$ =...



Заданні да § 28

РАШАЕМ РАЗАМ

Ключавыя задачы

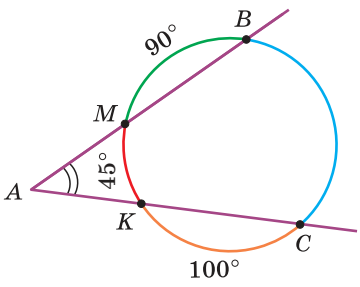


Рыс. 372

Задача 1. *Знайсці вугал DMB паміж хордай CD і дыяметрам AB, калі вядома, што дуга AC роўна* 30°, *а дуга AD роўна* 110° (рыс. 372).

Рашэнне. Паколькі AB — дыяметр, то дуга ADB роўна 180°. Тады дуга DB роўна $180° - 110° = 70°$. Шуканы вугал DMB роўны паўсуме дуг BD і AC, г. зн. $\angle DMB = \frac{1}{2}(\smile DB + \smile AC) = \frac{1}{2}(70° + 30°) = 50°$.

Адказ: 50°.



Рыс. 373

Задача 2. *Знайсці вугал A, калі* $\smile KM = 45°$, $\smile MB = 90°$, $\smile KC = 100°$ (рыс. 373).

Рашэнне. Уся акружнасць змяшчае 360°. Знойдзем градусную меру дугі BC. Атрымаем $\smile BC = 360° - \smile KC - \smile MK - \smile MB = 360° - 100° - 45° - 90° = 125°$.

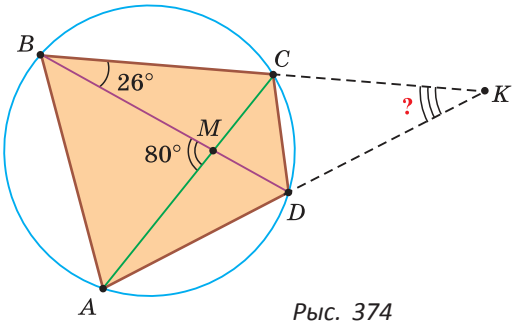
Шуканы вугал A роўны паўрознасці градусных мер дуг BC і MK, г. зн.

$$\angle A = \frac{1}{2}(\smile BC - \smile MK) = \frac{1}{2}(125° - 45°) = 40°.$$

Адказ: 40°.

Задача 3. *Вяршыні чатырохвугольніка ABCD належаць акружнасці, дыяганалі AC і BD перасякаюцца ў пункце M. Вядома, што* $\angle DBC = 26°$, $\angle AMB = 80°$. *Знайсці вугал паміж прамымі AD і BC* (рыс. 374).

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 374

Р а ш э н н е.

1) Прадоўжым адрэзкі AD і BC да перасячэння ў пункце K. Упісаны вугал DBC абапіраецца на дугу CD. Таму $\smile CD = 2\angle DBC = 2 \cdot 26° = 52°$.

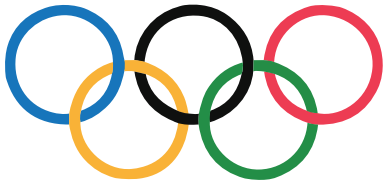
2) Няхай $\smile AB = x$. Паколькі $\angle AMB$ — гэта вугал паміж хордамі AC і BD, то $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$, г. зн. $80° = \frac{1}{2}(x + 52°)$. Адкуль $x = 108°$, $\smile AB = 108°$.

3) Паколькі $\angle AKB$ — гэта вугал паміж сякучымі KA і KB, то $\angle AKB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile CD) = \frac{1}{2}(108° - 52°) = 28°$. Паколькі гэты вугал востры, то ён з'яўляецца вуглом паміж прамымі AD і BC.

А д к а з: 28°.

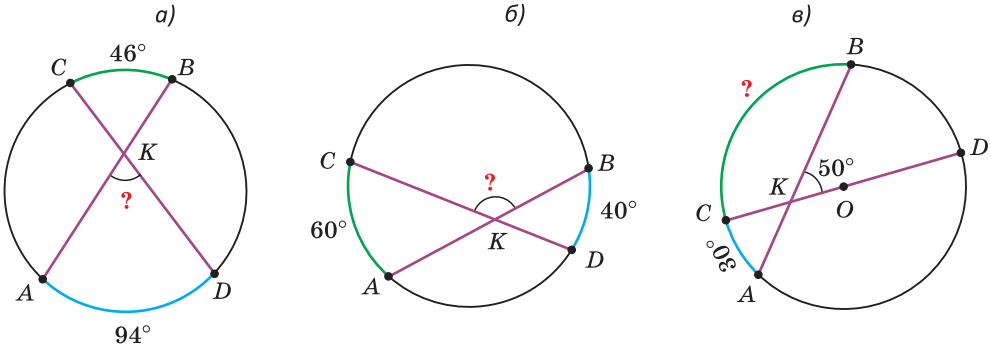
Заўвага. Другі спосаб рашэння заключаецца ў знаходжанні вуглоў трохвугольніка MBC, а затым вуглоў трохвугольніка ACK.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце гісторыю паходжання эмблемы Алімпійскіх гульняў. Вызначыце, колькі пар перасякальных кольцаў і колькі пар неперасякальных кольцаў на рысунку. Успомніце, якія яшчэ эмблемы змяшчаюць акружнасці.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

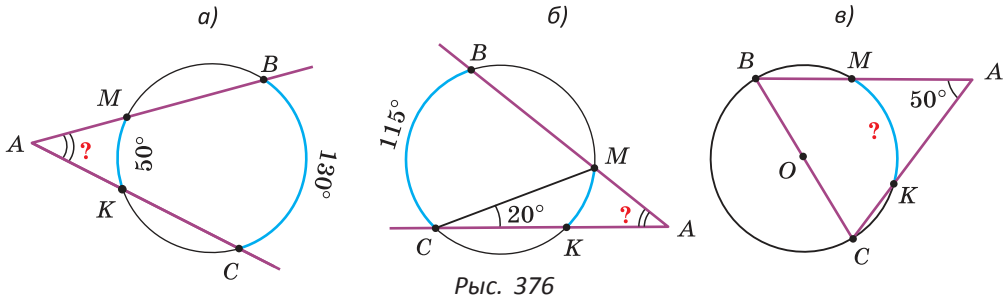
401. Па даных на рысунках 375, *а*)—*в*) знайдзіце градусную меру вугла або дугі, якія абазначаны пытальнікам.



Рыс. 375

Правообладатель Народная асвета

402. На рысунках 376, *а*)—*в*) AB і AC — сякучыя, O — цэнтр акружнасці. Знайдзіце: у п. *а*) і *б*) $\angle A$; у п. в) градусную меру дугі MK.

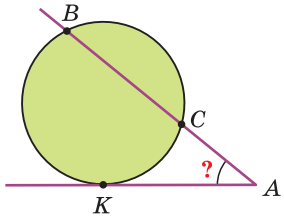


Рыс. 376

403. З пункта M, які ляжыць па-за акружнасцю, да гэтай акружнасці праведзены датычныя MA і MB. Пункты дотыку A і B дзеляць акружнасць на дзве дугі, градусныя меры якіх адносяцца як 3 : 7. Знайдзіце $\angle AMB$.

404. Прамая AK — датычная да акружнасці, K — пункт дотыку (рыс. 377). Дуга CB роўна 130°, дуга CK роўна 75°. Знайдзіце $\angle A$.

405. Хорды AB і CD перасякаюцца ў пункце K, $\angle BKD = 60°$, $\smile BD$ на 20° большая за $\smile AC$. Знайдзіце $\smile AC$.



Рыс. 377

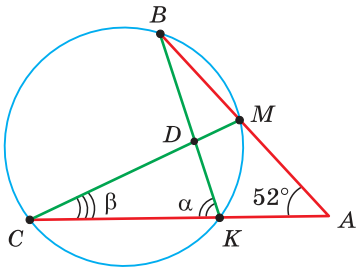
406. Вяршыні чатырохвугольніка $ABCD$ ляжаць на акружнасці, дыяганалі перасякаюцца ў пункце M, $\angle BAC = 36°$, $\angle CAD + \angle ADC = 138°$. Знайдзіце $\angle BMC$.

407. Па даных на рысунку 378 знайдзіце $\alpha - \beta$.

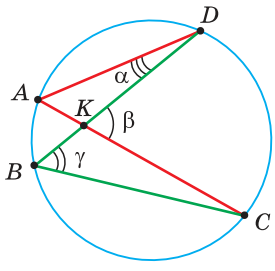
408. Калі $\alpha + \beta + \gamma = 130°$ (рыс. 379), то чаму роўна велічыня вугла β?

409. Дадзена, што $\smile AD = 120°$, $\angle BAC = 32°$ (рыс. 380). Знайдзіце вугал паміж прамымі:

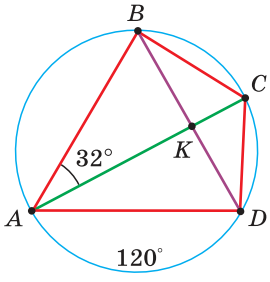
а) AC і BD; б) AB і DC.



Рыс. 378

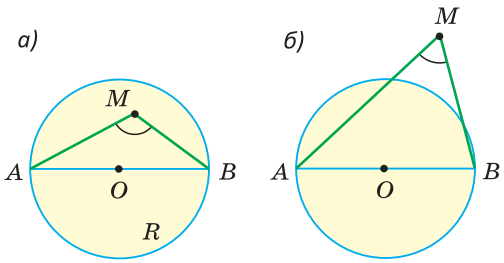


Рыс. 379

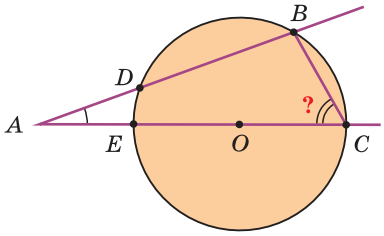


Рыс. 380

Правообладатель Народная асвета



Рыс. 381



Рыс. 382

410*. На рысунку 381, *а*)—*б*) AB — дыяметр акружнасці. Дакажыце:

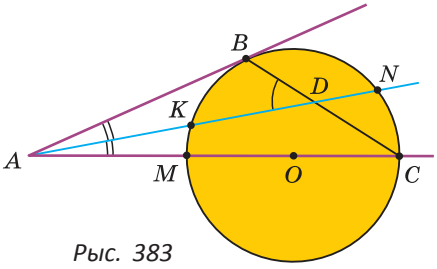
а) $\angle AMB$ — тупы; б) $\angle AMB$ — вострый.

411*. На рысунку 382 пункт O — цэнтр акружнасці, $\angle BAC = 20°$, $AD = OC$. Знайдзіце $\angle C$.

412*. З пункта A праведзены датычная AB, дзе B — пункт дотыку, і сякучая AC, якая праходзіць праз цэнтр O дадзенай акружнасці (рыс. 383). Прамень AN — бісектрыса вугла BAC. Дакажыце, што:

а) $\smile MK + \smile BN = \smile KB + \smile NC$;

б) $\angle ADB = 45°$.



Рыс. 383

413*. Знайдзіце геаметрычнае месца вяршынь прамых вуглоў, стораны якіх праходзяць праз два дадзеныя пункты.

Рэальная геаметрыя

Напомнім, як вызначаюцца геаграфічныя каардынаты на паверхні Зямлі (рыс. 384):

1 — нулявы (Грынвічскі) мерыдыян;

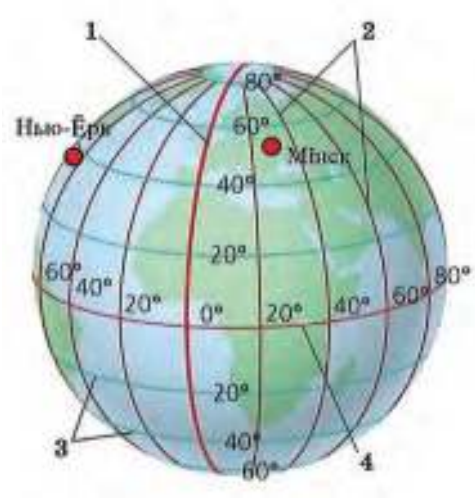
2 — мерыдыяны, якія знаходзяцца справа (на ўсходзе) ад нулявога мерыдыяна;

3 — паралелі, якія знаходзяцца ўнізе (на поўдзень) ад экватара;

4 — экватар.

Перасячэнне нулявога мерыдыяна (1) і экватара (4) — пачатак адліку геаграфічных каардынат.

На поўнач ад экватара ўздоўж мерыдыяна дуга акружнасці (чвэрць акружнасці) змяшчае 90° паўночнай шыраты (пн. ш.), на поўдзень ад экватара — 90° паўднёвай шыраты (пд. ш.).



Рыс. 384

Правообладатель Народная асвета

На ўсход ад нулявога мерыдыяна дуга акружнасці (паўакружнасць) змяшчае 180° усходняй даўгаты (у. д.), а на захад ад нулявога мерыдыяна — 180° заходняй даўгаты (з. д.).

Задача.

Штаб-кватэра ААН (Арганізацыі Аб'яднаных Нацый) знаходзіцца ў Нью-Ёрку (ЗША). Геаграфічныя каардынаты Нью-Ёрка: 39° пн. ш., 77° з. д., а каардынаты Мінска: 54° пн. ш., 27,5° у. д.

а) Вызначыце адлегласць, якую трэба пераадолець па паверхні Зямлі, каб патрапіць з паралелі, дзе размешчаны Мінск, на паралель, дзе размешчаны Нью-Ёрк, рухаючыся ўздоўж мерыдыяна, на якім знаходзіцца Мінск.

Падказка: адлегласць паміж дзвюма паралелямі, якія адрозніваюцца на 1°, роўна 111 км.

б) Вызначыце найкарацейшую адлегласць, якую трэба пераадолець, рухаючыся па 54-й паралелі, каб патрапіць з мерыдыяна, на якім размешчаны Мінск, на мерыдыян, на якім размешчаны Нью-Ёрк.

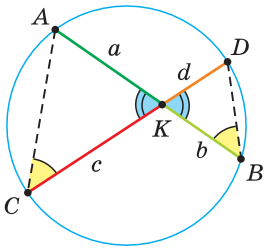
Падказка: даўжыня 54-й паралелі 23 500 км і даўжыня дугі акружнасці прама прапарцыянальна яе градуснай меры.

Цікава ведаць. ААН — самая аўтарытэтная міжнародная арганізацыя, якая рашае пытанні бяспекі і супрацоўніцтва на планеце Зямля.

Беларусь з'яўляецца адной з краін заснавальнікаў Арганізацыі Аб'яднаных Нацый (кастрычнік 1945 г.). Удзел Беларусі ў стварэнні ААН стаў прызнаннем міжнароднай супольнасцю велізарнай ролі, якую адыграў беларускі народ у справе перамогі над фашызмам.

§ 29. Уласцівасць адрэзкаў хорд і датычных

Тэарэма (аб перасякальных хордах).
Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя паміж сабой, г. зн. $ab = cd$ (рыс. 385).



Рыс. 385

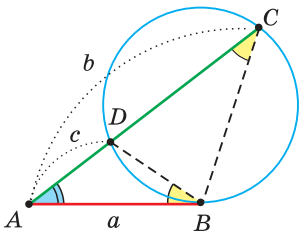
Доказ. Няхай хорды AB і CD перасякаюцца ў пункце K, $AK = a$, $KB = b$, $CK = c$, $KD = d$. Трэба даказаць, што $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, або $ab = cd$ (гл. рыс. 385). Правядзём хорды AC і BD. Паколькі $\angle AKC = \angle BKD$ як вертыкальныя, а $\angle ACD = \angle DBA$ як упісаныя, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу AD, то $\triangle AKC \sim \triangle DKB$ па двух вуглах. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\frac{AK}{CK} = \frac{DK}{BK}$, або $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, адкуль $ab = cd$.

Тэарэма даказана.

Правообладатель Народная асвета

Тэарэма (аб датычнай і сякучай).
Калі з аднаго пункта да акружнасці праведзены датычная і сякучая, то квадрат адрэзка датычнай, які злучае дадзены пункт і пункт дотыку, роўны здабытку адрэзкаў сякучай, якія злучаюць дадзены пункт і пункты яго перасячэння з акружнасцю, г. зн. $a^2 = bc$ (рыс. 386).

Часам гэту тэарэму фармулююць так: **«Квадрат датычнай роўны здабытку сякучай на яе знешнюю частку»**, маючы на ўвазе дадзеныя адрэзкі.

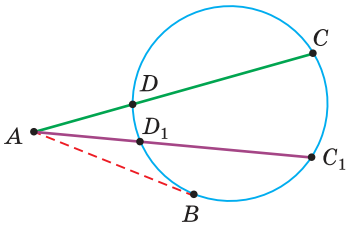


Рыс. 386

Доказ. Няхай AB — датычная, дзе B — пункт дотыку і $AB = a$, AC — сякучая, $AC = b$ — адрэзак сякучай, $AD = c$ — яго знешняя частка (гл. рыс. 386). Трэба даказаць, што $AB^2 = AC \cdot AD$, або $a^2 = bc$. Правядзём хорду BD. У трохвугольнікаў ABD і ACB $\angle A$ — агульны, $\angle ABD = \angle ACB = \frac{1}{2}\cup BD$. Тады $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ па двух вуглах. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, або $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$, адкуль $a^2 = bc$. Тэарэма даказана.

Вынік.

Калі з пункта, адзначанага па-за акружнасцю, да акружнасці праведзена некалькі сякучых, то здабыткі большых адрэзкаў сякучых на іх знешнія часткі роўныя паміж сабой: $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$ (рыс. 387).



Рыс. 387

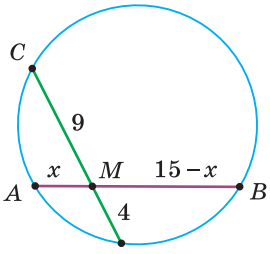
Дакажыце гэты вынік самастойна, выкарыстаўшы рысунак і тэарэму аб датычнай і сякучай.

Заданні да § 29

РАШАЕМ РАЗАМ

Ключавыя задачы

Задача 1.
Хорды AB і CD перасякаюцца ў пункце M. Вядома, што $AB = 15$ см, $CM = 9$ см, $MD = 4$ см. Знайсці $AM : MB$, калі $AM < MB$ (рыс. 388).



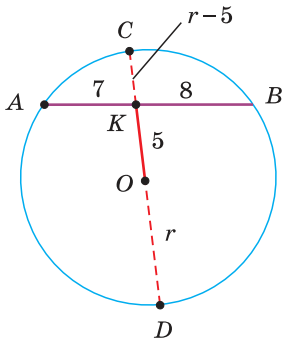
Рыс. 388

Рашэнне.
Няхай $AM = x$ см, тады $MB = (15 - x)$ см. Па тэарэме аб перасякальных хордах $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, г. зн. $x(15 - x) = 9 \cdot 4$. Рэшым атрыманае ўраўненне:

Правообладатель Народная асвета

$15x - x^2 = 36$, $x^2 - 15x + 36 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = 3$, $x_2 = 12$. Калі $AM = 3$ см, то $MB = AB - AM = 12$ см. Паколькі $3 < 12$, то $AM : MB = 3 : 12 = 1 : 4$.

Адказ: 1 : 4.



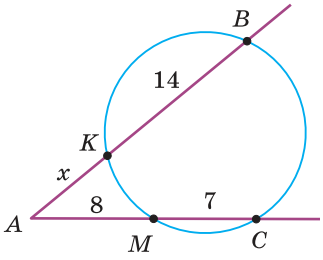
Рыс. 389

Задача 2. *Пункт K дзеліць хорду AB на адрэзкі AK = 7, KB = 8. Адлегласць ад цэнтра O акружнасці да пункта K роўна 5. Знайсці радыус акружнасці* (рыс. 389).

Рашэнне. Правядзём дыяметр CD, які змяшчае адрэзак OK. Абазначым радыус акружнасці r. Тады $KD = OK + OD = r + 5$, $CK = OC - OK = r - 5$. Па тэарэме аб перасякальных хордах $CK \cdot KD = AK \cdot KB$, г. зн. $(r - 5)(r + 5) = 7 \cdot 8$, $r^2 - 25 = 56$, $r^2 = 81$, $r = \pm 9$. Па сэнсе задачы $r > 0$. Таму $r = 9$.

Адказ: 9.

Задача 3. *З пункта A да акружнасці праведзены дзве сякучыя AB і AC* (рыс. 390). *Знайсці даўжыню адрэзка AB, калі KB = 14 см, AM = 8 см, MC = 7 см.*



Рыс. 390

Рашэнне. Выкарыстаем уласцівасць сякучых да акружнасці, праведзеных з аднаго пункта (вынік з тэарэмы аб датычнай і сякучай). Атрымаем $AB \cdot AK = AC \cdot AM$. Абазначым $AK = x$ см. Тады $(x + 14) \cdot x = (8 + 7) \cdot 8$, $x^2 + 14x - 120 = 0$, $x_1 = -20$, $x_2 = 6$. Паколькі па сэнсе задачы $x > 0$, то $x = 6$. Такім чынам, $AK = 6$ см, $AB = 20$ см.

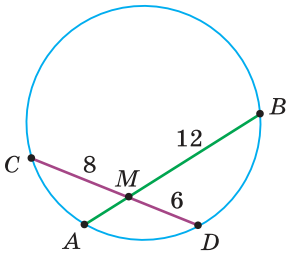
Адказ: 20 см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

414. На рысунку 391 $CM = 8$ см, $MD = 6$ см, $MB = 12$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AM.

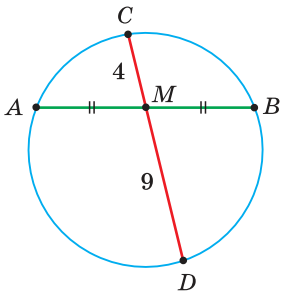
415. На рысунку 392 $AM = MB$, $CM = 4$ см, $MD = 9$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB.

416. На рысунку 393 $AM = 20$ см, $CM = 2MB$, адрэзак MD на 2 см меншы за адрэзак CM. Знайдзіце даўжыню адрэзка CD.

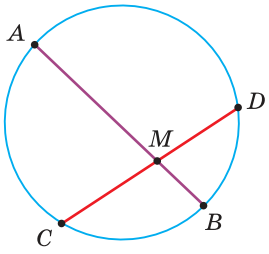


Рыс. 391

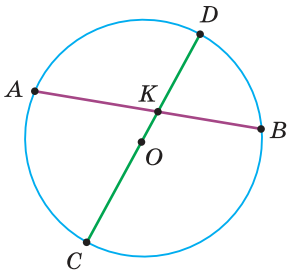
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 392



Рыс. 393



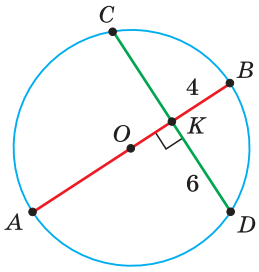
Рыс. 394

417. Пункт O — цэнтр акружнасці, $KB = 7$ см, $AK = 12$ см, $CD = 20$ см (рыс. 394). Знайдзіце даўжыню адрэзка KD.

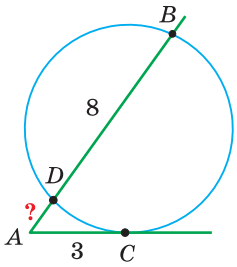
418. AB — дыяметр акружнасці (рыс. 395), $AB \perp CD$, $KB = 4$ см, $KD = 6$ см. Знайдзіце радыус акружнасці.

419. З пункта M да акружнасці праведзена датычная MA, дзе A — пункт дотыку, і сякучая, якая перасякае акружнасць у двух пунктах C і D. Пункт D ляжыць на адрэзку MC, $MD = 4$ см, $DC = 12$ см. Знайдзіце адрэзак AM.

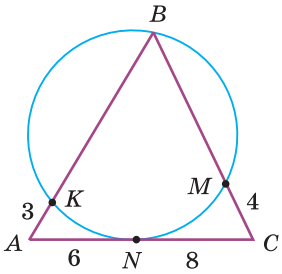
420. На рысунку 396 AC — датычная, C — пункт дотыку, $AC = 3$ см, $BD = 8$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AD.



Рыс. 395



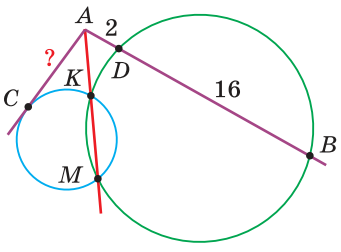
Рыс. 396



Рыс. 397

421*. На рысунку 397 акружнасць датыкаецца да стараны AC трохвугольніка ABC у пункце N і праходзіць праз яго вяршыню B. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі $AK = 3$ см, $AN = 6$ см, $NC = 8$ см, $CM = 4$ см.

422*. На рысунку 398 AC — датычная да малой акружнасці, C — пункт дотыку, $AD = 2$ см, $DB = 16$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AC.



Рыс. 398

Правообладатель Народная асвета

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Чаму роўна велічыня вугла паміж перасякальнымі хордамі.
2. Чаму роўна велічыня вугла паміж сякучымі, праведзенымі з аднаго пункта, адзначанага па-за акружнасцю.
3. Уласцівасць адрэзкаў перасякальных хорд.
4. Уласцівасць адрэзка датычнай і адрэзкаў сякучай, праведзеных з аднаго пункта, узятага па-за акружнасцю.

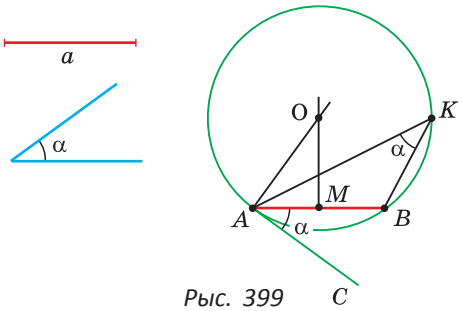
Умеем

1. Даказваць тэарэму аб вугле паміж перасякальнымі хордамі.
2. Даказваць тэарэму аб вугле паміж сякучымі да акружнасці.
3. Даказваць тэарэму аб адрэзках перасякальных хорд акружнасці.
4. Даказваць тэарэму аб датычнай і сякучай.

Аб адным геаметрычным месцы пунктаў*

Спачатку разгледзім задачу.

Задача. *Пабудаваць дугу акружнасці, з кожнага пункта якой дадзены адрэзак a бачны пад дадзеным вуглом* α (рыс. 399).



Рыс. 399

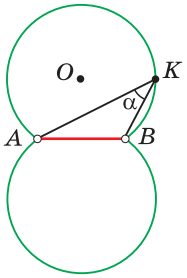
Аналіз. Цэнтр шуканай акружнасці ляжыць на пасярэднім перпендыкуляры да хорды a. Пасярэдні перпендыкуляр да хорды мы пабудаваць можам. Вугал паміж хордай і датычнай роўны ўпісанаму вуглу, які абапіраецца на тую ж дугу. Датычную пад вуглом α да хорды a мы таксама пабудаваць можам. Радыус, праведзены ў пункт дотыку, перпендыкулярны да датычнай. Правесці перпендыкуляр да датычнай у пункце дотыку мы можам. Перасячэнне гэтага перпендыкуляра і пасярэдняга перпендыкуляра да дадзенага адрэзка дасць цэнтр шуканай акружнасці.

Пабудова. Будуем пасярэдні перпендыкуляр MO да адрэзка $AB = a$. Адкладваем $\angle BAC = \alpha$. З пункта A праводзім перпендыкуляр да прамой AC. Пункт O — цэнтр акружнасці, дуга AKB — шуканая.

Доказ. $OA \perp AC$, значыць, AC — датычная да акружнасці з радыусам OA; $\angle BAC = \alpha = \frac{1}{2} \smile AB$ як вугал паміж датычнай і хордай; $\angle AKB = \frac{1}{2} \smile AB$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дугу AB. Тады $\angle AKB = \alpha$, дзе K — адвольны пункт дугі AKB.

Правообладатель Народная асвета

З рэшанай задачы вынікае, што геаметрычным месцам пунктаў плоскасці, з якіх дадзены адрэзак бачны пад вуглом α, з'яўляецца аб'яднанне дзвюх дуг акружнасцей: дугі AKB і ёй сіметрычнай дугі адносна прамой AB, за выключэннем канцоў гэтых дуг, г. зн. пунктаў A і B.



Рыс. 400

Дадзеная ўласцівасць дазваляе будаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі трохвугольнік па старане, вугле насупраць і якімсьці яшчэ элеменце трохвугольніка (рыс. 400).

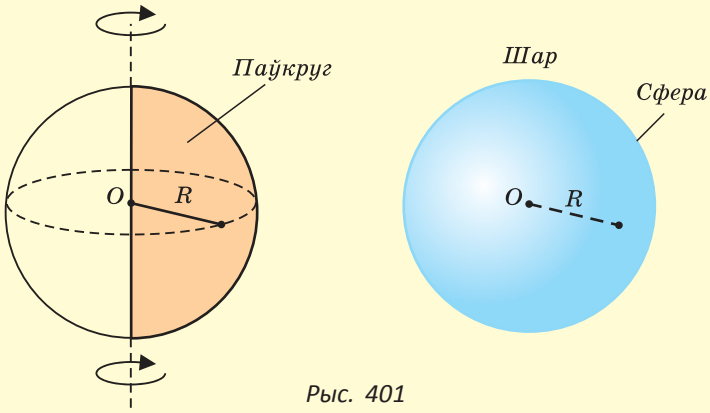
Практыкаванні

1. Пабудаваць трохвугольнік па аснове a, вугле пры вяршыні α і вышыні h, апушчанай на гэту аснову.

2. Пабудаваць трохвугольнік па аснове a, вугле пры вяршыні α і медыяне, праведзенай да стараны a.

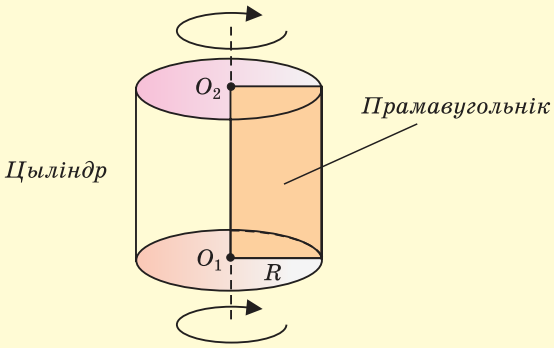
Геаметрыя 3D

З курса 7-га класа мы ведаем, што, калі вярцець круг або паўкруг вакол яго дыяметра, атрымаецца ***шар*** (рыс. 401). Паверхня шара называецца *сферай*.



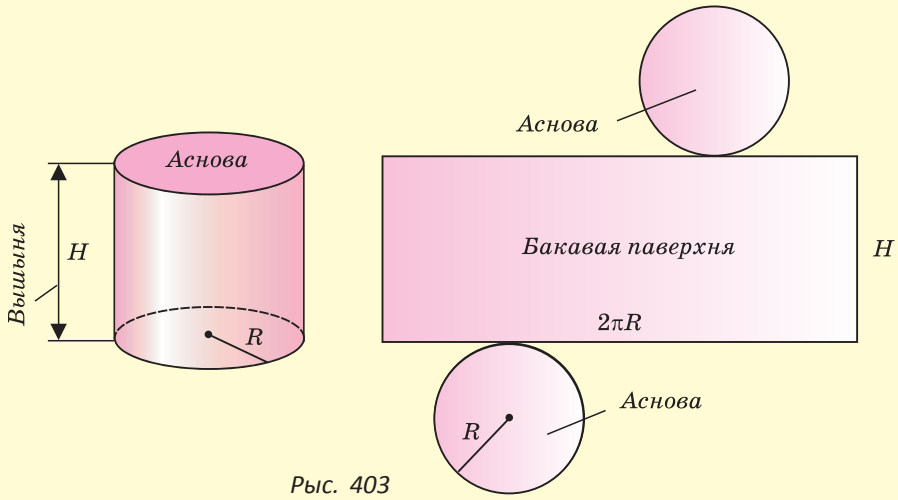
Рыс. 401

Калі вярцець прамавугольнік вакол адной з яго старон, атрымаецца ***цыліндр*** (рыс. 402). Гэта геаметрычнае цела мае паверхню і аб'ём. Паверхня цыліндра складаецца з двух кругоў і бакавой паверхні (рыс. 403, гл. с. 188). Кругі называюцца асновамі цыліндра, іх радыус R роўны адной са старон прамавугольніка. Калі бакавую паверхню цыліндра разгарнуць на плоскасць, атрымаецца прамавугольнік. Адна з яго старон



Рыс. 402

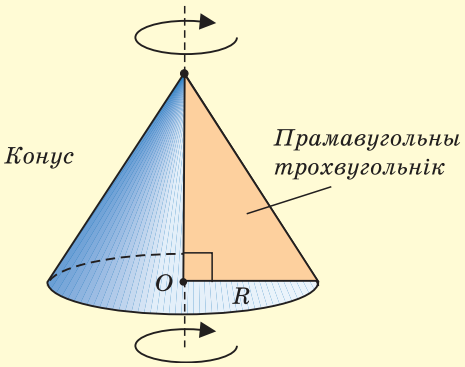
Правообладатель Народная асвета



Рыс. 403

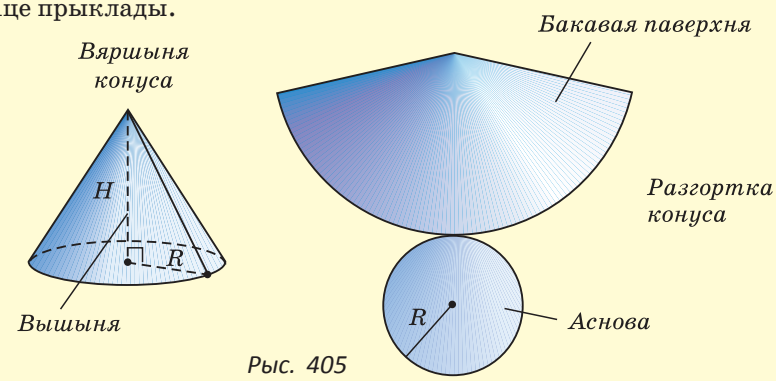
роўна старане прамавугольніка, а другая — даўжыні акружнасці асновы, г. зн. $2\pi R$. Вышыня H цыліндра роўна адной са старон прамавугольніка.

Калі вярцець прамавугольны трохвугольнік вакол аднаго з катэтаў, атрымаецца ***конус*** (рыс. 404). Як шар і цыліндр, конус — гэта геаметрычнае цела, якое мае паверхню і аб'ём. Паверхня конуса складаецца з аднаго круга, які называецца асновай конуса, і бакавой паверхні. Радыус R асновы роўны аднаму з катэтаў трохвугольніка вярчэння. Калі бакавую паверхню конуса разгарнуць на плоскасць, то яна будзе ўяўляць сабой сектар круга (рыс. 405). Другі катэт з'яўляецца вышынёй конуса. Вышыня H конуса выходзіць з вяршыні і перпендыкулярна да асновы конуса.



Рыс. 404

Разгледжаныя намі целы: шар, цыліндр і конус — называюць *целамі вярчэння*. У жыцці, вытворчасці, тэхніцы гэтыя целы сустракаюцца даволі часта. Прывядзіце прыклады.



Рыс. 405

Правообладатель Народная асвета

Мадэляванне

Заданне 1.

а) Вазьміце прамавугольную палоску паперы памерам 10 см × 20 см і згарніце яе ў цыліндр. Змацуйце краі паперы. Вызначыце прыкладны радыус асновы гэтага цыліндра. Выражыце два кругі вызначанага радыуса і замацуйце іх у месцах асноў цыліндра.

б) Знайдзіце ў квадратных сантыметрах прыблізжаную плошчу поўнай паверхні цыліндра. Карыстайцеся формулай плошчы круга $S = \pi R^2$ і значэннем $\pi \approx 3{,}14$.

Заданне 2.

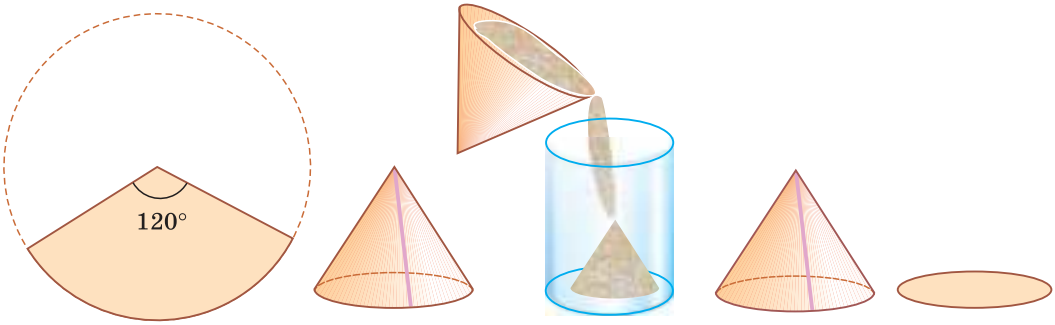
а) На паперы нарысуйце круг радыусам 10 см. Выражыце з круга сектар з цэнтральным вуглом, роўным 120°. Згарніце гэты сектар у конус. Змацуйце краі паперы скотчам. Вызначыце прыкладны радыус R асновы гэтага конуса і яго вышыню H пры дапамозе лінейкі. Для больш дакладнага вызначэння вышыні можна карыстацца тэарэмай Піфагора.

б) Знайдзіце прыблізжаную плошчу бакавой паверхні конуса, выкарыстаўшы формулу плошчы круга і той факт, што плошча сектара з вуглом 120° складае адну трэцюю частку ад плошчы круга.

в) Знайдзіце прыблізжаны аб'ём гэтага конуса ў кубічных сантыметрах, выкарыстаўшы формулу аб'ёма конуса $V = \frac{1}{3} S_{асн} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$.

Перавярніце конус вяршыняй уніз і насыпце даверху ў атрыманую варонку цукар. Перасыпце цукар у цыліндрычную шклянку з дзяленнямі. Вызначыце па дзяленнях, колькі мілілітраў склаў аб'ём цукру. Улічваючы, што 1 мл = 1 см^3, параўнайце аб'ём конуса, атрыманы двума рознымі спосабамі.

г) Выражыце круг патрэбнага радыуса і замацуйце яго ў месцы асновы конуса. Перад гэтым унутр конуса можна пакласці запіску з пажаданнямі будучаму пакаленню навучэнцаў.



Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя. 8 кл.» можна знайсці на сайце: http://e-vedy.adu.by, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 8 кл.».

Правообладатель Народная асвета

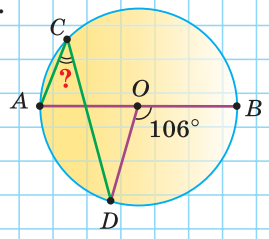
ЗАПАМІНАЕМ

1. Датычная да акружнасці перпендыкулярна да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку.
2. Цэнтр акружнасці, упісанай у вугал, ляжыць на бісектрысе вугла.
3. Упісаны вугал роўны $\frac{1}{2}$ адпаведнага цэнтральнага вугла або $\frac{1}{2}$ дугі, на якую ён абапіраецца.
4. Вугал паміж перасякальнымі хордамі роўны паўсуме градусных мер дуг, якія змяшчаюцца ўнутры дадзенага вугла і ўнутры вугла, яму вертыкальнага.
5. Вугал паміж сякучымі да акружнасці, праведзенымі з пункта, адзначанага па-за акружнасцю, роўны паўрознасці градусных мер дуг, якія змяшчаюцца ўнутры вугла.
6. Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя паміж сабой.
7*. Калі з аднаго пункта да акружнасці праведзены датычная і сякучая, то квадрат адрэзка датычнай роўны здабытку большага адрэзка сякучай на яго знешнюю частку.

Правяраем сябе

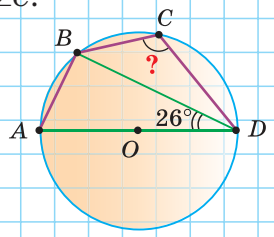
Тэст 1

O — цэнтр акружнасці. Знайдзіце $\angle ACD$.



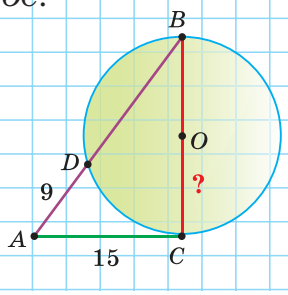
Тэст 2

AD — дыяметр акружнасці. Знайдзіце $\angle C$.



Тэст 3

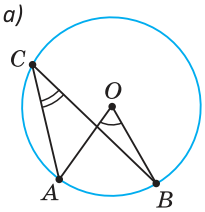
AC — датычная. Знайдзіце радыус OC.

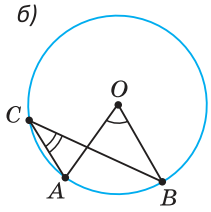


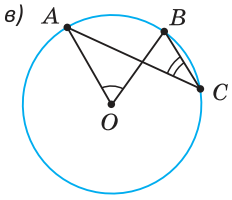
Правообладатель Народная асвета

ПАДРЫХТОЎКА ДА КАНТРОЛЬНАЙ РАБОТЫ № 4

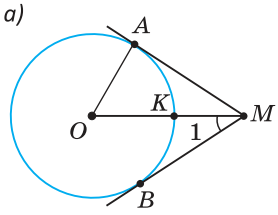
1. Знайдзіце $\angle C + \angle O$, калі: а) $\smile AB = 60°$; б) $\smile AB = 62°$; в) $\smile AB = 58°$.

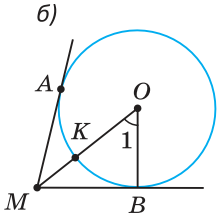
а) 

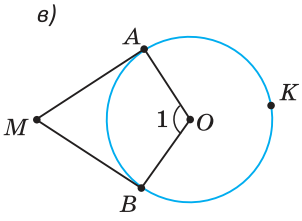
б) 

в) 

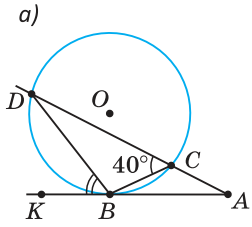
2. Знайдзіце $\angle 1$, калі: а) $\smile AK = 60°$; б) $\smile AK = 56°$; в) $\smile AKB = 260°$.

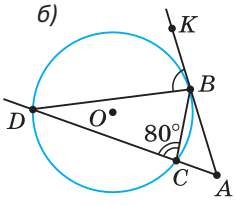
а) 

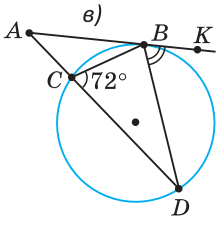
б) 

в) 

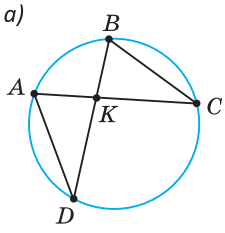
3. Знайдзіце $\angle KBD$, дзе B — пункт дотыку.

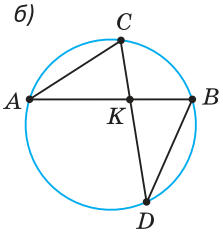
а) 

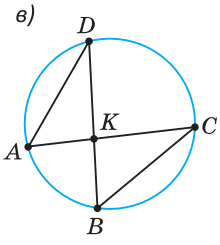
б) 

в) 

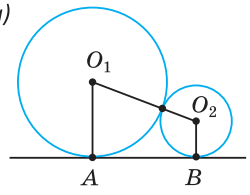
4. Запоўніце пропуск: а) $\frac{AK}{BK} = \frac{DK}{\ldots}$; б) $\frac{CK}{BK} = \frac{AK}{\ldots}$; в) $DK \cdot KB = AK \cdot \ldots$.

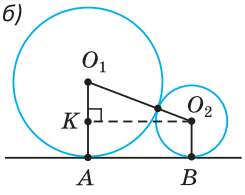
а) 

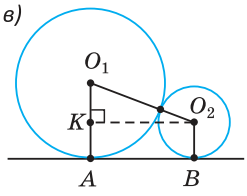
б) 

в) 

5. $R = 36$, $r = 25$. Знайдзіце: а) O_1O_2; б) O_1K; в) $S_{AO_1O_2B}$.

а) 

б) 

в) 

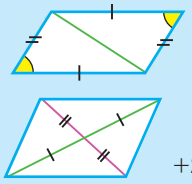
Правообладатель Народная асвета

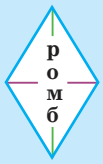
Сума вуглоў многавугольніка $180° (n - 2)$

Паралелаграм

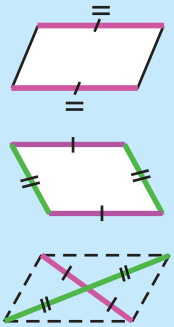
Уласцівасці

1
2
3
4
5





Прыметы



+2. дыяганалі: ⊥ і біс.

прамавугольнік

+1. дыяганалі роўныя

квадрат

База ведаў па геаметрыі. 8 клас

Ведаць і ўмець даказваць

1. Сума ўнутраных вуглоў многавугольніка роўна $180°(n - 2)$.

2. Уласцівасці паралелаграма: 1) сума суседніх вуглоў роўна 180°; 2) дыяганаль дзеліць паралелаграм на два роўныя трохвугольнікі; 3) — 4) у паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, процілеглыя вуглы роўныя; 5) дыяганалі паралелаграма пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

3. Прыметы паралелаграма. Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі ў яго: 1) дзве стораны роўныя і паралельныя; 2) процілеглыя стораны парамі роўныя; 3) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

4. Дыяганалі прамавугольніка роўныя.

5. Дыяганалі ромба ўзаемна перпендыкулярныя і ляжаць на бісектрысах яго вуглоў.

6. Тэарэма Фалеса: «Калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, то на другой старане вугла адкладуцца роўныя паміж сабой адрэзкі».

7. Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца гэтым пунктам у адносіне $2 : 1$, лічачы ад вяршыні.

8. Сярэдняя лінія m трохвугольніка паралельна аснове і роўна яе палавіне, г. зн. калі M і K — сярэдзіны старон AB і BC трохвугольніка ABC, то $MK \parallel AC$ і $MK = \frac{1}{2}AC$.

9. Сярэдняя лінія m трапецыі паралельна асновам і роўна іх паўсуме, г. зн. $m \parallel a$, $m \parallel b$ і $m = \frac{a+b}{2}$, дзе a і b — асновы трапецыі.

10. Плошчы: квадрата — $S = a^2$; прамавугольніка — $S = ab$; паралелаграма — $S = ah$; трохвугольніка — $S = \frac{1}{2}ah$; трапецыі — $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; прамавугольнага трохвугольніка — $S = \frac{ab}{2}$; ромба — $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.

11. Тэарэма Піфагора: «Сума квадратаў катэтаў роўна квадрату гіпатэнузы, г. зн. $a^2 + b^2 = c^2$».

12. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў. Трохвугольнікі падобныя, калі: 1) два вуглы аднаго трохвугольніка адпаведна роўны двум вуглам другога трохвугольніка; 2) дзве стораны аднаго трохвугольніка прапарцыянальны двум старанам другога трохвугольніка, а вуглы паміж імі роўныя; 3) тры стораны аднаго трохвугольніка прапарцыянальны тром старанам другога трохвугольніка.

13. Прамая, якая паралельна старане трохвугольніка і перасякае яго стораны, адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму.

14. Прамавугольныя трохвугольнікі падобныя па вострым вугле.

Правообладатель Народная асвета

15. Плошчы падобных трохвугольнікаў адносяцца як квадраты адпаведных старон, г. зн. калі $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2$.

16. Бісектрыса вугла трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам, г. зн. калі BK — бісектрыса вугла B трохвугольніка ABC, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$.

17. Датычная перпендыкулярна да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку.

18. Упісаны вугал роўны палавіне адпаведнага цэнтральнага вугла.

19. Упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу, роўныя паміж сабой.

20. Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, — прамы.

21. Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя паміж сабой.

22. Плошча роўнастаронняга трохвугольніка $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

23. Калі сума квадратаў дзвюх старон трохвугольніка роўна квадрату трэцяй стараны, то трохвугольнік прамавугольны (адваротная тэарэма Піфагора).

24. Плошчы трохвугольнікаў з агульнай вышынёй адносяцца як адпаведныя асновы.

25. Вугал паміж перасякальнымі хордамі роўны паўсуме дуг, адна з якіх змяшчаецца ўнутры дадзенага вугла, а другая — унутры яму вертыкальнага.

26. Вугал паміж сякучымі, якія выходзяць з пункта па-за акружнасцю, роўны паўрознасці дуг, якія змяшчаюцца ўнутры вугла.

27. Вугал паміж хордай і датычнай, якія маюць агульны пункт на акружнасці, роўны палавіне дугі, якая змяшчаецца ўнутры вугла.

28. Для датычнай і сякучай, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, квадрат адрэзка датычнай роўны здабытку большага адрэзка сякучай на яго знешнюю частку.

Правообладатель Народная асвета

АДКАЗЫ

Глава I

1. а) 720°; б) 1440°; в) 2700°. **2.** а) 110°; б) 140°; в) 180°. **4.** 42 см. **5.** а) 3; б) 5; в) 6. **6.** 36°; 126°; 54°; 144°. **7.** а) 100°; б) 72°; 72°; 72°; 144°. **8.** а) Па 160 см; б) 9 см. **9.** 45°. **10.** Указанне: карыстайцеся няроўнасцю трохвугольніка. **12.** 540°. **13*.** 75°. **14*.** Пункт перасячэння дыяганалей. Указанне: карыстайцеся няроўнасцю трохвугольніка. **15*.** 18 см, 2 см. Указанне: карыстайцеся ўласцівасцю ломанай. **16*.** Тры. **19.** а) $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle D = 130°$; б) $\angle A = \angle C = 70°$, $\angle B = \angle D = 110°$; в) $\angle A = \angle C = 80°$, $\angle B = \angle D = 100°$; г) $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = \angle D = 140°$; д) $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$. **20.** а) $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 14$ см; б) $AB = CD = 11$ см, $AD = BC = 13$ см; в) $AB = CD = 9$ см, $AD = BC = 15$ см; г) $AB = CD = 8$ см, $AD = BC = 16$ см; д) $AB = BC = CD = AD = 12$ см. **21.** а) 28 см; б) 42 см. **22.** 94 см. **23.** 38 см. **24.** а) 1) 10 см; 2) 5 см; б) 5 см і 10 см. **26.** 32 см. **27.** 48 см. **28.** 24 см. **29.** 52°. **31*.** 4. **38.** 80. **39.** 54°. **42.** а) 108°; 72°; б) 54°. **43.** 308 см. **48.** (6; 1), (–8; 1), (2; 9). **49*.** 6 см. **51*.** Указанне: карыстайцеся тэарэмай аб перасячэнні вышынь трохвугольніка. **52.** 4 см. **53.** 34 см. **54.** 36 см. **55.** 12 см. **56.** 28. **58.** 56°. **59.** 154°. **60.** 40 см. **61.** 3 см. **63.** 30°, 60°. **64.** 90°. **65*.** а) 18 см. **68*.** Указанне: разгледзьце прамавугольнік $ABCD$, $A(–3; –2)$, $B(–3; 7)$, $C(8; 7)$, $D(8; –2)$. **69.** г). **71.** а) 48 см; б) 55° і 70°; в) 16 см. **72.** а) 128°; б) 64°; в) 52°; г) 26°. **73.** а) 48 см; б) 72 см; в) 64 см. **74.** 58°. **75.** 96 см. **76.** 32 см. **77.** а) 30°; 75°; 75°; б) 60°; 60°; 60°. **82.** 180°. **83.** 54 см. **84.** 72 см. **85.** 24 см. **87.** 6 см. **89.** 84 см. **94*.** Указанне: у $\triangle KBM$ правядзіце вышыню BH. **95.** 18 см. **96.** 7. **97.** **39** см. **98.** 36 см. **99.** 37 см. **100*.** 63 см. **102.** 40 см. **103.** 45°. **104.** 9 см; 32 см. **105.** а) 24 м; б) 98 м. **109.** 64 см. **110.** а) 22 см; б) 64°. **113*.** 6 см. **114*.** 36°. **115.** $MK = 4$ см, $AM = 8$ см, $CM = 7$ см, $CP = 10{,}5$ см. **116.** 32 см. **117.** 32 см. **119.** 93 см. **121*.** 16 см. **122*.** 63 см. **125.** $\angle B = 110°$, $\angle D = 50°$, $MN = 19$ см. **3.** 120°. **127.** а) 140°; б) $4 : 3$. **128.** а) 36 см; б) 102 см. **129.** а) 12 см, 8 см; б) 7 см, 3 см. **130.** 74 см. **131.** а) 19 см; б) 15 см; в) 4 см. **132.** а) 36 см; б) 52 см. **133.** 10 см. **134.** 8 см. **136.** 2 см. **137.** 8 см. **138*.** 3 см. **139*.** $\angle A = \angle D = 60°$; $\angle B = C = 120°$. **141*.** 90°. **144.** а) 18 см; б) 16 см. **145.** 54,8 см. **148.** 29°. **149.** 16 см. **150.** а) 9 см; б) 9,5 см; в) 15 см. **151*.** 3 см. **152*.** 8 см.

Правообладатель Народная асвета

Глава II

156. а) 82 см^2; б) 396 см^2; в) 21 см^2. **157.** 4 см і 6 см. **159.** а) 46 дм; б) 72 м^2. **160.** 45 см^2. **162.** а) 28 см^2; б) 42 см. **163.** 24 см^2. **164.** 35 см^2. **165.** а) У 9 разоў; б) у 4 разы. **166.** На 21 %. **167*.** 15. **170.** а) 60 см^2; б) 28 см^2; в) 48 см^2. **171.** а) 5 см; б) 72 см^2. **172.** а) 36 см; б) 88 см. **173.** 35 см^2. **174.** 9 см. **175.** 12. **176.** а) 54 см; б) 72 см^2. **177.** 48. **178.** 153 см^2. **179.** 48 см^2. **180.** 56 см^2. **181.** 96 см^2. **182.** 90 см^2. **183*.** 27 см^2. **185.** а) 12 см^2; б) 17,5 см^2; в) 12,5 см^2. **186.** 16 см. **187.** а) 17 см^2; б) 6 см^2. **188.** а) 12 см; б) 3 м. **190.** 64 см^2. **191.** а) 60 см^2; б) 12 см. **192.** 3 : 8. **193.** 120 см. **194.** а) 30 см^2; б) 10 см^2; в) 20 см^2; г) 20 см^2. **195.** 15 кв. адзінак. **196.** а) 15 см; б) 24 см. **198.** 128 см^2. **200.** 6 см. **201*.** 120 см, 60 см, 80 см. **202*.** 50 см^2. **203*.** 60°. **205.** а) 15 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 5 дм; г) 4 м. **206.** а) 8 см; б) 7 м; в) $3\sqrt{3}$ см; г) $\sqrt{10}$ см. **207.** 60 см^2. **208.** 54 см^2. **209.** а) 336 см^2; б) 120 см^2. **210.** 225 см^2. **211.** а) З'яўляецца; б) не з'яўляецца; в) з'яўляецца. **212.** а) 24 см^2; б) 2,4 дм^2; в) 2 м^2. **213.** а) $2\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см^2; б) 24 см, $4\sqrt{3}$ см. **214.** а) 6000 м^2; б) 168 дм^2; в) $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$. **215.** а) 9 м, 12 м; б) 24 см^2. **216.** а) 12; б) 20. **217.** а) 72; б) 14,4. **219.** а) 8 см^2; б) 10 см. **220.** 11,2 см. Указанне: гл. ключавую задачу **4**. **221.** 15 см. **223*.** 24 см^2. **224*.** 8 см^2. Указанне: з асновы любой медыяны (сярэдзіны стараны) правядзіце прамую, паралельную адной з астатніх медыян. Разгледзьце трохвугольнік, утвораны гэтай прамой і дзвюма медыянамі. **225*.** 9,6 см. **226*.** 5 адзінак. **228.** а) 69 см^2; б) 12 см; в) 14 см. **229.** а) 350 см^2; б) 12 см^2. **230.** 270 см^2. **231.** а) 6 см; б) 4 см. **232.** 77 см^2. **233.** 28 см^2. **234.** 128 см^2. **235.** а) $42\sqrt{3}$ см^2; б) $24\sqrt{3}$ см^2. **236.** а) 18 см^2; б) 13,2 см^2. **237.** а) $50\sqrt{5}$ см^2; б) 30 см^2. **238.** 8 см і 128 см^2. **239.** 42 см^2. **240*.** 36 см^2. **241*.** 1 : 2. **242*.** 80 см^2. **243*.** 16 см^2. **244.** 48 см^2. **245.** $\frac{1}{6}$. **246.** 25 %. **247*.** 30 см^2. **249*.** Указанне: выкарыстайце тое, што сярэдняя лінія адсякае ад дадзенага трохвугольнік, плошча якога роўна $\frac{1}{4}$ плошчы дадзенага. **250.** 48 см^2. **251.** $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **252.** 80 см^2. **253*.** Указанне: складзіце з 8 атрыманых трохвугольнікаў паралелаграм: гл. заданні Главы I с. 28. **255.** 36 см^2. **256.** 63 см^2. **257*.** Указанне: гл. ключавую задачу **4**. **259.** Указанне: правядзіце праз пункт F прамыя, паралельныя старанам трохвугольніка. Разгледзьце атрыманыя паралелаграмы і роўнастароннія трохвугольнікі.

Правообладатель Народная асвета

Глава III

261. а); б). **262.** а) 20 см; б) 2,4 см; в) 32 см. **263.** а) 6 см, 4,5 см; б) 44 см. **264.** а) 8 см, 18 см, 6 см; б) 28 см. **265.** а) 9 см; б) 9 см. **266.** а) 20 см; б) 54 см; в) 15 см; г) 14 см. **268.** 22 см. **269*.** 120 см^2. **270*.** 24 см^2. Указанне: знайдзіце S_{ABP}, адносіну $BB_1 : B_1A_1 : A_1P$, S_{AA_1P}, S_{ABA_1}, S_{MBB_1}, $S_{AMB_1A_1}$. **272.** а) $BC = 12$ см, $A_1C_1 = 8$ см; б) $AC = 19{,}6$ см, $AB = 15$ см. **273.** а) 44 см; б) 31 см. **274.** а) 60°; б) 30°; в) 7 см; г) 6 см^2. **275.** 9 м. **276.** 6 см. **277.** 28 см. **278.** 38°. **279.** 12 см. **280.** 4 см. **283.** 4 см; 8 см. **284.** 2 : 5. **285.** 9 : 7. **286*.** 12 см. **287*.** 14 см. **288*.** а) 9 см і 24 см; б) 8 см і 9 см. **291.** Пры $A_1C_1 = 5$ трохвугольнікі падобныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі (2-я прымета падобнасці). **292.** $\triangle FGE \sim \triangle KMN$ па трох старанах (3-я прымета падобнасці). **293.** а) 10,5 см; б) 45 см. **295.** $P_{ABC} : P_{KNM} = 3 : 2$. **296.** а) 78 см; б) 12 см. **297.** 3,75 см. **299.** 96 см^2. **300.** а) 4 см; б) 12 см; в) 9 см. **303.** 96 см^2. **304.** 48 см. **305.** 7 см. **306.** 5 см. **307.** 20 см. **308.** а) 4; б) 6; в) 12. **310.** а) 6; б) 9. **312.** а) 3 см; б) 9 см. **313.** а) 12 м; б) 1 см і 3 см; в) 8 см. **314.** а) 30 см; б) 1120 м. **315*.** 21 см. Указанне: карыстайцеся тым, што адпаведныя вышыні ў падобных трохвугольніках адносяцца як іх адпаведныя стораны. Абазначце $MN = KH = x$, $BK = 30 - x$ і складзіце прапорцыю. **316*.** 20 см^2. Указанне: прадоўжыце адрэзак AM да перасячэння з прамой BC у пункце N і разгледзьце дзве пары падобных трохвугольнікаў: $\triangle AMD$ і $\triangle NMC$, $\triangle BPN$ і $\triangle KPA$. **318.** а) 4 см; б) 10 см; в) 32 см. **319.** 21 см. **320.** 4 см. **321.** 3 см; 4 см. **322.** $3\sqrt{5}$ см. **323.** 76°. **324*.** 75 см^2. **326.** а) Павялічыцца ў 4 разы; б) павялічыцца ў 9 разоў; в) павялічыцца ў 6,25 раза; г) паменшыцца ў 100 разоў. **327.** 40 см^2. **328.** а) 4 : 9; б) 8 : 5. **329.** 1 : 9. **330.** 40 см^2. **331.** $9\frac{3}{8}$ м^2. **332.** 160 см^2. **333.** 18 м^2. **334.** а) 24 см^2; б) $2\sqrt{S_1S_2}$ (гл. «Наглядная геаметрыя, 8 клас» Гл. 3. Ключавая задача **10**); в) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **335.** а) 96 см^2; б*) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$ (гл. «Наглядная геаметрыя, 8 клас» Гл. 3. Ключавая задача **5**). **336.** 24 см^2. **337.** $\frac{1}{3}$. **338*.** 8 см^2 (гл. «Наглядная геаметрыя, 8 клас» Гл. 3. Ключавая задача **3**). **339*.** 30 см^2. **340*.** 10 см. Указанне: карыстайцеся падобнасцю трохвугольнікаў ABH і BCH і тэарэмай аб плошчах падобных трохвугольнікаў. **341*.** 6 см^2. **342*.** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. **344.** 4. **345.** 21. **346.** 15. **347.** 4. **348.** 5. **349.** 60 см^2. **350.** $12\sqrt{3}$.

Правообладатель Народная асвета

Глава IV

352. а) 50°; б) 55°; в) 31°. **353.** а) 62°; б) 150°; в) 8 см. **354.** а) 150°; б) 6 см. **355.** 24 см. **356.** 99°. **357.** а) 5 см; б) 9 см^2. **358.** 6 см. **360.** 24 см. **361.** 8, 10. **362*.** 5 кв. адзінак. **365.** Пасярэдні перпендыкуляр да адрэзка AB. **366.** а) Перасякаюцца; б) датыкаюцца знешнім чынам; в) размешчаны знешнім чынам. **367.** 11 м. **368.** 280 см. **369.** 24 см^2. **370.** 4 см. **371.** 6 м. **372.** 8 м. **373.** 9 см. **375.** 53°. **376*.** 1,44 см і 36 см. **377*.** 6 см. **381.** а) $\smile AC = 80°$, $\angle ABC = 40°$; б) $\smile AC = 100°$, $\smile BC = 80°$; в) $\smile AB = 116°$. **382.** а) 24 см; б) $24\sqrt{2}$ см; в) 48 см; г) 24 см. **383.** а) 45°; б) 30°; в) 42°. **384.** 102°, 102°, 156°. **385.** а) 64°; б) 42°8′; 21°4′; в) 40°; 80°; 80°. **386.** 140°. **387.** 84°. **388.** 100°. **389.** а) 6 см; б) 26 см; в) 7 см. **391.** а) $4\sqrt{3}$ см^2; б) 32 см^2. **392.** 26°. **393.** 52°. **394.** 30°. **395.** б) 18 см; в) 60 см^2. **396.** $18\sqrt{3}$ см^2. **398*.** 40°. **399.** Указанне. Правядзіце адрэзкі AC і BD. **400.** Правядзіце з цэнтра акружнасці перпендыкуляры да паказаных хорд. **401.** а) 70°; б) 130°; в) 110°. **402.** а) 40°; б) 37°30′; в) 80°. **403.** 72°. **404.** 40°. **405.** 50°. **406.** 78°. **407.** 52°. **408.** 65°. **409.** а) 88°; б) 28°. **411*.** 60°. **414.** 4 см. **415.** 12 см. **416.** 22 см. **417.** 6 см. **418.** 6,5 см. Указанне. а) Выразіце градусныя меры вуглоў BAN і CAN праз градусныя меры дуг, змешчаных унутры гэтых вуглоў. **419.** 8 см. **420.** 1 см. **421*.** 42 см. **422*.** 6 см.

Правообладатель Народная асвета

ЗМЕСТ

Прадмова 3

Глава I. Чатырохвугольнікі

§ 1. Многавугольнік 11
§ 2. Паралелаграм і яго ўласцівасці 17
§ 3. Прыметы паралелаграма 22
§ 4. Прамавугольнік 29
§ 5. Ромб 35
§ 6. Квадрат 39
§ 7. Тэарэма Фалеса 46
§ 8. Сярэдняя лінія трохвугольніка 49
§ 9. Уласцівасць медыян трохвугольніка 52
§ 10. Трапецыя. Сярэдняя лінія трапецыі 55
§ 11. Раўнабедраная і прамавугольная трапецыі 60
§ 12*. Цэнтральная і восевая сіметрыя 64

Глава II. Плошчы многавугольнікаў

§ 13. Плошча квадрата, прамавугольніка 75
§ 14. Плошча паралелаграма 81
§ 15. Плошча трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, ромба 85
§ 16. Тэарэма Піфагора 91
§ 17. Плошча трапецыі 99
§ 18*. Рашэнне задач па тэме «Плошчы многавугольнікаў» 105

Глава III. Падобнасць трохвугольнікаў

§ 19. Абагульненая тэарэма Фалеса 117
§ 20. Падобнасць трохвугольнікаў 123
§ 21. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў 128
§ 22. Уласцівасць бісектрысы вугла трохвугольніка 136
§ 23. Уласцівасць плошчаў падобных трохвугольнікаў 139
§ 24*. Рашэнне задач па тэме «Падобнасць трохвугольнікаў» 148

Глава IV. Акружнасць

§ 25. Датычная да акружнасці 155
§ 26. Узаемнае размяшчэнне акружнасцей 161
§ 27. Цэнтральны і ўпісаны вуглы 167
§ 28. Вуглы, утвораныя хордамі, сякучымі і датычнымі ... 176
§ 29. Уласцівасць адрэзкаў хорд і датычных 182
База ведаў па геаметрыі. 8 клас 193

Адказы 195

Правообладатель Народная асвета

(Назва і нумар установы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Казакоў Валерый Уладзіміравіч

Геаметрыя

Вучэбны дапаможнік для 8 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева.* Рэдактар *Л. М. Ясніцкая.* Мастак *А. А. Жданоўская.* Мастацкія рэдактары *Н. У. Кузьмянкова, В. М. Карповіч.* Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко.* Карэктары *В. С. Бабеня, В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, Г. В. Алешка.*

Падпісана да друку 18.06.2018. Фармат $70\times100^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 16,25 + 0,33 форз. Ул.-выд. арк. 11,01 + 0,49 форз. Тыраж 16 000 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь. Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013. Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 04.10.2013. Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Правообладатель Народная асвета