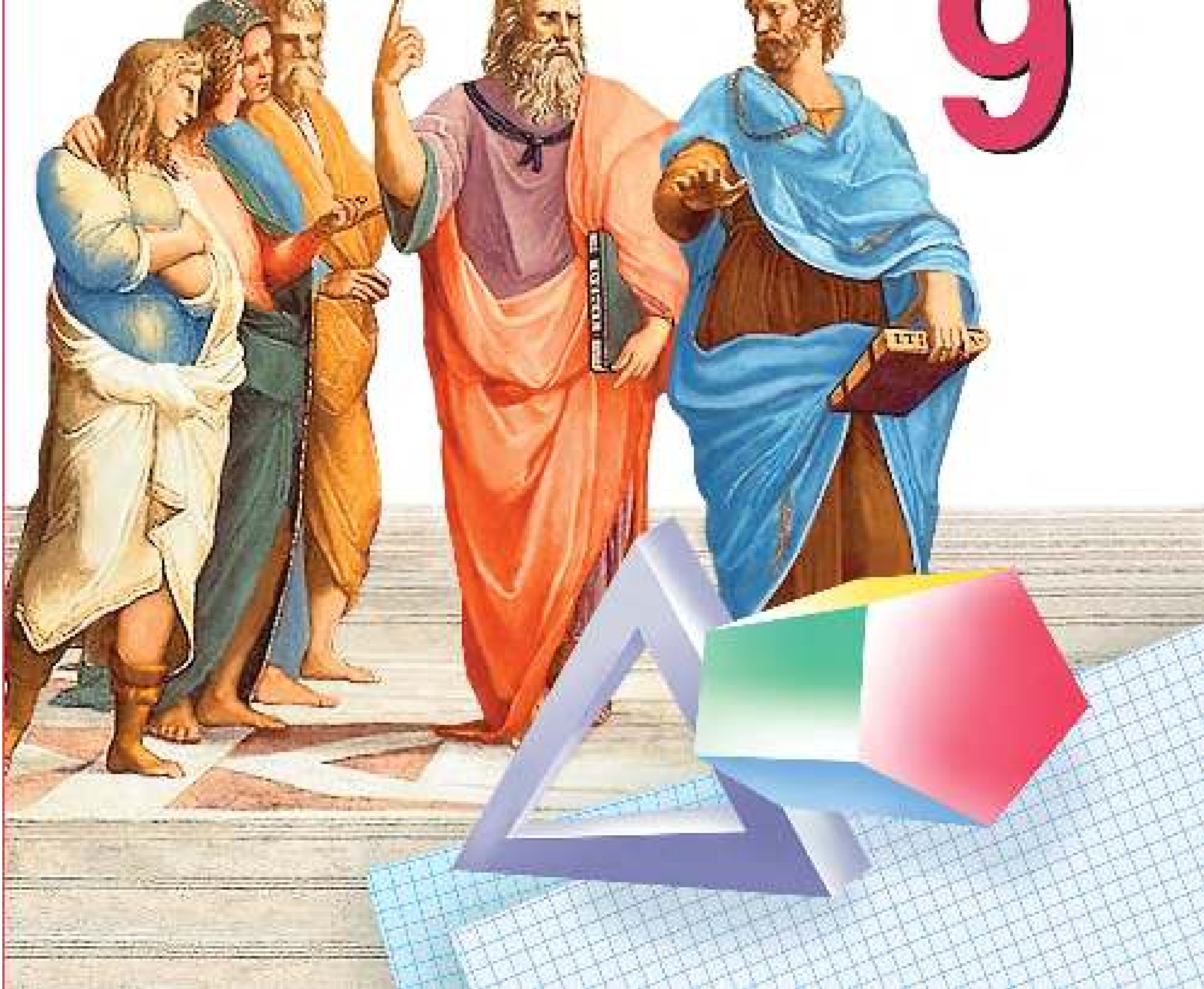
В. У. Казакоў

ГЕАМЕТРЫЯ

9



В. У. Казакоў

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 9 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2019

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
К14

У афармленні вокладкі выкарыстаны фрагмент фрэскі
Рафаэля Санці «Афінская школа»

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:
кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі
Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
(кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык *Г. А. Кукрак*);
настаўнік матэматыкі вышэйшай кваліфікацыйнай катэгорыі
дзяржаўнай установы адукацыі «Нясвіжская гімназія»
П. М. Раманчук

Казакоў, В. У.
К14 Геаметрыя : вучэбны дапаможнік для 9-га класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / В. У. Казакоў ; пер. з рускай мовы Н. М. Алганавай. — Мінск : Народная асвета, 2019. — 191 с. : іл.
ISBN 978-985-03-3108-3.

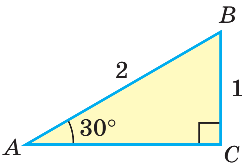
УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-3108-3

ПРАДМОВА

Сябры, у 9-м класе вы скончыце знаёмства з *планіметрыяй* (раздзелам геаметрыі, які вывучае фігуры на плоскасці) і прадэманструеце свае веды на экзамене. Каб атрымаць добры вынік, вам неабходна будзе паўтарыць усё, што было вывучана ў 7-м і 8-м класах, і паспяхова засвоіць матэрыял 9-га класа.

Панарама геаметрыі 9-га класа



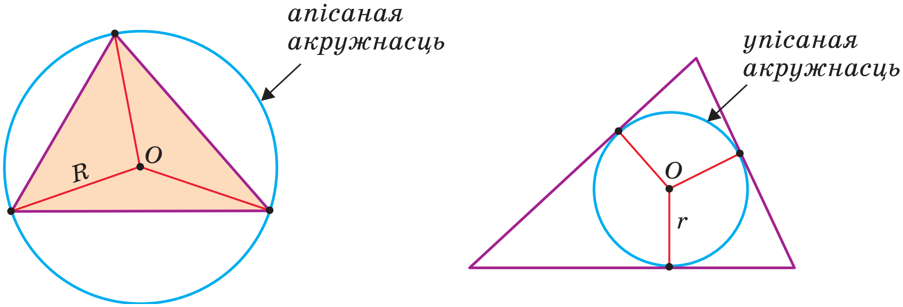
Рыс. 1

У першай главе гэтага дапаможніка вы пазнаёміцеся з такімі паняццямі, як *сінус*, *косінус*, *тангенс* і *катангенс вострага вугла*.

Так, сінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна катэта, процілеглага гэтаму вуглу, да гіпатэнузы.

Напрыклад, калі ў прамавугольным трохвугольніку ABC (рыс. 1) востры вугал A роўны 30°, катэт BC, процілеглы гэтаму вуглу, роўны 1, то гіпатэнуза AB роўна 2 і $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Далей, у другой главе, вы даведаецеся, як знайсці цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, г. зн. акружнасці, якая праходзіць праз усе яго вяршыні, і акружнасці, упісанай у трохвугольнік, г. зн. акружнасці, якая датыкаецца да ўсіх яго старон (рыс. 2).

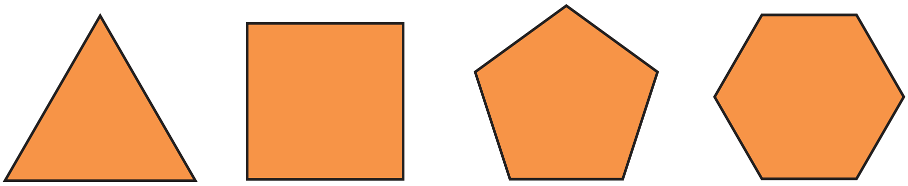


Рыс. 2

Трэцяя глава прысвечана дзвюм найважнейшым тэарэмам: *тэарэме сінусаў* і *тэарэме косінусаў*. Тут геаметрыя злучаецца з алгебрай. Мы атрымліваем магчымасць рашаць многія геаметрычныя задачы пры дапамозе ўраўненняў. Тэарэмы сінусаў і косінусаў дазваляюць устанавіць сувязь паміж велічынямі старон і вуглоў трохвугольніка. Пры дапамозе тэарэмы косінусаў мы выведзем знакамітую *формулу Герона* аб знаходжанні плошчы трохвугольніка па трох старанах a, b і c:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

дзе p — паўперыметр трохвугольніка.



Правільныя многавугольнікі

Рыс. 3

У чацвёртай главе разглядаюцца правільныя многавугольнікі. Гэта такія многавугольнікі, у якіх усе стораны роўныя і ўсе вуглы роўныя (рыс. 3).

Напрыклад, роўнастаронні трохвугольнік з’яўляецца правільным трохвугольнікам, а квадрат — правільным чатырохвугольнікам.

Тут жа будуць абгрунтаваны вядомыя вам формулы даўжыні акружнасці і плошчы круга: $C = 2\pi R$ і $S = \pi R^2$.

Такім чынам, у вучэбным дапаможніку «Геаметрыя, 9» чатыры главы. У пачатку кожнай главы прыводзіцца *карта главы*, дзе адлюстраваны вывучаемыя ў ёй фігуры і ўласцівасці.

Усе главы змяшчаюць дадатковы матэрыял пад рубрыкамі: **«Рэальная геаметрыя»**, **«Гімнастыка розуму»**, **«Мадэляванне»**, **«Геаметрыя 3D»**, з якімі вы знаёмы з папярэдніх класаў.

Главы складаюцца з некалькіх параграфаў, кожны з якіх змяшчае:

а) тэарэтычны матэрыял (азначэнні, тэарэмы);

б) заданні да параграфа.

Задачы ў рубрыцы «РАШАЕМ РАЗАМ» (*ключавыя задачы*) з’яўляюцца ўзорамі, дзе паказаны прыёмы рашэння задач. Часта ў іх даказваюцца дадатковыя ўласцівасці геаметрычных фігур. *У далейшым пры рашэнні задач можна спасылацца на гэтыя ўласцівасці як на вядомыя геаметрычныя факты.*

Увага!

У рубрыцы «Рашаем самастойна» прадстаўлены задачы, дастатковыя для ацэнкі вынікаў вучэбнай дзейнасці навучэнцаў пры паўрочным кантролі з выкарыстаннем дзесяцібальнай шкалы.

Задачы са знакам «*» з’яўляюцца задачамі *павышанага ўзроўню* складанасці, многія з іх носяць алімпіядны і даследчы характар. Яны могуць быць выкарыстаны на занятках з навучэнцамі, якія цікавяцца матэматыкай, а таксама для іх самападрыхтоўкі.

Сказанае датычыцца і вучэбнага матэрыялу са знакам «*».

На вокладцы вучэбнага дапаможніка паказаны фрагмент карціны выдатнага італьянскага мастака эпохі Адраджэння Рафаэля «Афінская школа». У цэнтры фрагмента размешчаны Платон (вучань Сакрата) і Арыстоцель (вучань Платона і настаўнік Аляксандра Македонскага). Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым знакаміты названыя гістарычныя персанажы.

Жадаем вам поспехаў у засваенні геаметрыі 9-га класа!

Гэта трэба ведаць (7—8-ы класы)

7-ы клас

1. Прыметы роўнасці трохвугольнікаў.
2. Уласцівасці і прыметы раўнабедранага трохвугольніка.
3. Уласцівасці і прыметы паралельных прамых.
4. Уласцівасць знешняга вугла трохвугольніка.
5. Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
6. Уласцівасць катэта, які ляжыць супраць вугла ў 30°.

8-ы клас

1. Формула сумы вуглоў многавугольніка.
2. Уласцівасці і прыметы паралелаграма, прамавугольніка, ромба.
3. Тэарэма Фалеса. Сярэдняя лінія трохвугольніка і сярэдняя лінія трапецыі.
4. Формулы плошчы квадрата, прамавугольніка, паралелаграма, трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, ромба, трапецыі.
5. Уласцівасць медыян трохвугольніка.
6. Тэарэма Піфагора і ёй адваротная.
7. Прыметы падобнасці трохвугольнікаў.
8. Уласцівасць плошчаў падобных трохвугольнікаў.
9. Уласцівасць датычнай да акружнасці.
10. Уласцівасць датычных, праведзеных да акружнасці з аднаго пункта.
11. Тэарэма аб упісаным і адпаведным яму цэнтральным вугле.
12. Уласцівасць упісаных вуглоў, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу. Уласцівасць упісанага вугла, які абапіраецца на дыяметр.

13*. Уласцівасць адрэзкаў перасякальных хорд.

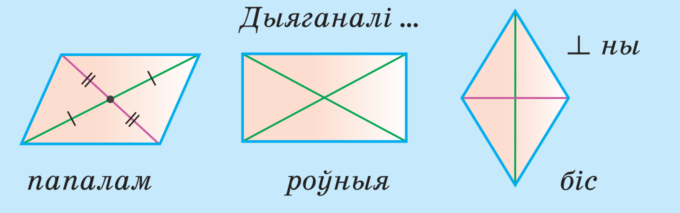
14*. Уласцівасць адрэзка датычнай і адрэзкаў сякучай, праведзеных да акружнасці з аднаго пункта.

Найбольш важныя пытанні 8-га класа адлюстраваны ў наступным апорным канспекце. Для падрабязнага паўтарэння вучэбнага матэрыялу 7-га і 8-га класаў можна карыстацца апорнымі канспектамі ў канцы дапаможніка.

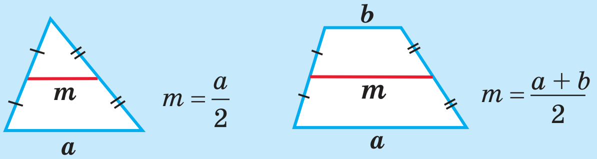
$180°(n - 2)$ — *сума вуглоў n-вугольніка*

8 кл.

ПАРАЛЕЛАГРАМЫ



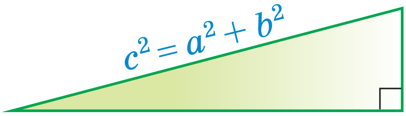
ФАЛЕС СЯРЭДНЯЯ ЛІНІЯ ПАРАЛЕЛЬНАЯ



$m = \frac{a}{2}$

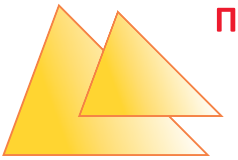
$m = \frac{a+b}{2}$

ПІФАГОР



$c^2 = a^2 + b^2$

ПРЫМЕТЫ ПАДОБНАСЦІ



I

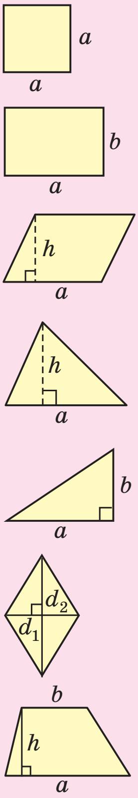
II

III

Адносіна плошчаў падобных роўна k^2

Упісаны вугал роўны $\frac{1}{2}$ цэнтральнага

ПЛОШЧЫ



$S = a^2$

$S = ab$

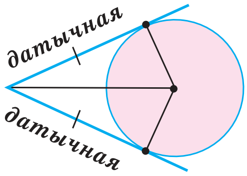
$S = a$

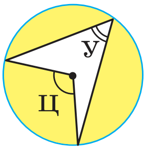
$S = \frac{1}{2}\ a$

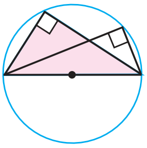
$S = \frac{ab}{2}$

$S = \frac{d_1 d_2}{2}$

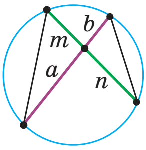
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$



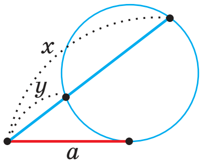




$ab = mn$



$a^2 = xy$



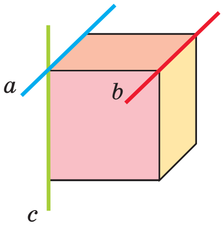
А цяпер праверце ўменне выкарыстоўваць свае веды пры рашэнні задач, выканаўшы наступны тэст. Кожная задача ў ім ацэньваецца ў 10 балаў, агульная колькасць балаў роўна 100. Правільныя адказы можна атрымаць у вашага настаўніка матэматыкі. Паспрабуйце набраць максімальную колькасць балаў. Паспяховага выканання тэста!

Тэст па геаметрыі за 8-ы клас

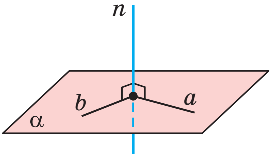
№	Умовы задач	Адказы на выбар
1	Дадзены паралелаграм $ABCD$, $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, $CD = 4$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма. Знайдзіце перыметр трохвугольніка AOB.	1) 14 см; 2) 15 см; 3) 18 см; 4) 22 см.
2	Дыяганалі прамавугольніка $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O, $\angle ACB = 40°$. Знайдзіце $\angle COD$.	1) 40°; 2) 50°; 3) 80°; 4) 60°.
3	Перыметр ромба роўны 24 см, плошча — 30 см^2. Знайдзіце вышыню ромба.	1) 5 см; 2) 4,5 см; 3) 6 см; 4) 8 см.
4	У трохвугольніку ABC $\angle C = 90°$, $AC = 16$ см, $AB = 20$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.	1) 160 см^2; 2) 320 см^2; 3) 48 см^2; 4) 96 см^2.
5	Вышыня трапецыі роўна 10 см, меншая аснова — 4 см, плошча — 100 см^2. Знайдзіце большую аснову трапецыі.	1) 12 см; 2) 16 см; 3) 20 см; 4) 24 см.
6	Дадзены трохвугольнік ABC, пункты K і M належаць старанам AB і BC адпаведна, $KM \parallel AC$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі $BK = 4$ см, $AK = KM = 6$ см, $MC = 9$ см.	1) 50 см; 2) 40 см; 3) 52 см; 4) 64 см.
7	Дыяганалі трапецыі $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перасякаюцца ў пункце O, $AO = 15$ см, $OC = 5$ см, $BC = 8$ см. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.	1) 18 см; 2) 24 см; 3) 32 см; 4) 16 см.
8	AB і AC — датычныя да акружнасці, B і C — пункты дотыку, $\angle BAC = 64°$. Пункты B і C разбіваюць акружнасць на дзве дугі. Знайдзіце градусную меру большай з іх.	1) 128°; 2) 116°; 3) 296°; 4) 244°.
9	У паралелаграме $ABCD$ вышыня $BH = 12$ см праведзена да стараны AD, дыяганалі $AC = 15$ см, $BD = 13$ см. Знайдзіце плошчу паралелаграма.	1) 84 см^2; 2) 96 см^2; 3) 72 см^2; 4) 108 см^2.
10	$AB = 100$ — дыяметр акружнасці з цэнтрам у пункце O, $BC = 80$ — хорда акружнасці, $OK \perp AB$, $K \in BC$. Знайдзіце падвоеную плошчу трохвугольніка KOB.	1) 1600; 2) 1875; 3) 2400; 4) 2019.

Экскурс у стэрэаметрыю

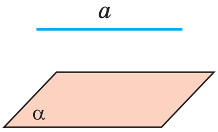
Успомнім, з якімі паняццямі *стэрэаметрыі* (раздзела геаметрыі, які вывучае ўласцівасці фігур у прасторы) вы пазнаёміліся ў 7—8-м класах (рыс. 4). Лічыцца, што прамая не мае таўшчыні і бясконцая ў абодва бакі, плоскасць не мае таўшчыні і бясконцая ва ўсе бакі.



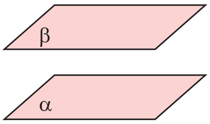
Калі дадзены куб, то прамыя *a* і *b* паралельныя, прамыя *a* і *c* перасякаюцца, прамыя *b* і *c* — скрыжоўваюцца.



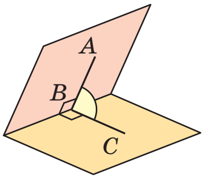
Прамая *n* называецца перпендыкулярнай плоскасці α, калі яна перпендыкулярна любой прамой гэтай плоскасці.



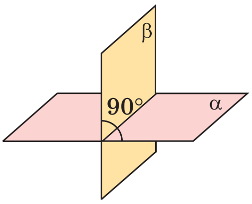
Прамая *a* называецца паралельнай плоскасці α, калі яна не перасякае гэту плоскасць.



Плоскасці α і β называюцца паралельнымі, калі яны не перасякаюцца.



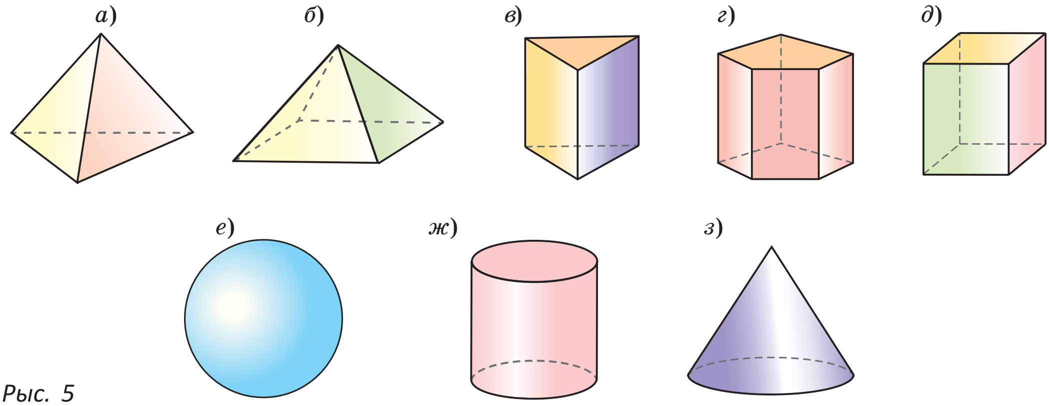
Двухгранны вугал — гэта вугал паміж паўплоскасцямі з агульнай мяжой. Ён вымяраецца велічынёй вугла *ABC*.



Плоскасці α і β называюцца перпендыкулярнымі, калі яны пры перасячэнні ўтвараюць двухгранны вугал, роўны 90°.

Рыс. 4

На рысунку 5 паказаны восем прасторавых фігур. Пакажыце гэтыя фігуры: пяцівугольная прызма, шар, трохвугольная піраміда, прамавугольны паралелепіпед, трохвугольная прызма, цыліндр, чатырохвугольная піраміда, конус.



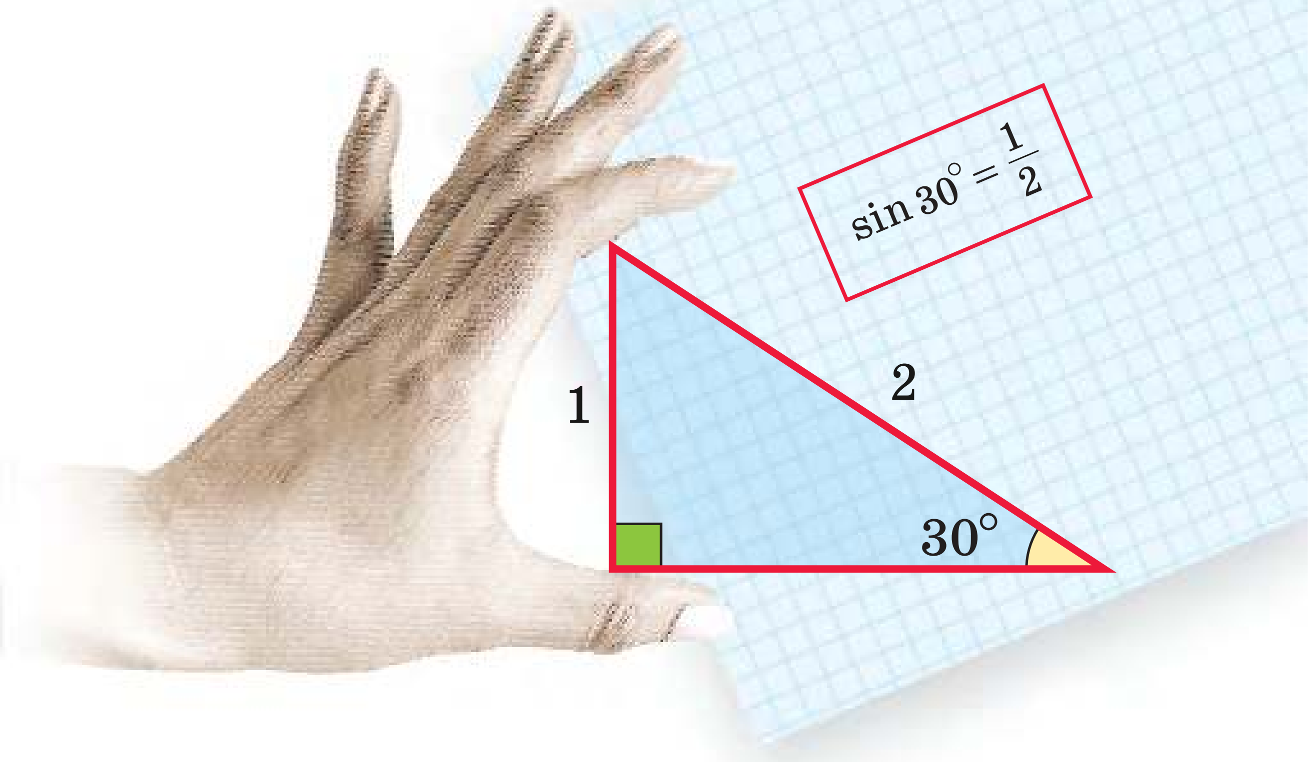
Рыс. 5

Глава I

Суадносіны ў прамавугольным трохвугольніку

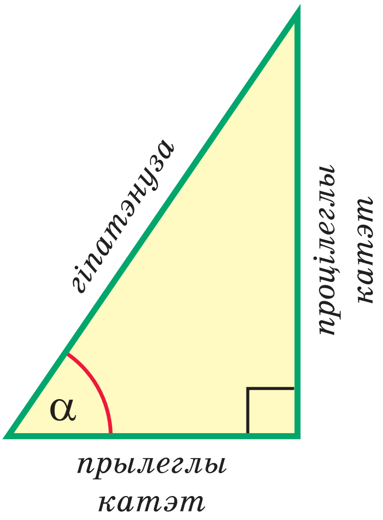
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Што такое сінус, косінус, тангенс і катангенс
- Чаму сінус 30° роўны $\frac{1}{2}$
- Як знайсці сярэдняе геаметрычнае двух лікаў



ТРЫГАНАМЕТРЫЯ

СІНУС КОСІНУС ТАНГЕНС КАТАНГЕНС

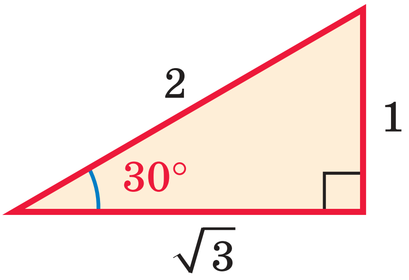


$$\sin\alpha = \frac{\text{процілеглы катэт}}{\text{гіпатэнуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{прылеглы катэт}}{\text{гіпатэнуза}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{процілеглы катэт}}{\text{прылеглы катэт}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{прылеглы катэт}}{\text{процілеглы катэт}}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

АСНОЎНАЯ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНАЯ ТОЕСНАСЦЬ

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

сярэдняе арыфметычнае

$$\frac{a+b}{2}$$

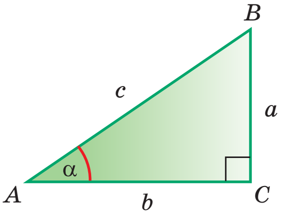
сярэдняе геаметрычнае

$$\sqrt{ab}$$

§ 1. Сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла

1. Азначэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла

Няхай у прамавугольным трохвугольніку гіпатэнуза роўна c, адзін з вострых вуглоў роўны α, *процілеглы* гэтаму вуглу катэт роўны a, *прылеглы* катэт — b (рыс. 6). Адносіны катэтаў да гіпатэнузы $\frac{a}{c}$ і $\frac{b}{c}$, а таксама адносіны катэта да катэта $\frac{a}{b}$ і $\frac{b}{a}$ маюць спецыяльныя назвы: *сінус*, *косінус*, *тангенс* і *катангенс* вострага вугла — і адпаведна абазначаюцца: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.



Рыс. 6

Азначэнне. **Сінусам** вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *процілеглага* катэта да гіпатэнузы:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *прылеглага* катэта да гіпатэнузы:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Азначэнне. **Тангенсам** вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *процілеглага* катэта да *прылеглага*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

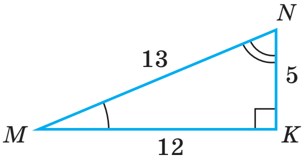
Катангенсам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна *прылеглага* катэта да *процілеглага*:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Прыклад. Вугал K у $\triangle MNK$ роўны 90° (рыс. 7). Тады:

$$\sin M = \frac{5}{13}, \qquad \cos M = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{5}{12}, \qquad \operatorname{ctg} M = \frac{12}{5}.$$



Рыс. 7

Для вугла N катэт MK — процілеглы, а катэт NK — прылеглы (гл. рыс. 7, с. 11). Таму згодна з азначэннямі атрымліваем:

$$\sin N = \frac{MK}{MN} = \frac{12}{13}, \quad \cos N = \frac{NK}{MN} = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} N = \frac{MK}{NK} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg} N = \frac{NK}{MK} = \frac{5}{12}.$$

Можна заўважыць, што сінус вострага вугла α прамавугольнага трохвугольніка і косінус другога вострага вугла гэтага трохвугольніка, які змяшчае $90° - \alpha$, роўныя, г. зн. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Гэтак сама $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Напрыклад, $\sin 60° = \cos 30°$, $\operatorname{tg} 40° = \operatorname{ctg} 50°$.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

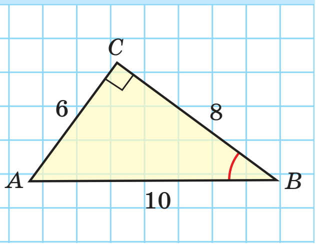
Тэст 1

а) $\sin B = \ldots$

б) $\cos B = \ldots$

в) $\operatorname{tg} B = \ldots$

г) $\operatorname{ctg} B = \ldots$



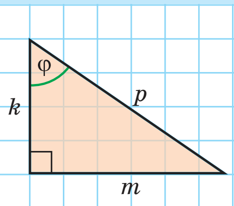
Тэст 2

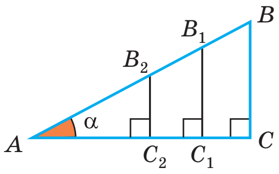
а) $\sin \varphi = \ldots$

б) $\cos \varphi = \ldots$

в) $\operatorname{tg} \varphi = \ldots$

г) $\operatorname{ctg} \varphi = \ldots$





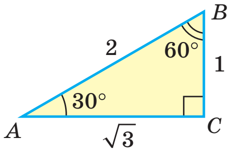
Рыс. 8

Значэнне сінуса вострага вугла, а таксама косінуса, тангенса і катангенса залежыць толькі ад велічыні вугла і не залежыць ад памераў і размяшчэння прамавугольнага трохвугольніка з дадзеным вострым вуглом. Гэта вынікае з таго, што прамавугольныя трохвугольнікі з роўным вострым вуглом падобныя, а ў падобных трохвугольнікаў адпаведныя стораны прапарцыянальныя. Так, у $\triangle ABC$ (рыс. 8) $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2}$.

2. Значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вуглоў 30°, 45°, 60°

Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC, у якога $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 1$ (рыс. 9). Паколькі катэт, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палавіне гіпатэнузы, то $AB = 2$. Па тэарэме Піфагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$ Тады:



Рыс. 9

$$\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

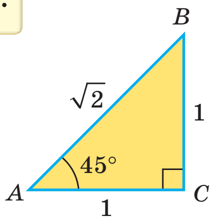
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Паколькі $\angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$ (гл. рыс. 9), то

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Разгледзім раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік ABC, у якога $\angle A = 45^\circ$, $AC = BC = 1$ (рыс. 10). Па тэарэме Піфагора



Рыс. 10

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Тады:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = 1.$$

Складзём табліцу значэнняў сінусаў, косінусаў, тангенсаў і катангенсаў для вуглоў 30°, 45° і 60°.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Знаходжанне значэнняў трыганаметрычных функцый

Значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса дадзенага вугла можна прыбліжана знаходзіць пры дапамозе спецыяльных трыганаметрычных табліц* або калькулятара.

---

* Трыганаметрычныя табліцы знаходзяцца на с. 54.

Напрыклад, пры дапамозе калькулятара, камп'ютара або мабільнага тэлефона (смартфона) знаходзім: $\sin 45° = 0{,}707106...$. Прыбліжанае значэнне трыганаметрычных функцый пры рашэнні задач будзем браць з акругленнем да чатырох знакаў пасля коскі: $\sin 45° = 0{,}7071$.

Такім чынам, дакладнае значэнне $\sin 45°$ роўна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а прыбліжанае — 0,7071.

Табліцы і калькулятар таксама дазваляюць знаходзіць велічыню вострага вугла па значэнні сінуса, косінуса або тангенса. Напрыклад, знойдзем востры вугал, сінус якога роўны 0,4175. Выбраўшы на камп'ютары від калькулятара «інжынерны», далей «градусы», трэба ўвесці паслядоўна $0{,}4175 + \boxed{\text{Inv}} + \boxed{\sin^{-1}}$. На экране з'явіцца адказ: 24,676... . Акруглім яго да дзясятых долей градуса і атрымаем 24,7°. Улічыўшы, што 1° змяшчае 60 вуглавых мінут, атрымаем: $0{,}7° = 0{,}7 \cdot 60' = 42'$. Шуканы вугал, сінус якога 0,4175, прыбліжана роўны $24°42'$.

А цяпер выканайце **Тэст 3**.

Тэст 3

Якая роўнасць няправільная:

а) $\sin 30° = \frac{1}{2}$; б) $\cos 60° = \frac{1}{2}$;

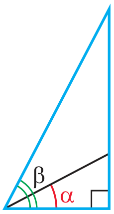
в) $\text{tg}\,45° = 1$; г) $\sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

4*. Трыганаметрычныя функцыі вострага вугла

Сінус, косінус, тангенс і катангенс з'яўляюцца функцыямі вугла, паколькі кожнаму вострាму вуглу x адпавядае адзінае значэнне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса. Яны называюцца *трыганаметрычнымі функцыямі* і запісваюцца так: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\,x$, $y = \text{ctg}\,x$.

Паколькі ў прамавугольным трохвугольніку катэт меншы за гіпатэнузу, то для вострага вугла x справядліва: $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$. Значыць, **сінус і косінус вострага вугла дадатныя і меншыя за 1.** Тангенс і катангенс вострага вугла могуць прымаць *любое дадатнае значэнне*. Напрыклад, $\text{tg}\,85° \approx 11{,}4$.

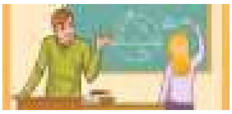
З павелічэннем вострага вугла сінус і тангенс нарастаюць, а косінус і катангенс спадаюць (рыс. 11), г. зн. калі $\beta > \alpha$, то $\sin\beta > \sin\alpha$, $\text{tg}\,\beta > \text{tg}\,\alpha$, але $\cos\beta < \cos\alpha$, $\text{ctg}\,\beta < \text{ctg}\,\alpha$ (гл. с. 28, задачу 2*). Гэта гарантуе, што сінус (косінус, тангенс і катангенс) вострага вугла вызначаюць гэты вугал адназначна.



Рыс. 11

Мадэляванне

Ордэн на вяршыні манумента на плошчы Перамогі ў г. Мінску асвятляецца пражэктарам, які знаходзіцца на адлегласці 10 м ад цэнтра асновы. Вышыня манумента 38 м. Вызначце велічыню вугла, які прамень пражэктара ўтварае з паверхняй зямлі (з прамой, якая злучае пражэктар і аснову манумента).

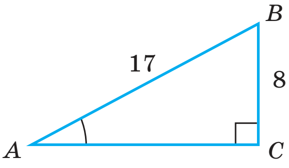


Заданні да § 1

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У прамавугольным трохвугольніку* ABC, *дзе* $\angle C = 90°$, *катэт* BC *роўны* 8 *см, гіпатэнуза* AB *роўна* 17 *см. Знайсці косінус вугла* A (*рыс.* 12).

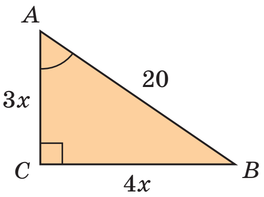


Рыс. 12

Рашэнне. Па тэарэме Піфагора знойдзем катэт AC: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см). Косінус вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны адносіне прылеглага катэта да гіпатэнузы. Тады $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$.

Адказ: $\frac{15}{17}$.

Задача 2. *Гіпатэнуза* AB *прамавугольнага трохвугольніка* ABC *роўна* 20 *см,* $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$ (*рыс.* 13). *Знайсці плошчу трохвугольніка.*

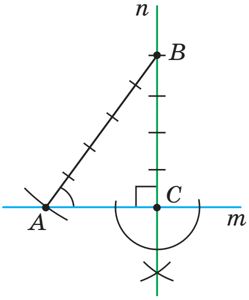


Рыс. 13

Рашэнне. Паколькі $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, то $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Абазначым $AC = 3x$ см, $BC = 4x$ см. Па тэарэме Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2$, $25x^2 = 400$, $x^2 = 16$, $x = 4$ $(x > 0)$. Тады $AC = 3 \cdot 4 = 12$ (см), $BC = 4 \cdot 4 = 16$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (см^2).

Адказ: 96 см^2.

Задача 3*. *Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудаваць вугал, сінус якога роўны* $\frac{4}{5}$.



Рыс. 14

Рашэнне. Ідэя рашэння. Пабудуем прамавугольны трохвугольнік з катэтам, роўным 4 адзінкам, і гіпатэнузай, роўнай 5 адзінкам. Сінус вугла, процілеглага дадзенаму катэту, будзе роўны $\frac{4}{5}$.

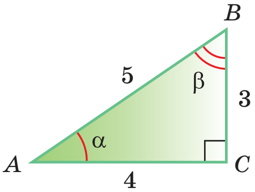
Пабудова. 1) Будуем прамы вугал C (рыс. 14), для чаго праводзім адвольную прамую m, адзначаем на ёй пункт C і будуем прамую n, якая праходзіць праз пункт C перпендыкулярна прамой m (успомніце па рысунку алгарытм пабудовы).

2) На прамой n ад пункта C адкладваем паслядоўна чатыры роўныя адрэзкі. Атрымліваем адрэзак BC, які змяшчае 4 адзінкі.

3) Будуем акружнасць з цэнтрам у пункце B радыусам, роўным пяці адзінкам. У перасячэнні гэтай акружнасці і прамой m атрымліваем пункт A. Вугал BAC — шуканы.

Доказ. З $\triangle ABC$ знаходзім $\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА*



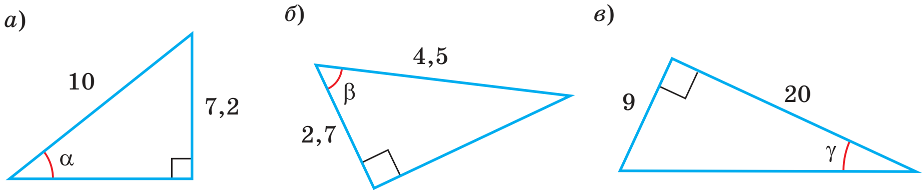
Рыс. 15

1. Па рысунку 15 знайдзіце:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$;
д) $\sin\beta$; е) $\cos\beta$; ж) $\operatorname{tg}\beta$; з) $\operatorname{ctg}\beta$.

2. Выкарыстаўшы клеткі ў сшытку, пакажыце відарыс прамавугольнага трохвугольніка ABC з прамым вуглом C, такі, што $\operatorname{tg} A = \frac{4}{5}$. Вызначце на вока велічыню вугла A. Праверце сваё меркаванне пры дапамозе транспарціра.

3. Па рысунках 16, *а*)—*в*) вылічыце адпаведна $\sin\alpha$, $\cos\beta$ і $\operatorname{tg}\gamma$.



Рыс. 16

---

* Да кожнага параграфа ёсць рэзерв задач, змешчаны ў дапаможніку «Наглядная геаметрыя. 9 клас» В. У. Казакова.

4. У прамавугольным трохвугольніку ABC гіпатэнуза AB роўна 25 см, катэт AC роўны 24 см. Знайдзіце:

а) $\sin A$; б) $\cos A$; в) $\operatorname{tg} B$;
г) $\operatorname{ctg} B$; д) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} B$; е) $\sin^2 A + \cos^2 A$.

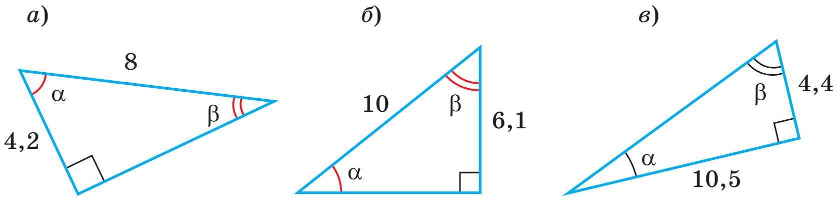
5. Пры дапамозе калькулятара або табліц знайдзіце, акругліўшы адказ да 0,0001:

а) $\sin 5°$; б) $\sin 15°$; в) $\cos 40°$;
г) $\cos 72°$; д) $\operatorname{tg} 50°$; е) $\operatorname{tg} 85°$.

6. Пры дапамозе калькулятара або табліц знайдзіце, акругліўшы адказ да 1°, велічыню вострага вугла x, калі:

а) $\sin x = 0{,}4226$; б) $\cos x = 0{,}6820$; в) $\operatorname{tg} x = 0{,}5774$.

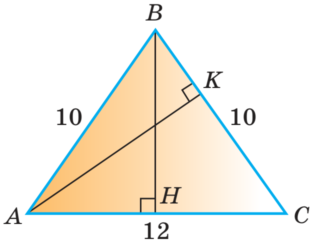
7. Знайдзіце вострыя вуглы α і β трохвугольнікаў на рысунках 17, *а*)—*в*), выкарыстаўшы трыганаметрычныя функцыі і калькулятар (табліцы). Адказы акругліце да 1°.



Рыс. 17

8. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC (рыс. 18), $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, BH — вышыня. Вылічыце:

а) сінус вугла A;
б) косінус вугла C;
в) тангенс вугла CBH;
г) вышыню AK і сінус вугла ABC.



Рыс. 18

9. Знайдзіце сінус меншага вострага вугла паміж дыяганаллю прамавугольніка і яго стараной, калі перыметр прамавугольніка роўны 34 см, а адна са старон — 12 см.

10. Запоўніце пропускі ў роўнасцях, перапісаўшы іх у сшытак:

а) $\sin 60° = \ldots$; б) $\operatorname{tg} 30° = \ldots$;

в) $\sin\ldots = \frac{1}{2}$; г) $\cos\ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin 45° = \ldots$; е) $\operatorname{ctg}\ldots = \sqrt{3}$;

ж) $\ldots 45° = 1$; з) $\cos\ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Вугал α — востры. Знайдзіце:

а) вугал α, $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

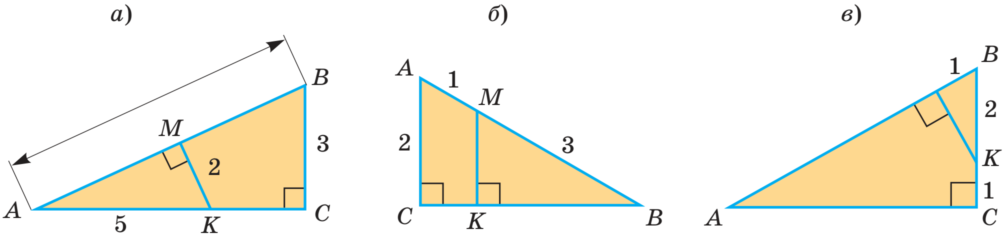
б) вугал α, $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) вугал α, $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$;

г) вугал α, $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\sin\alpha = 0{,}5$.

12. Знайдзіце косінус вострага вугла раўнабедранай трапецыі са старанамі, роўнымі 5 см, 11 см, 6 см, 6 см, і пазначце градусную меру гэтага вугла.

13. Па даных на рысунках 19, *а*)—*в*) знайдзіце даўжыню адрэзка x, выкарыстаўшы азначэнне сінуса або косінуса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.

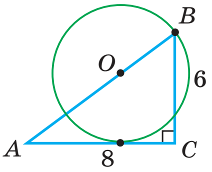


Рыс. 19

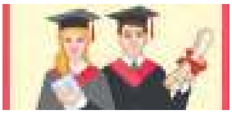
14. Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 8 см, тангенс вугла пры аснове роўны 2. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

15. Тангенс вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка роўны $\frac{2}{5}$, адзін з катэтаў на 6 см большы за другі. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

16. Акружнасць з цэнтрам O датыкаецца да катэта AC і праходзіць праз вяршыню B прамавугольнага трохвугольніка ABC з катэтамі $BC = 6$, $AC = 8$; пункт O ляжыць на гіпатэнузе AB (рыс. 20). Знайдзіце радыус гэтай акружнасці, выкарыстаўшы азначэнне сінуса вострага вугла.



Рыс. 20



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

17*. Якія з наступных лікаў не могуць быць значэннямі сінуса вострага вугла: 2; $\frac{15}{17}$; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $0{,}75$; $\sqrt{3}-1$?

18*. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце вугал α, калі вядома, што:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos\alpha = 0{,}6$.

19*. Дакажыце, што калі α і β — вострыя вуглы аднаго прамавугольнага трохвугольніка, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta < 2$;

б) $\sin\alpha + \sin\beta > 1$.

20*. а) Перыметр раўнабедранага трохвугольніка роўны 64 см, косінус вугла пры аснове роўны 0,6. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

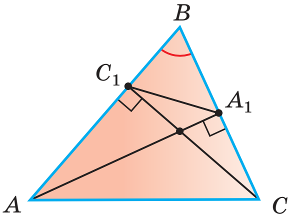
б) Аснова раўнабедранага трохвугольніка роўна 10 см, сінус процілеглага аснове вострага вугла роўны $\frac{3}{5}$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

21*. У востравугольным трохвугольніку ABC (рыс. 21) праведзены вышыні AA_1 і CC_1, $\angle B = 60°$, $A_1C_1 = 4$, $S_{A_1BC_1} = 9$.

а) Дакажыце, што трохвугольнік A_1BC_1 падобны трохвугольніку ABC з каэфіцыентам падобнасці, роўным $\cos B$.

б) Знайдзіце даўжыню стараны AC.

в) Знайдзіце S_{ABC}.



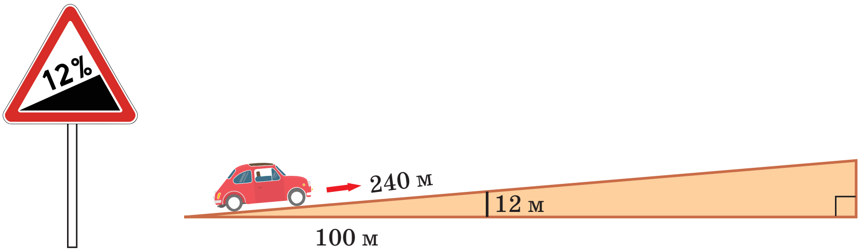
Рыс. 21

Рэальная геаметрыя

На рысунку 22 паказаны дарожны знак «Круты пад'ём 12 %». Ён азначае, што праз кожныя 100 м, адлічваемыя па гарызанталі, вышыня знаходжання пункта павялічваецца на 12 м.

Заданне 1. Вызначце велічыню вугла пад'ёму пры такім знаку, выкарыстаўшы паняцце тангенса вугла.

Заданне 2. Вылічыце, выкарыстаўшы трыганаметрычныя функцыі, на якую вышыню адносна першапачатковага становішча падымецца аўтамабіль, калі ён праедзе па дарозе 240 м угору. Праверце атрыманы вынік, рашыўшы гэту задачу з выкарыстаннем падобнасці трохвугольнікаў.



Рыс. 22

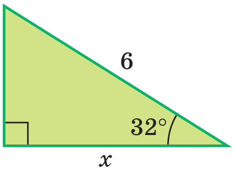
§ 2. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка

1. Алгарытм рашэння прамавугольнага трохвугольніка

Пад *рашэннем прамавугольнага трохвугольніка* разумеюць знаходжанне яго невядомых старон і вуглоў па некаторых элементах, якія вызначаюць гэты трохвугольнік. Разгледзім тры задачы:

1) знаходжанне катэта па гіпатэнузе і вострым вугле;
2) знаходжанне катэта па другім катэце і вострым вугле;
3) знаходжанне гіпатэнузы па катэце і вострым вугле.

Задача 1. *Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка роўна* 6, *востры вугал роўны* 32° (рыс. 23). *Знайсці катэт, прылеглы да дадзенага вугла. Адказ акругліць да* 0,1.



Рыс. 23

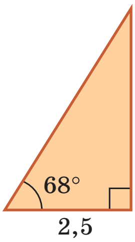
Рашэнне. Прымем даўжыню шуканага катэта за x.

$$\left(\text{Вядома: } \cos\alpha = \frac{\textit{прылеглы катэт}}{\textit{гіпатэнуза}}.\right)$$

$\cos 32° = \frac{x}{6}$, (крок 1) $x = 6 \cdot \cos 32°$, (крок 2) $x \approx 6 \cdot 0{,}8480 \approx 5{,}1$. (крок 3)

Адказ: 5,1.

Задача 2. *Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны* 2,5, *а прылеглы да яго вугал роўны* 68° (рыс. 24). *Знайсці другі катэт. Адказ акругліць да* 0,1.



Рыс. 24

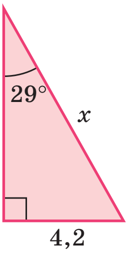
Рашэнне. Прымем даўжыню невядомага катэта за x.

$$\left(\text{Вядома: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{процілеглы катэт}}{\textit{прылеглы катэт}}.\right)$$

$\operatorname{tg} 68° = \frac{x}{2{,}5}$, (крок 1) $x = 2{,}5 \cdot \operatorname{tg} 68°$, (крок 2) $x \approx 2{,}5 \cdot 2{,}4751 \approx 6{,}2$. (крок 3)

Адказ: 6,2.

Задача 3. *Катэт прамавугольнага трохвугольніка роўны* 4,2, *процілеглы яму вугал роўны* 29° (рыс. 25). *Знайсці гіпатэнузу трохвугольніка. Адказ акругліць да* 0,1.



Рыс. 25

Рашэнне. Прымем даўжыню гіпатэнузы за x.

$$\left(\text{Вядома: } \sin\alpha = \frac{\textit{процілеглы катэт}}{\textit{гіпатэнуза}}.\right)$$

$\sin 29° = \frac{4{,}2}{x}$, $x \cdot \sin 29° = 4{,}2$,

$x = \frac{4{,}2}{\sin 29°} \approx \frac{4{,}2}{0{,}4848} \approx 8{,}7$.

Адказ: 8,7.

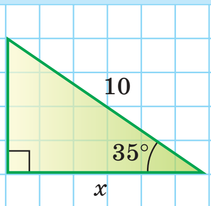
А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Катэт x роўны:

а) $10 \sin 35°$;   б) $\dfrac{10}{\cos 35°}$;

в) $10 \cos 35°$;   г) $10 \operatorname{ctg} 35°$.



2*. Правілы рашэння прамавугольнага трохвугольніка

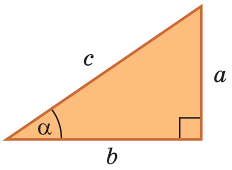
Пераўтворым формулы сінуса, косінуса, тангенса і катангенса і запішам вынікі для трохвугольніка на рысунку 26:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad a = c \cdot \sin\alpha, \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad b = c \cdot \cos\alpha, \qquad c = \frac{b}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha, \qquad b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}, \qquad b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \qquad a = \frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$



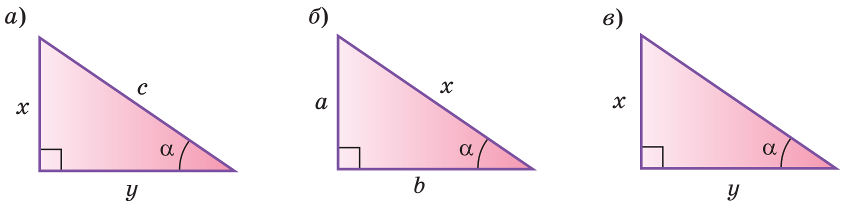
Рыс. 26

Зручна карыстацца наступнымі правіламі:

Катэт роўны гіпатэнузе, памножанай на сінус процілеглага або на косінус прылеглага вугла (рыс. 27, *а*).

Гіпатэнуза роўна катэту, падзеленаму на сінус процілеглага або на косінус прылеглага вугла (рыс. 27, *б*).

Катэт роўны другому катэту, памножанаму на тангенс процілеглага або на катангенс прылеглага да першага катэта вугла (рыс. 27, *в*).

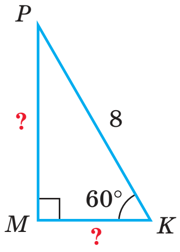


а) $x = c \sin\alpha$, $y = c \cos\alpha$

б) $x = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $x = \dfrac{b}{\cos\alpha}$

в) $x = y \operatorname{tg}\alpha$, $y = x \operatorname{ctg}\alpha$

Рыс. 27



Рыс. 28

Прыклад.

У $\triangle MPK$ вядома: $\angle M = 90°$, $\angle K = 60°$, $PK = 8$ (рыс. 28).

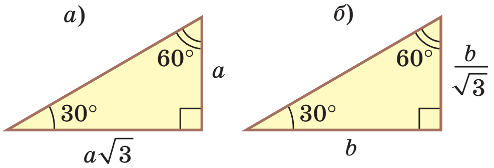
$$MP = PK \cdot \sin K = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$MK = PK \cdot \cos K = 8 \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

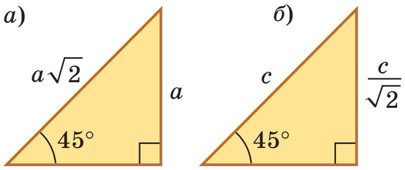
Карысна запомніць!

Калі ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 30° (або 60°) дадзены *меншы катэт* a, то *большы катэт* $b = a\sqrt{3}$ (рыс. 29, *а*). А калі дадзены *большы катэт* b, то *меншы катэт* $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$ (рыс. 29, *б*).

Калі ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 45° дадзены *катэт* a, то *гіпатэнуза* $c = a\sqrt{2}$ (рыс. 30, *а*), а калі дадзена *гіпатэнуза* c, то *катэт* $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (рыс. 30, *б*).



Рыс. 29



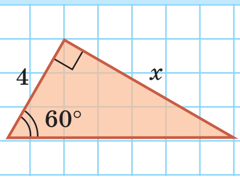
Рыс. 30

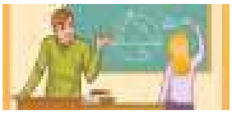
А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

Даўжыня стараны x роўна:

а) 8; б) $4\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) 6.



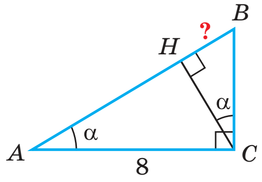


Заданні да § 2

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У прамавугольным трохвугольніку ABC вядома:* $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $\angle A = \alpha$, *CH — вышыня, праведзеная да гіпатэнузы* (рыс. 31). *Знайсці праекцыю HB катэта BC на гіпатэнузу.*

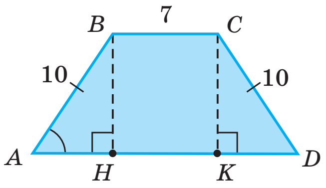


Рыс. 31

Рашэнне. Заўважым, што $\angle BCH = \angle A = \alpha$, паколькі гэтыя вуглы дапаўняюць $\angle B$ да 90°. З $\triangle ABC$ $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$, $BC = AC\operatorname{tg}\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha$. З $\triangle BHC$ $\frac{HB}{BC} = \sin\alpha$, $HB = BC\sin\alpha = 8\ \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

Адказ: $8\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

Задача 2*. *У раўнабедранай трапецыі ABCD меншая аснова BC роўна* 7, *бакавая старана AB роўна* 10, $\sin A = 0{,}8$. *Знайсці плошчу трапецыі.*

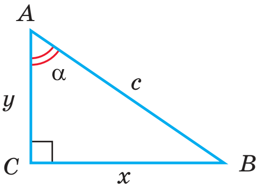


Рыс. 32

Рашэнне. Плошча трапецыі знаходзіцца па формуле $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}\cdot h$. Знойдзем большую аснову і вышыню трапецыі. Правядзём у трапецыі вышыні BH і CK (рыс. 32). Паколькі $HBCK$ — прамавугольнік (усе вуглы прамыя), то $HK = BC = 7$. З роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў AHB і DKC (па катэце і гіпатэнузе) $AH = KD$. З прамавугольнага трохвугольніка AHB знаходзім: $BH = AB\cdot\sin A = 10\cdot 0{,}8 = 8$, адкуль $AH = 6$ (піфагорава тройка 6, 8, 10). Тады $AD = 2AH + HK = 2\cdot 6 + 7 = 19$, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}\cdot BH =$ $= \frac{7+19}{2}\cdot 8 = 104$.

Адказ: 104.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА



Рыс. 33

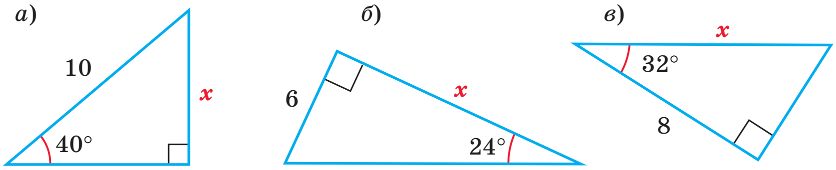
22. У прамавугольным трохвугольніку ABC (рыс. 33) $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Знайдзіце:

а) вугал B; б) катэт BC; в) катэт AC.

23. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC, $\angle C = 90°$, $AC = 4$, $\angle B = \beta$. Знайдзіце:

а) катэт BC; б) гіпатэнузу AB; в) S_{ABC}.

24. Знайдзіце старану прамавугольнага трохвугольніка, абазначаную літарай x на рысунках 34, *а*)—*в*). Адказы акругліце да 0,1. Пры разліках карыстайцеся калькулятарам або табліцамі.



Рыс. 34

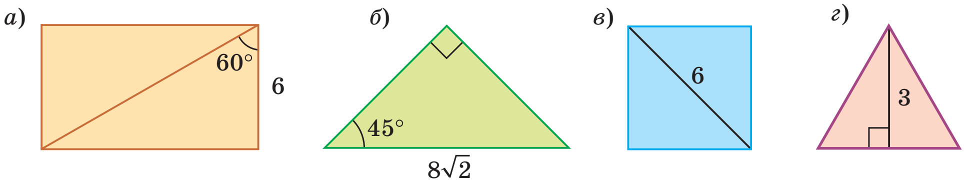
25. Знайдзіце невядомыя стораны трохвугольніка ABC ($\angle C = 90°$), калі:

а) $AB = 10,\ \sin B = \frac{3}{5}$; б) $AB = 8,\ \cos B = 0{,}75$;

в) $BC = 4,\ \sin A = \frac{2}{3}$; г) $AC = 1{,}5,\ \operatorname{tg} A = 2$.

26. Па даных на рысунках 35, *а)*—*г)* знайдзіце старану x і плошчу S:

а) прамавугольніка;
б) раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка;
в) квадрата;
г) роўнастаронняга трохвугольніка.

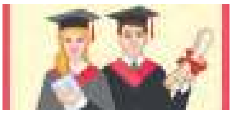


Рыс. 35

27. Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 15 см, сінус вострага вугла пры вяршыні роўны 0,8. Вылічыце плошчу трохвугольніка.

28. У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ асновы $BC = 4$ см і $AD = 10$ см. Вядома, што $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

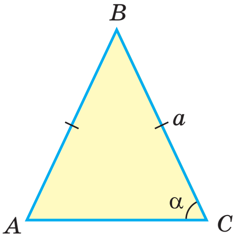
29. Дадзены паралелаграм $ABCD$. Яго вышыня BK праведзена да стараны AD, $AK : KD = 1 : 2$, $BC = 24$ см. Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі $\cos C = \frac{4}{5}$.



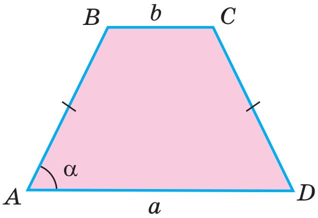
ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

30*. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90°$, вышыня CH роўна 12, медыяна CM роўна 15. Знайдзіце сінус меншага вострага вугла трохвугольніка ABC.

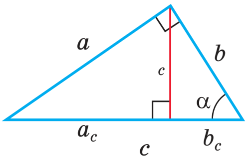
31*. а) Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка ABC ($AB = BC$) роўна a, вугал пры аснове роўны α (рыс. 36). Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.
б) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ з асновамі $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) і вуглом α пры большай аснове (рыс. 37). Знайдзіце плошчу трапецыі.



Рыс. 36



Рыс. 37



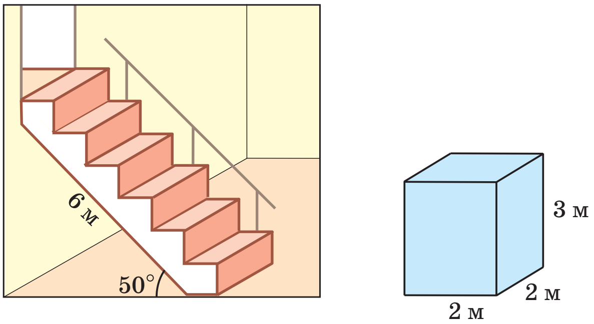
Рыс. 38

32*. У трохвугольніку ABC вышыня BH і медыяна BM дзеляць $\angle ABC$ на тры роўныя вуглы. Дакажыце, што трохвугольнік ABC прамавугольны.

33*. У прамавугольным трохвугольніку вядомы гіпатэнуза c і востры вугал α (рыс. 38). Знайдзіце: катэт a, катэт b, вышыню h_c, праекцыі a_c і b_c катэтаў a і b на гіпатэнузу.

Мадэляванне

Вызначце, ці можна размясціць пад лесвіцай даўжынёй 6 м, якая ўтварае з падлогай вугал 50° (рыс. 39), скрыню з памерамі $2 \times 2 \times 3$ (м). Разгледзьце розныя варыянты размяшчэння скрыні (яе можна класці набок).

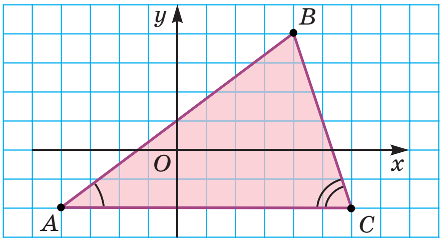


Рыс. 39

Гімнастыка розуму

Па рысунку 40 знайдзіце:

а) tg C;
б) sin A;
в) ctg B.



Рыс. 40

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, што азначае тэрмін «*трыганаметрыя*», калі ён узнік. У якіх сферах дзейнасці выкарыстоўваецца трыганаметрыя?

§ 3. Трыганаметрычныя формулы

Выкарыстаўшы формулы $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, дзе a і b — катэты, c — гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка, можна атрымаць формулы, якія звязваюць значэнні трыганаметрычных функцый вострага вугла.

1. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$

Доказ. Па тэарэме Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$.

Тады $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$

Вынік.

Паколькі сінус і косінус вострага вугла α *дадатныя, то*

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \ \text{ і } \ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

2. Выражэнне тангенса і катангенса праз сінус і косінус

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},} \quad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.}$$

Доказ. а) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Вынік. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Праверым справядлівасць асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці. Ці праўда, напрыклад, што $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$? Так, гэта праўда, паколькі $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

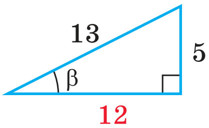
3. Асноўная задача

Дадзена: $\sin\beta = \frac{5}{13}$, β — востры вугал.

Знайсці: $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

Рашэнне. *Спосаб* 1. Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\beta = 1$, $\cos^2\beta = 1 - \frac{25}{169}$, $\cos^2\beta = \frac{144}{169}$, $\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$. Паколькі косінус *вострага вугла* большы за нуль, то $\cos\beta = \frac{12}{13}$; адкуль $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{12}{5}$.

Спосаб 2. Пакажам відарыс прамавугольнага трохвугольніка з катэтам 5 і гіпатэнузай 13 (рыс. 41). Сінус вугла, процілеглага дадзенаму катэту, роўны $\frac{5}{13}$. Таму гэты вугал роўны β. Па тэарэме Піфагора другі катэт роўны $\sqrt{13^2-5^2}=12$. Тады $\cos\beta=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{12}{5}$.



Рыс. 41

Спосаб 3. Няхай катэт, процілеглы вуглу β, роўны $5x$, тады гіпатэнуза роўна $13x$. Па тэарэме Піфагора прылеглы катэт роўны $\sqrt{(13x)^2-(5x)^2}=\sqrt{144x^2}=12x$. Адсюль $\cos\beta=\frac{12x}{13x}=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{12}{5}$.

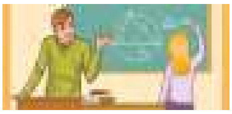
Адказ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Калі cos α = 0,8 і вугал α — востры, то sin α роўны:

а) 0,8; б) 0,6; в) 0,2; г) 1,6.

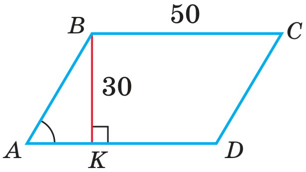


Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У паралелаграме ABCD* (рыс. 42) *старана BC = 50 см, вышыня BK = 30 см,* $\cos A=\frac{8}{17}$. *Знайсці перыметр паралелаграма.*



Рыс. 42

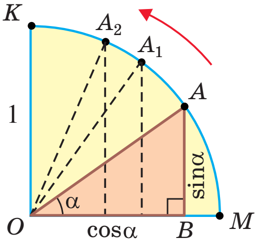
Рашэнне. З трохвугольніка ABK знаходзім: $\sin A=\frac{BK}{AB}$, $AB=\frac{BK}{\sin A}$. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці вынікае: $\sin^2A+\cos^2A=1$, $\sin^2A+\left(\frac{8}{17}\right)^2=1$, $\sin^2A=1-\frac{64}{289}=\frac{225}{289}$, $\sin A=\frac{15}{17}$ (паколькі вугал A — востры, то $\sin A>0$). Тады $AB=\frac{BK}{\sin A}=\frac{30}{\frac{15}{17}}=34$ (см), $P_{ABCD}=2\cdot(AB+BC)=2\cdot(34+50)=168$ (см).

Адказ: 168 см.

Задача 2*. *Даказаць, што пры павелічэнні вугла ад* 0° *да* 90°:

а) *сінус вугла павялічваецца ад* 0 *да* 1, *а косінус — памяншаецца ад* 1 *да* 0;

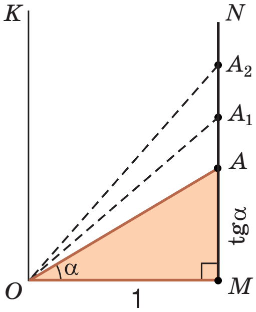
б) *тангенс вугла павялічваецца ад* 0 *да бясконцасці.*



Рыс. 43

Рашэнне. а) Разгледзім прамавугольныя трохвугольнікі з гіпатэнузай, роўнай 1. Для гэтага апішам радыусам OM, роўным 1, чвэрць акружнасці — дугу MK (рыс. 43). Няхай $\angle AOM = \alpha$. Апусцім з пункта A перпендыкуляр AB на OM. Тады $\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$, $\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. Пры павароце радыуса OM вакол цэнтра O супраць гадзіннікавай стрэлкі, пачынаючы ад OM і заканчваючы OK, вугал α будзе павялічвацца ад 0° да 90° (утвараючы адзначаныя на чарцяжы вуглы: $\angle MOA$, $\angle MOA_1$, $\angle MOA_2$ і г. д.). Велічыня катэта AB, процілеглага вуглу α, будзе павялічвацца ад 0 да 1. А велічыня катэта OB, наадварот, будзе памяншацца ад 1 да 0. Такім чынам, **пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго сінус павялічваецца ад 0 да 1, а косінус памяншаецца ад 1 да 0.**

З формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ таксама вынікае (улічыўшы дадатнасць сінуса і косінуса вострага вугла), што з павелічэннем сінуса ад 0 да 1 косінус памяншаецца ад 1 да 0.



Рыс. 44

б) Для вызначэння змянення тангенса вугла зручна разглядаць трохвугольнікі, у якіх прылеглы катэт не змяняецца і застаецца роўным 1, а процілеглы катэт змяняецца. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік AOM, у якога адрэзак $OM = 1$, $\angle AOM = \alpha$ (рыс. 44). Па азначэнні $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$. Вугал α станем змяняць, перамяшчаючы пункт A па прамой MN, пачынаючы ад пункта M і праходзячы праз пункты A, A_1, A_2 і г. д. Пры гэтым вугал α і яго тангенс пачнуць нарастаць. Такім чынам, калі вугал α пры руху пункта A ўверх будзе імкнуцца да вугла KOM, роўнага 90°, то тангенс гэтага вугла будзе неабмежавана нарастаць.

Да такой жа высновы можна прыйсці, разглядаючы формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Пры павелічэнні вугла α ад 0° да 90° лічнік дробу будзе павялічвацца ад 0 да 1, а назоўнік — памяншацца ад 1 да 0, значыць, увесь дроб будзе павялічвацца ад 0 да бясконцасці. Такім чынам, **пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго тангенс павялічваецца ад 0 да бясконцасці.**

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

34. Дадзены востры вугал α.

а) Знайдзіце $\cos\alpha$, калі $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

б) Знайдзіце $\sin\alpha$, калі $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

в) Знайдзіце $\mathrm{ctg}\,\alpha$, калі $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

г) Знайдзіце $\mathrm{tg}\,\alpha$, калі $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}$.

35. а) Знайдзіце $\mathrm{ctg}\,\alpha$, калі α — востры вугал і $\sin\alpha = 0{,}8$.

б) Знайдзіце $\mathrm{tg}\,\alpha$, калі α — востры вугал і $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

36. Запоўніце пропускі ў формулах, перапісаўшы іх у сшытак:

а) $\sin^2\beta + \ldots = 1$; б) $\cos^2\alpha = 1 - \ldots$;

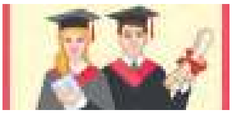
в) $\ldots = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\ldots}{\ldots}$.

37. Знайдзіце:

а) сінус, тангенс і катангенс вострага вугла, косінус якога роўны 0,6;

б) косінус, тангенс і катангенс вострага вугла, сінус якога роўны $\frac{7}{25}$.

38. У акружнасці радыусам, роўным 6 см, праведзены дыяметр AB і хорда AC. Знайдзіце даўжыню хорды BC, калі $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

39*. Параўнайце велічыні вострых вуглоў α або β, калі:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$.

40*. Высветліце, што больш: $\sin\alpha$ або $\mathrm{tg}\,\alpha$, дзе α — востры вугал.

41*. Дакажыце, што для вострага вугла α справядлівая тоеснасць $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

42*. Выведзіце для вострага вугла α формулы $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ і $1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, падзяліўшы пачленна абедзве часткі асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці на $\sin^2\alpha$ і на $\cos^2\alpha$.

43*. Знайдзіце сінус вострага вугла α, калі яго катангенс роўны $1\frac{1}{3}$.

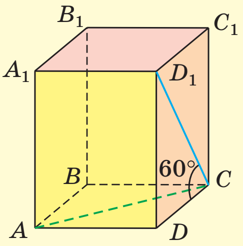
Рэальная геаметрыя

На рысунку 45 паказаны памеры чыгуначнага насыпу, папярочнае сячэнне якога мае форму раўнабедранай трапецыі. Знайдзіце па пазначаных памерах прыкладную вышыню h насыпу. Адказ акругліце да 0,1 м.

Рыс. 45

Геаметрыя 3D

Задача. У аснове прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць квадрат, дыяганаль якога $AC = 4\sqrt{6}$ см. Дыяганаль CD_1 бакавой грані ўтварае з кантам асновы DC вугал 60° (рыс. 46). Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

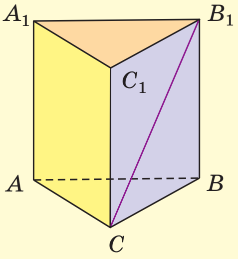


Рыс. 46

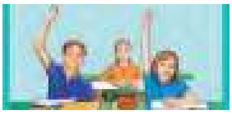
Рашэнне. Аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда знаходзіцца па формуле $V = abc$, дзе a, b і c — яго вымярэнні. Паколькі $ABCD$ — квадрат, то $AD = DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). З прамавугольнага трохвугольніка D_1DC знаходзім $D_1D = DC \cdot \operatorname{tg} 60° = DC\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см). Шуканы аб'ём $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 576$ (см^3).

Адказ: 576 см^3.

Заданне. Дадзена правільная трохвугольная прызма $ABCA_1B_1C_1$ (рыс. 47). Перыметр яе асновы роўны 12 см, дыяганаль CB_1 бакавой грані ўтварае з бакавым кантам BB_1 вугал, катангенс якога роўны 1,5. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні гэтай прызмы.



Рыс. 47



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.
2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 30°, 45°, 60°.
3. Формулы, якія звязваюць трыганаметрычныя функцыі аднаго вугла.

Умеем

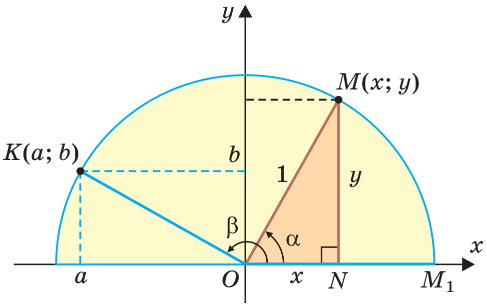
1. Рашаць прамавугольны трохвугольнік.
2. Ведаючы $\sin\alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\cos\alpha$ і наадварот.
3. Ведаючы $\sin\alpha$ або $\cos\alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.
4. Даказваць асноўную трыганаметрычную тоеснасць.

§ 4. Сінус, косінус, тангенс і катангенс тупога вугла

1. Вызначэнне значэнняў $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для любога вугла α ад 0° да 180°

Раней мы далі азначэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла праз адносіну старон прамавугольнага трохвугольніка. Зробім цяпер гэта для вуглоў ад 0° да 180°.

Разгледзім паўакружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным 1 (рыс. 48). Ад дадатнай паўвосі Ox супраць гадзіннікавай стрэлкі адкладзём востры вугал α, старана якога перасякае паўакружнасць у пункце $M(x;\ y)$. З прамавугольнага трохвугольніка OMN, дзе $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, атрымліваем: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, г. зн. сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла α выражаюцца праз каардынаты x і y пункта $M(x;\ y)$. Дакладна гэтак жа вызначаюцца значэнні $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ для любога вугла α з прамежку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Такім чынам, сінусам вугла α называецца ардыната y, косінусам — абсцыса x, тангенсам — адносіна ардынаты да абсцысы $\frac{y}{x}$, а катангенсам — адносіна абсцысы да ардынаты $\frac{x}{y}$ пункта M адзінкавай паўакружнасці.



Рыс. 48

Напрыклад, для тупога $\angle KOM_1 = \beta$ (рыс. 48), дзе $K(a;\ b)$, атрымаем:

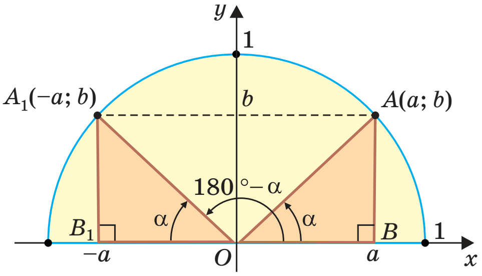
$$\sin\beta = b,\ \cos\beta = a,\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Для любога становішча пункта $M(x;\ y)$ на адзінкавай паўакружнасці правільная роўнасць $x^2 + y^2 = 1$ (дакажыце самастойна). Таму для вуглоў α, дзе $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, справядлівая асноўная трыганаметрычная тоеснасць $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Таксама правільныя тоеснасці: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Знаходжанне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса тупых вуглоў

Няхай $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, адкуль $\angle A_1OB = 180° - \alpha$ (рыс. 49). Паколькі $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$ па гіпатэнузе і вострым вугле, то $A_1B_1 = AB$, $OB_1 = OB$. Пункты A і A_1 маюць каардынаты: $A(a;\ b)$ і $A_1(-a;\ b)$. Тады $\sin\alpha = b$, $\cos\alpha = a$, $\sin(180° - \alpha) = b$, $\cos(180° - \alpha) = -a$, г. зн. для вуглоў ад 0° да 180° справядлівыя роўнасці:



Рыс. 49

$$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,}$$

$$\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.}$$

Можна карыстацца наступным правілам:

Сінус тупога вугла роўны сінусу сумежнага з ім вострага вугла.

Косінус тупога вугла роўны косінусу сумежнага з ім вострага вугла, узятаму са знакам «мінус».

Прыклад 1. $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Падзяліўшы пачленна роўнасць $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на роўнасць $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, а затым наадварот, атрымаем роўнасці:

$$\boxed{\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.}$$

Можна карыстацца наступным правілам:

Тангенс (катангенс) тупога вугла роўны тангенсу (катангенсу) сумежнага з ім вострага вугла, узятаму са знакам «мінус».

Прыклад 2. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

Атрыманыя формулы і правілы дазваляюць знаходзіць значэнні трыганаметрычных функцый тупога вугла праз значэнні трыганаметрычных функцый вострага вугла, які дапаўняе дадзены тупы вугал да 180°: сінусы вуглоў, якія дапаўняюць адзін аднаго да 180°, роўныя паміж сабой, а косінусы, тангенсы і катангенсы — процілеглыя. Паколькі сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла дадатныя, то сінус тупога вугла дадатны, а косінус, тангенс і катангенс — адмоўныя.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

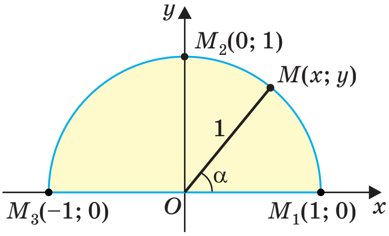
Вылічыце: $\cos 120^\circ + \sin 150^\circ$.

3*. Значэнні трыганаметрычных функцый для вуглоў 0°, 90°, 180°

Калі прамень OM супадзе з праменем OM_1 (рыс. 50), то будзем лічыць, што $\alpha = 0^\circ$. Тады:

а) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значэнне $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0}$ не вызначана, паколькі дзяленне на нуль немагчымае;

б) $\angle M_2OM_1 = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значэнне $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$ не вызначана, паколькі дзяленне на нуль немагчымае;



Рыс. 50

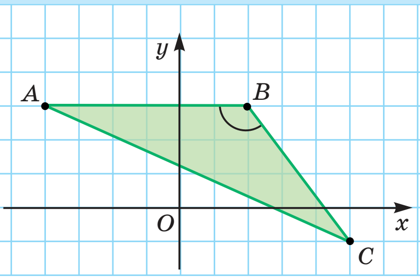
в) $\angle M_3OM_1 = 180^\circ$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$; значэнне $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$ не вызначана, паколькі дзяленне на нуль немагчымае.

Паколькі праекцыі радыуса, роўнага 1, на восі каардынат меншыя або роўныя 1, то для вуглоў $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ справядлівыя няроўнасці: $0 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

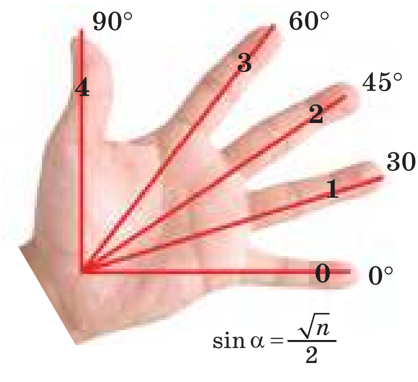
Па рысунку знайдзіце косінус вугла B.



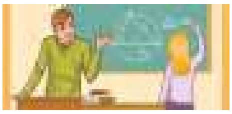
Гімнастыка розуму

Калі максімальна расставіць пальцы рукі, то вуглы паміж мезенцам і астатнімі пальцамі будуць роўны прыкладна 30°, 45°, 60°, 90° (рыс. 51).

Цікава, што калі пальцы пранумараваць лічбамі ад 0 да 4, як на рысунку, то для знаходжання сінуса вуглоў 0°, 30°, 45°, 60° і 90° можна карыстацца формулай $\sin\alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$, дзе α — дадзены вугал, а n — нумар пальца. Праверце самастойна работу гэтай формулы.



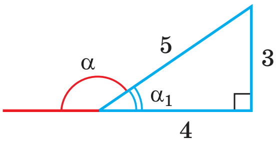
Рыс. 51



Заданні да § 4

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці* $\cos\alpha$ *і* $\operatorname{tg}\alpha$, *калі* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ *і* α — *тупы вугал.*



Рыс. 52

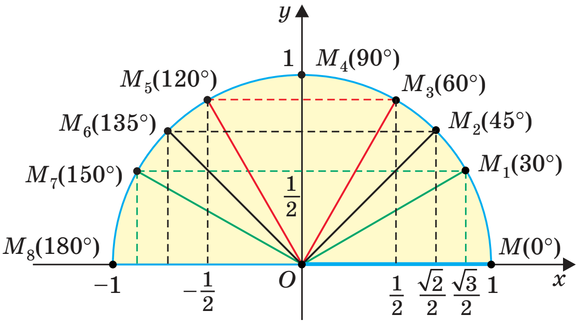
Рашэнне. *Спосаб* 1. Паколькі $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Паколькі вугал α — тупы, то яго косінус адмоўны. Таму $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} =$ $= -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Тады $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.

Спосаб 2. Сінус вострага вугла α_1, сумежнага з дадзеным тупым вуглом α, роўны таксама $\frac{3}{5}$. Пабудуем прамавугольны трохвугольнік са старанамі 3, 4 і 5 (рыс. 52). У ім $\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$. Паколькі косінусы сумежных вуглоў процілеглыя, то $\cos\alpha = -\cos\alpha_1 = -\frac{4}{5}$. Аналагічна, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Адказ: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

44. Пункты M_1, M_2, ..., M_8 атрымліваюцца пры павароце радыуса OM адзінкавай паўакружнасці вакол пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі адпаведна на вуглы 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180° (рыс. 53).



Рыс. 53

а) Выкарыстаўшы рысунак, знайдзіце каардынаты пунктаў M, M_1, M_2, ..., M_8.
б) Па каардынатах адпаведных пунктаў знайдзіце $\sin 135°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 150°$.
в)* Знайдзіце $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$.

45. Пры дапамозе формул $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ або правілаў знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла знайдзіце:

а) $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$;
б) $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 135°$;
в) $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$, $\operatorname{ctg} 150°$.

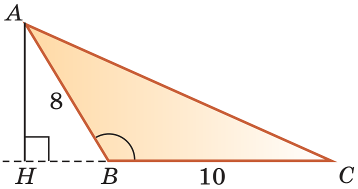
46. Вядома, што вугал α тупы. Знайдзіце $\cos\alpha$, калі:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\alpha = 0{,}6$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

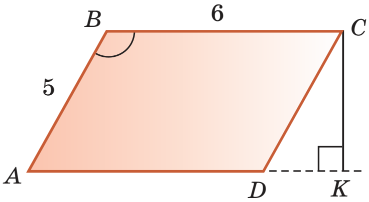
47. Вядома, што $90° < \alpha < 180°$. Знайдзіце $\sin\alpha$, калі:

а) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; в) $\cos\alpha = -0{,}2$.

48. а) У $\triangle ABC$ (рыс. 54) стораны $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $\sin\angle ABC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце вышыню AH і S_{ABC}.
б) У паралелаграме $ABCD$ (рыс. 55) стораны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos\angle ABC = -0{,}6$. Знайдзіце вышыню CK і S_{ABCD}.



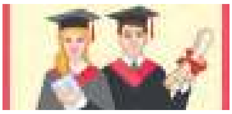
Рыс. 54



Рыс. 55

49. Выкарыстаўшы калькулятар (табліцы) і трыганаметрычныя формулы (правілы), знайдзіце, акругліўшы адказ да 0,0001:

а) $\sin 100°$; б) $\cos 175°$; в) $\operatorname{tg} 115°$; г) $\operatorname{ctg} 140°$.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

50*. а) Косінус аднаго з сумежных вуглоў роўны –0,3. Знайдзіце косінус другога вугла.
б) Сінус тупога вугла паралелаграма роўны 0,8. Знайдзіце тангенс вострага вугла паралелаграма.

51*. Знайдзіце $\sin\alpha + \cos\alpha$, калі вугал α роўны:

а) $0°$; б) $90°$; в) $180°$.

52*. Выкарыстаўшы адзінкавую паўакружнасць, дакажыце, што пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго сінус павялічваецца ад 0 да 1, косінус памяншаецца ад 1 да 0; пры павелічэнні вугла ад 90° да 180° яго сінус памяншаецца ад 1 да 0, косінус памяншаецца ад 0 да –1.

53*. Дакажыце, што для вуглоў трохвугольніка ABC правільная роўнасць:

а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гімнастыка розуму

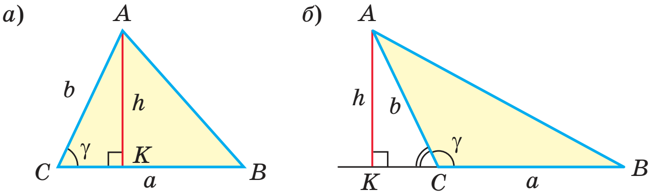
1. Знайдзіце значэнне выразу $\cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 30° \cdot \ldots \cdot \cos 180°$.
2. Знайдзіце значэнне выразу $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 88° \cdot \operatorname{tg} 89°$.

§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

Трыганаметрычныя функцыі дазваляюць атрымаць формулы для вылічэння плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма. Сфармулюем іх у выглядзе дзвюх тэарэм.

Тэарэма. **Плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх яго старон на сінус вугла паміж імі, г. зн.** $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC стораны $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — востры, $AK = h$ — вышыня (рыс. 56, *а*).



Рыс. 56

З прамавугольнага трохвугольніка AKC $\sin\gamma = \frac{h}{b}$, $h = b\sin\gamma$. Тады $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma$.

Калі вугал γ тупы (рыс. 56, *б*), то $\angle ACK = 180° - \gamma$ — востры. З прамавугольнага трохвугольніка AKC вынікае, што $h = b\sin(180° - \gamma)$. Паколькі $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma$.

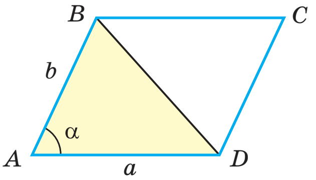
Калі $\gamma = 90°$, то $\triangle ABC$ — прамавугольны з катэтамі a і b. Улічыўшы, што $\sin 90° = 1$, атрымаем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма. **Плошча паралелаграма роўна здабытку дзвюх яго суседніх старон на сінус вугла паміж імі, г. зн.** $S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha$.

Выкарыстаўшы рысунак 57, дакажыце гэту тэарэму самастойна.

Заўвага. Калі $\alpha = 90°$, то паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам. Яго плошча $S = ab\sin 90° = ab$, паколькі $\sin 90° = 1$. Такім чынам, формула плошчы прамавугольніка $S = ab$ — прыватны выпадак формулы плошчы паралелаграма $S = ab\sin\alpha$.

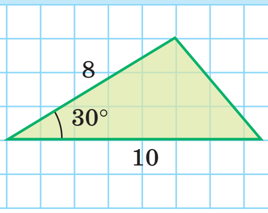


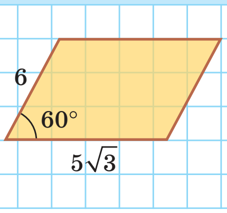
Рыс. 57

А цяпер выканайце **Тэст 1.**

Тэст 1

Знайдзіце плошчы трохвугольніка і паралелаграма, паказаных на рысунку.

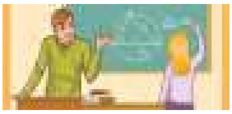




Вядома, што слова «сінус» у перакладзе з лацінскай мовы мае мноства значэнняў: выгіб, дуга, пазуха, бухта, упадзіна, заліў, хорда, клопат і пяшчотная любоў. Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце:

а) якое са значэнняў найбольш блізкае да матэматычнага паняцця «сінуса»;

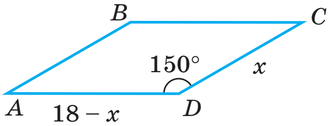
б) якія са значэнняў адносяцца да медыцыны і чаму насмарк урачы часам называюць сінусітам.



Заданні да § 5

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Дадзены паралелаграм ABCD, плошча якога* 40 *см*^{2}, *а перыметр* 36 *см. Знайсці стораны паралелаграма, калі яго вугал D роўны* 150° (*рыс.* 58).



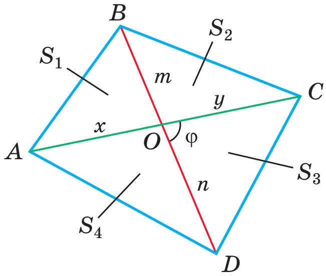
Рыс. 58

Рашэнне. Паўперыметр паралелаграма роўны 18 см. Калі $CD = x$ см, то $AD = (18 - x)$ см. Тады $S_{ABCD} = CD \cdot AD \cdot \sin D = x(18 - x) \cdot \sin 150°$ см^2. Паколькі $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x(18 - x)$ см^2.

Па ўмове S_{ABCD} = 40 см^2. Складзём і рэшым ураўненне: $\frac{1}{2}x(18 - x) = 40$, $x^2 - 18x + 80 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = 8$, $x_2 = 10$ — карані. Калі $CD = 8$ см, то $AD = 10$ см, калі $CD = 10$ см, то $AD = 8$ см.

Адказ: 8 см, 10 см.

Задача 2*. *Даказаць, што плошча выпуклага чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку яго дыяганалей на сінус вугла паміж імі, г. зн.* $\boxed{S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.}$



Рыс. 59

Доказ. Няхай дыяганалі $AC = d_1$ і $BD = d_2$ чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 59) перасякаюцца ў пункце O, $\angle COD = \varphi$, $S_1 = S_{AOB}$, $S_2 = S_{BOC}$, $S_3 = S_{COD}$, $S_4 = S_{AOD}$. Дакажам, што $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$. Абазначым $AO = x$, $OC = y$, $BO = m$, $OD = n$. Заўважым, што $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ як вертыкальныя, $\angle BOC = 180° - \angle COD$ па ўласцівасці сумежных вуглоў. Таму $\sin\angle AOB = \sin\angle COD = \sin\varphi$, $\sin\angle BOC = \sin\angle AOD = \sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$. Па формуле плошчы трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ атрымаем:

$$S_1 = \frac{1}{2}xm\sin\angle AOB = \frac{1}{2}xm\sin\varphi,\quad S_2 = \frac{1}{2}ym\sin\angle BOC = \frac{1}{2}ym\sin\varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}yn\sin\angle COD = \frac{1}{2}yn\sin\varphi,\quad S_4 = \frac{1}{2}xn\sin\angle AOD = \frac{1}{2}xn\sin\varphi.$$

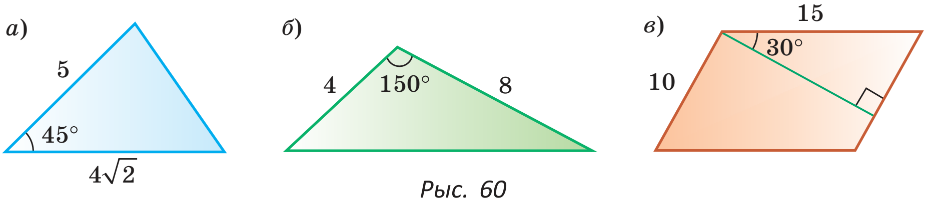
$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}xm\sin\varphi + \frac{1}{2}ym\sin\varphi + \frac{1}{2}yn\sin\varphi + \frac{1}{2}xn\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\big(m(x + y) + n(x + y)\big)\sin\varphi = \frac{1}{2}(x + y)(m + n)\sin\varphi = \frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi.$$

Сцверджанне даказана.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

54. Выкарыстаўшы формулы $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ і $S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha$, знайдзіце плошчы трохвугольнікаў і паралелаграма, паказаных на рысунку 60.



Рыс. 60

55. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC, калі:

а) $AB = 6{,}5$ см, $BC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle B = 120°$;
б) $AC = 16$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A + \angle B = 135°$.

56. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$, калі:

а) $AB = 4{,}2$ см, $AD = 6$ см, $\sin C = \frac{2}{3}$;

б) $P_{ABCD} = 48$ см, $BC = 13$ см, $\cos B = -\frac{12}{13}$.

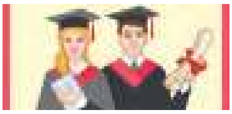
57. а) Плошча паралелаграма роўна $18\sqrt{3}$ см^2, адна з яго старон на 5 см большая за другую, а адзін з вуглоў роўны 60°. Знайдзіце перыметр паралелаграма.
б) Стораны паралелаграма адносяцца як 3 : 5, плошча роўна 30 см^2, а тупы вугал паралелаграма роўны 150°. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

58. а) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной, роўнай $6\sqrt{2}$ см, і вуглом пры аснове, роўным 75°.

б) Плошча раўнабедранага трохвугольніка роўна 16 см^2, вугал пры аснове 15°. Знайдзіце даўжыню бакавой стараны трохвугольніка.

59. Выведзіце формулу плошчы роўнастаронняга трохвугольніка $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, выкарыстаўшы формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

60. Дадзены ромб $ABCD$, $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што $S_{ABCD} = a^2\sin\alpha$.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

61*. а) Плошча раўнабедранай трапецыі роўна $36\sqrt{3}$ см^2, вугал паміж дыяганаллю і асновай роўны 30°. Знайдзіце даўжыню дыяганалі трапецыі.

б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі з дыяганаллю, роўнай 12 см, і вуглом паміж дыяганаллю і стараной асновы, роўным 15°.

62*. а) Дзве стараны трохвугольніка маюць даўжыні a і b. Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча трохвугольніка.

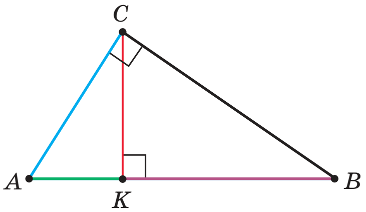
б) Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка роўны d_1 і d_2. Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча чатырохвугольніка.

63*. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O. Выкарыстаўшы формулу $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, дакажыце, што $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку

Калі для дадатных лікаў a, b і c выконваецца прапорцыя $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то лік b называецца *сярэднім прапарцыянальным лікаў* a і c (паміж лікамі a і c). З дадзенай прапорцыі $b^2 = ac$, адкуль $b = \sqrt{ac}$. У такой форме запісу лік b яшчэ называюць *сярэднім геаметрычным* лікаў a і c.

Прыклад. Лік 4 з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным, або сярэднім геаметрычным лікаў 2 і 8, паколькі $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, або $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.



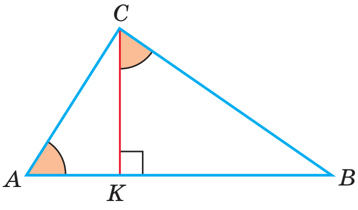
Рыс. 61

У прамавугольным трохвугольніку ABC, дзе $\angle C = 90°$, правядзём вышыню CK (рыс. 61). Адрэзак AK з'яўляецца праекцыяй катэта AC на гіпатэнузу, а адрэзак BK — праекцыяй катэта BC на гіпатэнузу. Катэты, гіпатэнуза, вышыня і праекцыі катэтаў на гіпатэнузу звязаны адносінамі, якія мы сфармулюем у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма (аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку).

а) Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (гл. рыс. 61).

б) Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на гіпатэнузу, г. зн. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.

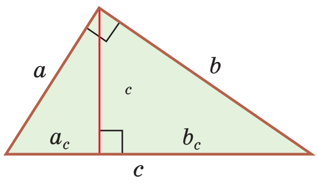


Рыс. 62

Доказ. а) Заўважым, што калі $\angle ACB = 90°$, $CK \perp AB$, то $\angle BCK = \angle A$ (гэтыя вуглы дапаўняюць $\angle B$ да 90°) (рыс. 62). З $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}$, з $\triangle BCK$ $\operatorname{tg}\angle BCK = \frac{BK}{CK}$. Адсюль $\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}$, $CK^2 = AK \cdot BK$, $CK = \sqrt{AK \cdot BK}$.

б) З $\triangle ACK$ $\cos A = \frac{AK}{AC}$, з $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$, адкуль $\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC^2 = AB \cdot AK$, $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$.

Аналагічна даказваецца, што $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$. Тэарэма даказана.



Рыс. 63

Абазначыўшы катэты a і b, гіпатэнузу c, вышыню h_c, праекцыі катэтаў на гіпатэнузу a_c і b_c (рыс. 63), атрымаем наступныя формулы:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \text{ або } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$

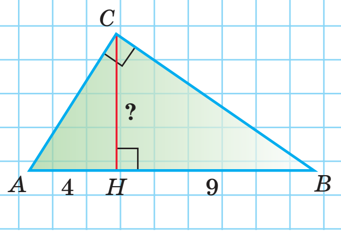
$$a^2 = c \cdot a_c, \text{ або } a = \sqrt{c \cdot a_c},$$

$$b^2 = c \cdot b_c, \text{ або } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

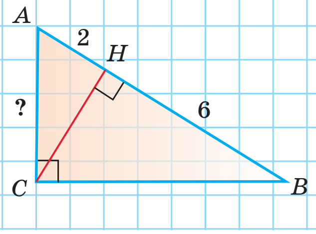
Тэст 1

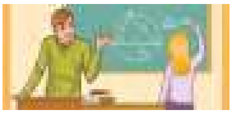
Знайдзіце вышыню CH прамавугольнага трохвугольніка ABC.



Тэст 2

Знайдзіце катэт AC прамавугольнага трохвугольніка ABC.





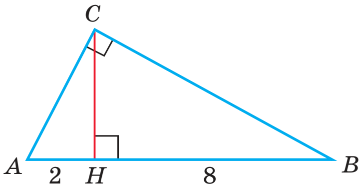
Заданні да § 6

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці плошчу прамавугольнага трохвугольніка, калі праекцыі катэтаў на гіпатэнузу роўны 2 см і 8 см.*

Рашэнне. Няхай CH — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC ($\angle C = 90°$), $AH = 2$ см — праекцыя катэта AC на гіпатэнузу, $HB = 8$ см —



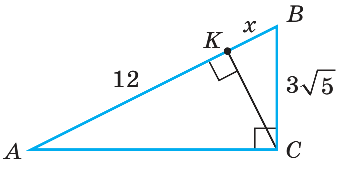
Рыс. 64

праекцыя катэта CB на гіпатэнузу (рыс. 64). Паколькі вышыня CH ёсць сярэдняе геаметрычнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, то $CH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: 20 см^2.

Задача 2. *У прамавугольным трохвугольніку ABC з вяршыні прамога вугла C праведзена вышыня CK, $BC = 3\sqrt{5}$ см, AK = 12 см* (рыс. 65). *Знайсці гіпатэнузу AB.*



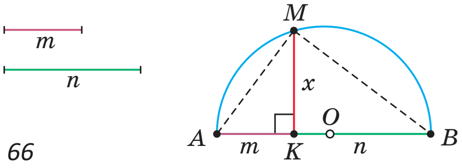
Рыс. 65

Рашэнне. Няхай $KB = x$ см, тады $AB = (x + 12)$ см. Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй катэта на гіпатэнузу. Таму $BC^2 = AB \cdot KB$, г. зн. $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (x + 12) \cdot x$, $x^2 + 12x - 45 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = -15$, $x_2 = 3$. Па сэнсе задачы $x > 0$. Значыць, $KB = 3$ см, $AB = 15$ см.

Адказ: 15 см.

Задача 3*. *Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудаваць адрэзак, роўны сярэдняму геаметрычныму адрэзкаў m і n.*

Рашэнне. Няхай дадзены адрэзкі m і n. Неабходна пабудаваць адрэзак $x = \sqrt{mn}$.



Рыс. 66

Пабудова.

1) На адвольнай прамой адкладваем дадзеныя адрэзкі: $AK = m$, $KB = n$.

2) На адрэзку AB як на дыяметры будуем паўакружнасць, для чаго знаходзім сярэдзіну O адрэзка AB, адкуль OA — радыус дадзенай акружнасці.

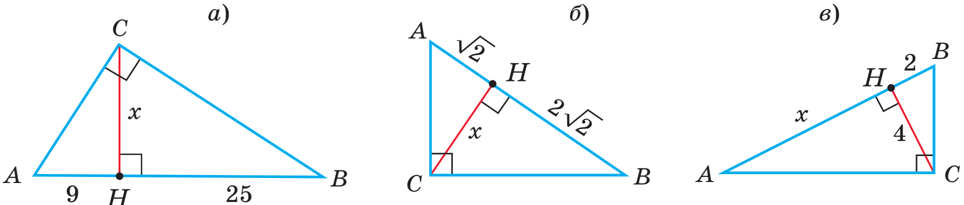
3) З пункта K узнімаем перпендыкуляр да прамой AB да перасячэння з паўакружнасцю ў пункце M (рыс. 66).

Адрэзак $MK = x$ — сярэдняе прапарцыянальнае адрэзкаў $AK = m$ і $KB = n$.

Доказ. $\angle AMB$ — прамы як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр. У прамавугольным трохвугольніку AMB вышыня MK з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным праекцый катэтаў AM і MB на гіпатэнузу AB: $MK = \sqrt{AK \cdot KB}$, г. зн. $x = \sqrt{mn}$.

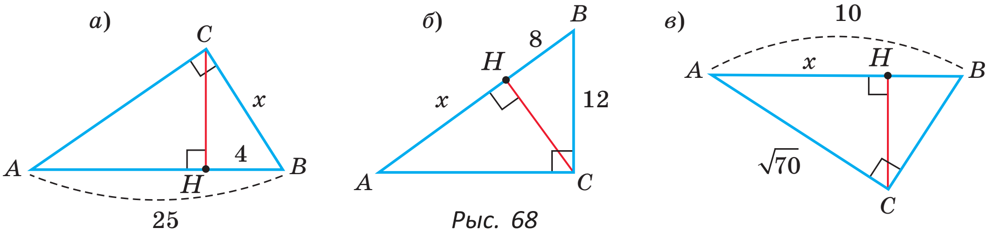
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

64. У прамавугольным трохвугольніку ABC праведзена вышыня CH з вяршыні прамога вугла. Па даных на рысунках 67, *а*)—*в*) знайдзіце даўжыню адрэзка x.



Рыс. 67

65. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC, CH — вышыня, апушчаная на гіпатэнузу. Знайдзіце даўжыню адрэзка x (рыс. 68, *а*)—*в*)).



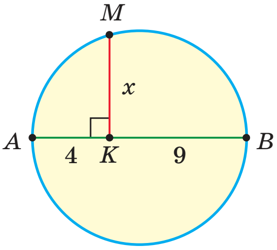
Рыс. 68

66. У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт BC роўны 8 см, а праекцыя катэта AC на гіпатэнузу AB роўна 12 см. Знайдзіце даўжыню гіпатэнузы.

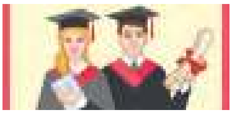
67. AB — дыяметр акружнасці (рыс. 69). Знайдзіце даўжыню перпендыкуляра MK.

68. Дадзены прамавугольнік $ABCD$. Перпендыкуляр BK, апушчаны на дыяганаль AC, дзеліць яе на адрэзкі, роўныя 2 см і 6 см. Знайдзіце меншую старану прамавугольніка.

69. Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, у якога вышыня дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 1,2 см і 4,8 см.



Рыс. 69



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

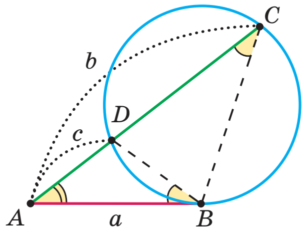
70*. У прамавугольным трохвугольніку ABC катэт AC роўны праекцыі катэта BC на гіпатэнузу AB. Знайдзіце $\cos A$.

71*. У прамавугольным трохвугольніку ABC ($\angle C = 90°$) праведзена вышыня CH, катэт AC роўны 4 см, $BH - AH = 4$ см. Знайдзіце велічыню вугла A.

Паўтарэнне*

У 8-м класе мы даказалі наступную тэарэму:

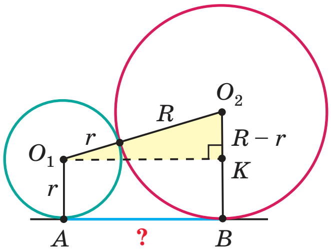
Тэарэма (аб датычнай і сякучай). *Калі з аднаго пункта да акружнасці праведзены датычная і сякучая, то квадрат адрэзка датычнай, які злучае дадзены пункт і пункт дотыку, роўны здабытку адрэзкаў сякучай, якія злучаюць дадзены пункт і пункты перасячэння сякучай з акружнасцю*, г. зн. $a^2 = bc$ (рыс. 70).



Рыс. 70

Як мы бачым, адрэзак a з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным паміж адрэзкамі b і c сякучай. Гледзячы на рысунак 70, успомніце ідэю доказу тэарэмы.

Задача. Знайдзіце AC (гл. рыс. 70), калі $AB = 4$ см, $AD = 2$ см.



Рыс. 71

Таксама ў 8-м класе была разгледжана ключавая задача аб знаходжанні адрэзка агульнай датычнай дзвюх акружнасцей, якія датыкаюцца знешнім чынам, з радыусамі, роўнымі R і r (рыс. 71). Быў атрыманы адказ: $AB = 2\sqrt{Rr}$, г. зн. шуканы адрэзак AB — гэта падвоенае сярэдняе геаметрычнае радыусаў акружнасцей.

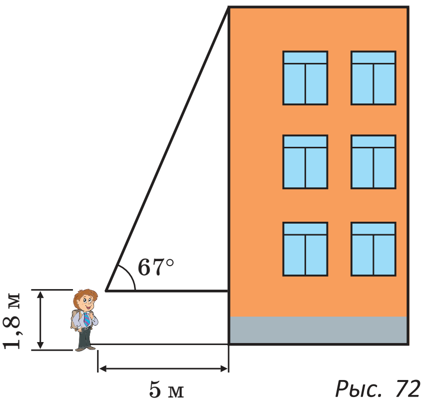
Аднавіце па рысунку 71 рашэнне гэтай задачы.

Задача. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB, калі $R = 18$ см, $r = 8$ см (гл. рыс. 71).

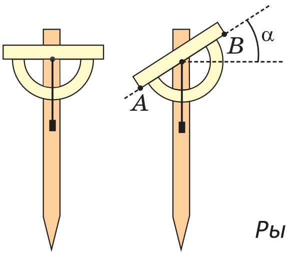
Рэальная геаметрыя

Рабяты з 9-га класа знайшлі вышыню сваёй школы наступным чынам. Яны вымералі вугал, пад якім бачна кромка даху школы (рыс. 72), і адлегласць ад месца вымярэння да фундамента школы. Вугал аказаўся роўным 67°, а адлегласць — 5 м. Далей яны прымянілі алгарытм рашэння прамавугольнага трохвугольніка. Улічыўшы, што рост школьніка, які вымяраў вугал, роўны 180 см, рабяты знайшлі прыкладную вышыню школы: 13,6 м. Праверце, ці не памыліліся рабяты ў вылічэннях. Паспрабуйце знайсці падобным чынам вышыню сваёй школы.

Прыбор, пры дапамозе якога вызначаюць вуглы на мясцовасці, называецца *экліметрам*. Такі прыбор можна вырабіць самастойна. Для гэтага спатрэбіцца транспарцір, нітка з грузам і завостраная палка. Завостраную палку ўтыкаюць вертыкальна ў зямлю так, каб нітка з грузам размяшчалася вертыкальна. Паварочваючы транспарцір, назіральнік глядзіць уздоўж прамой AB (рыс. 73). Па адхіленні ніткі адвеса на транспарціры вызначаюць вымяраемы вугал. Растлумачце, як вызначыць шуканы вугал α.

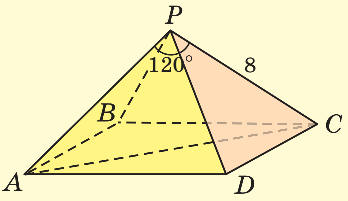


Рыс. 72



Рыс. 73

Геаметрыя 3D



Рыс. 74

Напомнім, што ў аснове правільнай чатырохвугольнай піраміды ляжыць квадрат і ўсе яе бакавыя канты роўныя.

Задача. На рысунку 74 паказана правільная чатырохвугольная піраміда $PABCD$. Яе бакавы кант роўны 8 см, а вугал APC роўны 120°. Перанясіце чарцёж піраміды ў сшытак. Знайдзіце:

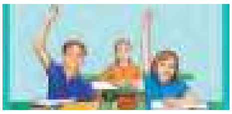
а) плошчу дыяганальнага сячэння APC гэтай піраміды, выканаўшы асобна чарцёж трохвугольніка APC;

б) даўжыню вышыні PO піраміды, дзе пункт O — цэнтр асновы піраміды;

в) плошчу асновы піраміды;

г) аб’ём піраміды па формуле $V_{\text{пір}} = \frac{1}{3}S_{\text{асн}} \cdot h$, дзе $S_{\text{асн}}$ — плошча асновы, h — вышыня піраміды.

Запішыце памеры якога-небудзь паралелепіпеда, які па аб’ёме роўны дадзенай пірамідзе.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Формулы $\sin(180° - \alpha) = \ldots$, $\cos(180° - \alpha) = \ldots$.
2. Як звязаны сінус і косінус тупога вугла з сінусам і косінусам сумежнага з ім вострага вугла.
3. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма, звязаныя з сінусам вугла.
4. Тэарэму аб сярэднім прапарцыянальным (сярэднім геаметрычным) у прамавугольным трохвугольніку.

Умеем

1. Знаходзіць сінус, косінус, тангенс і катангенс вуглоў 120°, 135°, 150°.
2. Выводзіць формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма, звязаныя з сінусам вугла.
3. Даказваць тэарэму аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку.

§ 7*. Крэатыўная геаметрыя

1. Тэарэма аб плошчах трохвугольнікаў з агульным (роўным) вуглом

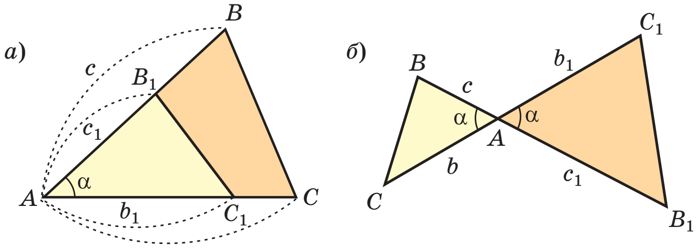
Плошчы трохвугольнікаў, якія маюць агульны (роўны) вугал, адносяцца як здабыткі старон, якія змяшчаюць гэты вугал (рыс. 75), *г. зн.* $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB} = \frac{b_1c_1}{bc}$.

Доказ.

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}b_1c_1\sin\alpha}{\frac{1}{2}bc\sin\alpha} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$

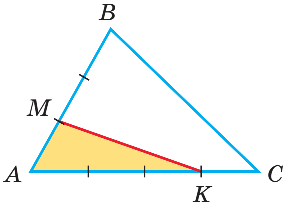
Вынік. Правільна:

$$S_{AB_1C_1} = \frac{b_1}{b}\cdot\frac{c_1}{c}\cdot S_{ABC}.$$



Рыс. 75

Задача 1. *Плошча трохвугольніка* ABC *роўна* 16, $AK : KC = 3 : 1$, $AM : MB = 1 : 2$ (рыс. 76). *Знайсці* S_{AMK}.



Рыс. 76

Рашэнне. *Спосаб* 1. Па выніку з тэарэмы аб плошчах трохвугольнікаў з агульным вуглом атрымліваем:

$$S_{AMK} = \frac{AM}{AB}\cdot\frac{AK}{AC}\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot 16 = 4.$$

Спосаб 2. $S_{AMK} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot AK\cdot\sin A =$

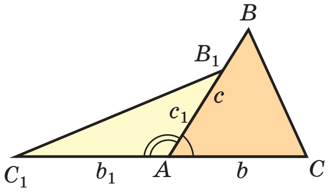
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}AB\right)\cdot\left(\frac{3}{4}AC\right)\cdot\sin A =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A\right) = \frac{1}{4}S_{ABC} = 4.$$

Адказ: 4.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

72. Дакажыце, што калі два трохвугольнікі маюць па вугле, сума якіх роўна 180°, то іх плошчы адносяцца як здабыткі старон, якія змяшчаюць гэтыя вуглы, г. зн. калі $\angle C_1AB_1 + \angle CAB = 180°$ (рыс. 77), то $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{b_1c_1}{bc}$.



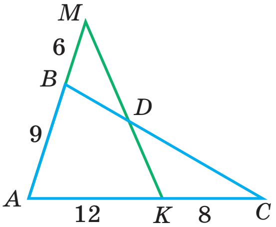
Рыс. 77

73. У $\triangle ABC$ на старане AB узяты пункт M, на старане BC — пункт K так, што $AM : MB = 2 : 3$, $BK : KC = 4 : 5$. Знайдзіце плошчу трохвугольніка BMK, калі плошча трохвугольніка ABC роўна 90.

74. Дадзены паралелаграм $ABCD$, плошча якога роўна 120. На старане AB узяты пункт M, на старане AD — пункт K так, што $AM = \frac{1}{2}AB$, $AK = \frac{2}{5}AD$. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $MBDK$.

75. Выкарыстаўшы тэарэму аб плошчах трохвугольнікаў з роўным вуглом, дакажыце, што ў трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$), дзе O — пункт перасячэння дыяганалей, $S_{ABO} = S_{DCO}$.

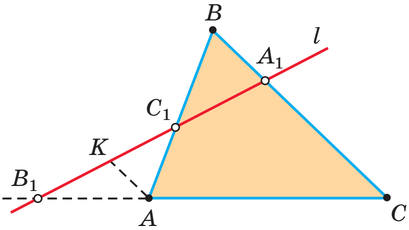
76. Выкарыстаўшы даныя рысунка 78, дакажыце, што:
а) $S_{ABC} = S_{AMK}$; б) $S_{MBD} = S_{CKD}$.



Рыс. 78

2. Тэарэма Менелая

Калі дадзены трохвугольнік ABC і прамая l перасякае стораны BC, AB і прадаўжэнне стараны AC у пунктах A_1, C_1 і B_1 адпаведна (рыс. 79), *то* $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

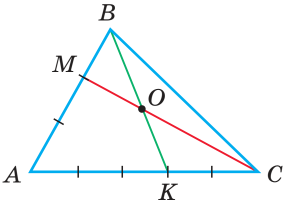


Рыс. 79

Доказ.
Правядзём адрэзак $AK \parallel BC$, $K \in l$. Паколькі $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle KAC_1$ і $\triangle B_1KA \sim \triangle B_1A_1C$ (па двух вуглах), то $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{A_1B}{KA}$ і $\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{KA}{A_1C}$. Памножыўшы пачленна дадзеныя прапорцыі, атрымаем $\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{A_1B}{CA_1}$, адкуль $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

Заўвага. Пры састаўленні здабытку трох адносін тэарэмы Менелая можна пачынаць з любога з шасці пунктаў (трох вяршынь трохвугольніка і трох пунктаў перасячэння прамой l з прамымі, якія змяшчаюць стораны трохвугольніка) і рухацца па контуры або па гадзіннікавай, або супраць гадзіннікавай стрэлкі. Пры гэтым вяршыні трохвугольніка і пункты перасячэння павінны чаргавацца.

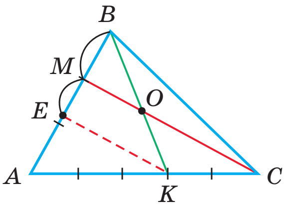
Задача 2. *У трохвугольніку ABC на старанах AB і AC узяты адпаведна пункты M і K, такія, што $AM : MB = 2 : 1$, $AK : KC = 3 : 2$. Адрэзкі CM і BK перасякаюцца ў пункце O. Знайсці $BO : OK$.*



Рыс. 80

Рашэнне. *Спосаб* 1 (тэарэма Менелая). Разгледзім $\triangle ABK$ (рыс. 80). Прамая MC перасякае дзве яго стараны AB і BK адпаведна ў пунктах M і O і прадаўжэнне трэцяй стараны AK у пункце C. Па тэарэме Менелая $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{KC}{CA} = 1$, адкуль $\frac{2}{1} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{2}{5} = 1$, $\frac{BO}{OK} = \frac{5}{4}$.

Спосаб 2 (тэарэма Фалеса абагульненая). Правядзём $KE \parallel CM$ (рыс. 81). Па тэарэме Фалеса $\frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$. Тады AE — 3 часткі, EM — 2 часткі, AM —

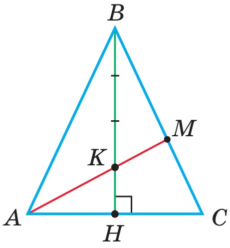


Рыс. 81

5 частак, адкуль $EM = \frac{2}{5}AM = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}AB = \frac{4}{15}AB$. Але $MB = \frac{1}{3}AB$. Адсюль $\frac{MB}{EM} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{4}{15}AB} = \frac{5}{4}$. Для $\angle KBE$ па тэарэме Фалеса $\frac{BO}{OK} = \frac{BM}{ME} = \frac{5}{4}$.

Адказ: $\frac{5}{4}$.

Задача 3. *Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC* ($AB = BC$), *плошча якога роўна* 80. *Пункт K дзеліць вышыню BH у адносіне* 1 : 3, *лічачы ад асновы. Прамая AK перасякае старану BC у пункце M. Знайсці плошчу чатырохвугольніка HKMC* (рыс. 82).



Рыс. 82

Рашэнне.

1) $S_{HBC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 40$ (BH — вышыня і медыяна трохвугольніка ABC).

2) Прыменім тэарэму Менелая да трохвугольніка HBC. Прамая AM перасякае яго стораны BH і BC адпаведна ў пунктах K і M і прадаўжэнне стараны HC у пункце A. Тады $\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BK}{KH}\cdot\frac{HA}{AC} = 1$, $\frac{CM}{MB}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2} = 1$, $\frac{CM}{MB} = \frac{2}{3}$. Адкуль $\frac{BM}{BC} = \frac{3}{5}$.

3) $S_{BMK} = \frac{BM}{BC}\cdot\frac{BK}{BH}\cdot S_{HBC} = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot 40 = 18$.

4) $S_{HKMC} = S_{HBC} - S_{BMK} = 40 - 18 = 22$.

Адказ: 22.

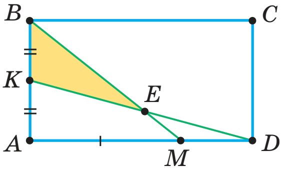
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

77. Дакажыце пры дапамозе тэарэмы Менелая, што медыяны трохвугольніка дзеляцца пунктам перасячэння ў адносіне 2 : 1, лічачы ад вяршыні.

78. У трохвугольніку ABC на старанах AB і AC узяты адпаведна пункты M і K, такія, што $AM : MB = 3 : 1$, $AK : KC = 2 : 3$. Адрэзкі BK і CM перасякаюцца ў пункце O. Знайдзіце плошчу трохвугольніка OCK, калі плошча трохвугольніка ABC роўна 70.

79. У $\triangle ABC$ праведзены адрэзкі AM і CK, якія перасякаюцца ў пункце O ($M \in BC$, $K \in AB$). Знайдзіце S_{ABC}, калі $S_{AOK} = 2$, $S_{MOC} = 3$, $S_{AOC} = 4$.

Задача 4. *На старанах AB і AD прамавугольніка ўзяты адпаведна пункты K і M, такія, што AK = KB, AM : MD = 2 : 1. Адрэзкі DK і BM* *перасякаюцца ў пункце E* (рыс. 83). *Знайсці плошчу трохвугольніка KBE, калі плошча прамавугольніка роўна* 240.



Рыс. 83

Рашэнне. $S_{ABCD} = AD \cdot AB$, $S_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}AD \cdot AB = \frac{1}{3}AD \cdot AB = \frac{1}{3}S_{ABCD} = 80.$

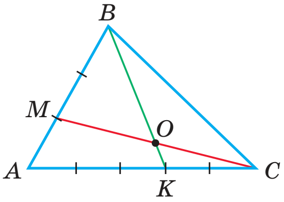
Прыменім тэарэму Менелая да трохвугольніка ABM, дзе прамая KD перасякае стораны AB і BM і прадаўжэнне стараны AM. Атрымаем: $\frac{ME}{EB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AD}{DM} = 1$, $\frac{ME}{EB} \cdot 1 \cdot \frac{3}{1} = 1$, $\frac{ME}{EB} = \frac{1}{3}$. Тады $\frac{BE}{BM} = \frac{3}{4}$, $\frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}$.

Прыменім уласцівасць плошчаў трохвугольнікаў, якія маюць агульны вугал: $S_{KBE} = \frac{BE}{BM} \cdot \frac{BK}{BA} \cdot S_{ABM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 = 30.$

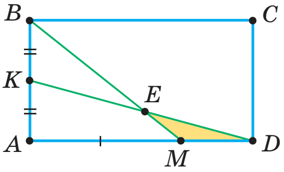
Адказ: 30.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

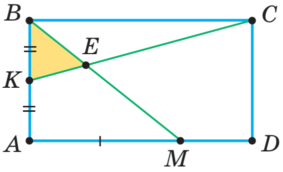
80. У трохвугольніку ABC $AK : KC = 3 : 2$, $AM : MB = 1 : 2$, $O = BK \cap CM$ (рыс. 84). Знайдзіце адносіну: а) $\frac{KO}{OB}$; б) $\frac{MO}{OC}$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}}$.



Рыс. 84



Рыс. 85



Рыс. 86

81. $ABCD$ — прамавугольнік, $AK = KB$, $AM = 2MD$, $S_{ABCD} = 240$ (рыс. 85). Знайдзіце S_{MED}.

82. $ABCD$ — прамавугольнік, $AK = KB$, $AM = 2MD$ (рыс. 86). Знайдзіце $\frac{S_{KBE}}{S_{ABCD}}$.

3. Няроўнасць Кашы

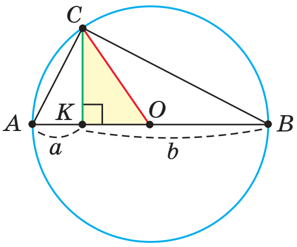
Сярэдняе арыфметычнае двух неадмоўных лікаў большае або роўна іх сярэдняму геаметрычныму, г. зн.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \text{ пры } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Напрыклад, $\frac{9+25}{2} \geqslant \sqrt{9 \cdot 25}$. Сапраўды, $17 \geqslant 15$.

Алгебраічны доказ гэтай няроўнасці такі. Разгледзім рознасць левай і правай частак няроўнасці $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Атрымаем: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$. Паколькі $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$ пры ўсіх дапушчальных a і b, то $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0$. Значыць, няроўнасць $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ правільная.

Няроўнасць $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, дзе $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, называецца *няроўнасцю Кашы* ў гонар вядомага французскага матэматыка і часта выкарыстоўваецца пры рашэнні алімпіядных задач.



Рыс. 87

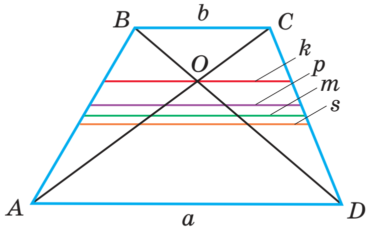
Прывядзём геаметрычны доказ гэтай няроўнасці. Пакажам відарыс акружнасці з дыяметрам AB і цэнтрам у пункце O (рыс. 87). На дыяметры адзначым пункт K (для пэўнасці лявей за цэнтр O). Няхай $AK = a$, $KB = b$. З пункта K узнімем перпендыкуляр KC, дзе пункт C належыць акружнасці. Правядзём радыус OC. Паколькі ўпісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, прамы, то $\angle ACB = 90°$ і $\triangle ABC$ прамавугольны, CK — яго вышыня, праведзеная да гіпатэнузы. Па тэарэме аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку ABC $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$. Але радыус OC роўны палавіне дыяметра AB, г. зн. $OC = \frac{AK+KB}{2}$. У $\triangle CKO$ катэт меншы за гіпатэнузу, г. зн. $OC > CK$, паколькі катэт меншы за гіпатэнузу. Адсюль $\frac{AK+KB}{2} > \sqrt{AK \cdot KB}$, г. зн. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Роўнасць левай і правай частак няроўнасці дасягаецца, калі пункт K супадае з пунктам O і $\triangle ACB$ становіцца раўнабедраным і прамавугольным. Таму справядлівая няроўнасць $\frac{AK+KB}{2} \geqslant \sqrt{AK \cdot KB}$, г. зн. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

83. У трапецыі праведзены чатыры адрэзкі з канцамі на бакавых старанах трапецыі, паралельныя яе асновам: k — адрэзак, які праходзіць праз пункт O перасячэння дыяганалей трапецыі; p — адрэзак, які дзеліць трапецыю на дзве падобныя трапецыі (адпаведныя вуглы роўныя, а стораны прапарцыянальныя), m — сярэдняя лінія трапецыі, s — адрэзак, які дзеліць трапецыю на дзве роўнавялікія трапецыі (рыс. 88). Ведаючы асновы a і b трапецыі, знайдзіце даўжыню кожнага з пералічаных адрэзкаў.

Дакажыце алгебраічным шляхам, што $k < p$, $p < m$, $m < s$, і пераканайцеся ў правільнасці рысунка 88.



Рыс. 88

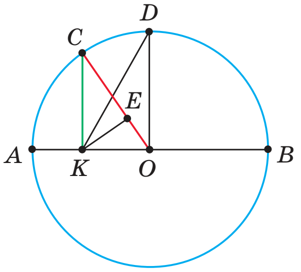
84. Дадзена акружнасць з дыяметрам AB і цэнтрам у пункце O, $AK = a$, $KB = b$, $CK \perp AB$, $DO \perp AB$, $KE \perp OC$ (рыс. 89). Дакажыце, што:

а) $CK = \sqrt{ab}$ — сярэдняе геаметрычнае лікаў a і b;

б) $DO = \dfrac{a+b}{2}$ — сярэдняе арыфметычнае лікаў a і b;

в) $CE = \dfrac{2ab}{a+b}$ — сярэдняе гарманічнае лікаў a і b;

г) $KD = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — сярэдняе квадратычнае лікаў a і b.



Рыс. 89

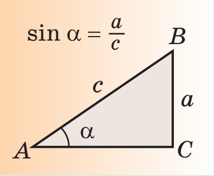
85. Выкарыстаўшы вынік задачы 84, дакажыце геаметрычным шляхам, што $CE \leqslant CK \leqslant DO \leqslant KD$, адкуль $\dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Разгледзьце, пры якіх a і b няроўнасці ператвараюцца ў роўнасці.

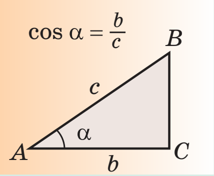
ТЭМЫ РЭФЕРАТАЎ

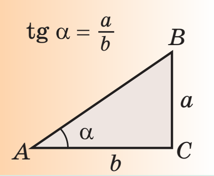
1. Тэарэма Чэвы.
2. Агульная тэарэма Менелая і ёй адваротная.
3. Узнікненне трыганаметрыі, яе роля ў сучаснай матэматыцы.

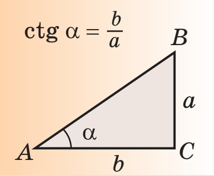
ЗАПАМІНАЕМ

1.


$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$


$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$


$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$


$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$

2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 30°, 45°, 60°:

1) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$;

2) $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{ctg} 45° = 1$;

3) $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Трыганаметрычныя формулы (тоеснасці):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Прыклады. $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha.$$

5. Сярэдняе прапарцыянальнае ў прамавугольным трохвугольніку:

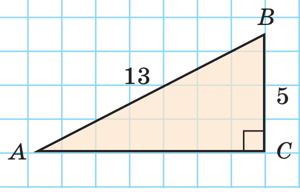
$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c}, \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэст 1

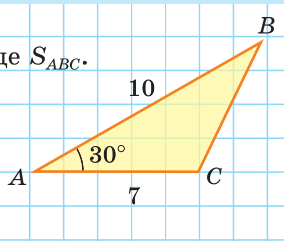
Знайдзіце:

а) $\sin A$;
б) $\cos A$;
в) $\operatorname{tg} A$;
г) $\sin B$.



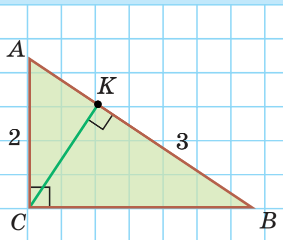
Тэст 2

Знайдзіце S_{ABC}.



Тэст 3

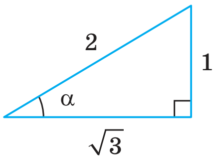
Знайдзіце вышыню CK трохвугольніка ABC, калі $AC = 2$, $KB = 3$.



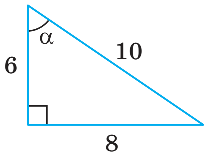
Падрыхтоўка да кантрольнай работы № 1

1. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла α.

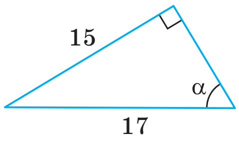
а)



б)

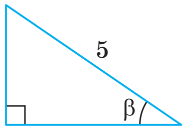


в)

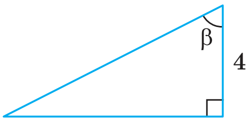


2. Па вугле β і адной са старон знайдзіце старану x.

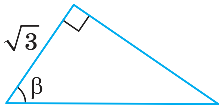
а)



б)

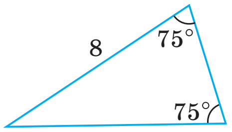


в)

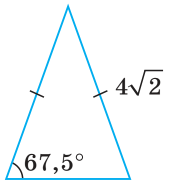


3. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

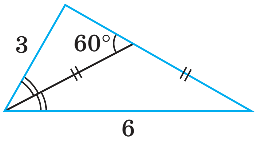
а)



б)

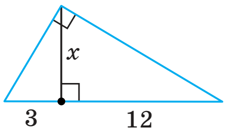


в)

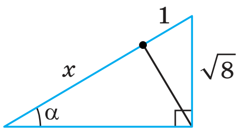


4. Знайдзіце даўжыню адрэзка, абазначанага літарай x.

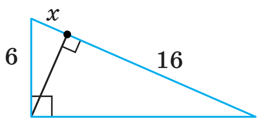
а)



б)

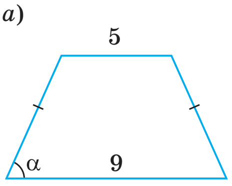


в)



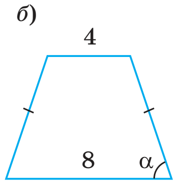
5. Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі.

а)



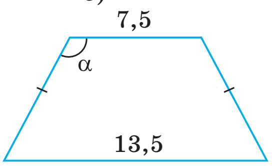
$\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5$

б)



$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

в)



$\sin \alpha = \frac{4}{5}$

Трыганаметрычныя табліцы

α	**sin** α	**cos** α	**tg** α	**ctg** α	α	**sin** α	**cos** α	**tg** α	**ctg** α
0°	0,0000	1,0000	0,0000	—	90°	1,0000	0,0000	—	0,0000
1°	0175	9998	0175	57,2900	89°	9998	0175	57,2900	0175
2°	0349	9994	0349	28,6363	88°	9994	0349	28,6363	0349
3°	0523	9986	0524	19,0811	87°	9986	0523	19,0811	0524
4°	0698	9976	0699	14,3007	86°	9976	0698	14,3007	0699
5°	0872	9962	0875	11,4301	85°	9962	0872	11,4301	0875
6°	1045	9945	1051	9,5144	84°	9945	1045	9,5144	1051
7°	1219	9925	1228	8,1443	83°	9925	1219	8,1443	1228
8°	1392	9903	1405	7,1154	82°	9903	1392	7,1154	1405
9°	1564	9877	1584	6,3138	81°	9877	1564	6,3138	1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
11°	1908	9816	1944	5,1446	79°	9816	1908	5,1446	1944
12°	2079	9781	2126	4,7046	78°	9781	2079	4,7046	2126
13°	2250	9744	2309	4,3315	77°	9744	2250	4,3315	2309
14°	2419	9703	2493	4,0108	76°	9703	2419	4,0108	2493
15°	2588	9659	2679	3,7321	75°	9659	2588	3,7321	2679
16°	2756	9613	2867	3,4874	74°	9613	2756	3,4874	2867
17°	2924	9563	3057	3,2709	73°	9563	2924	3,2709	3057
18°	3090	9511	3249	3,0777	72°	9511	3090	3,0777	3249
19°	3256	9455	3443	2,9042	71°	9455	3256	2,9042	3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
21°	3584	9336	3839	6051	69°	9336	3584	6051	3839
22°	3746	9272	4040	4751	68°	9272	3746	4751	4040
23°	3907	9205	4245	3559	67°	9205	3907	3559	4245
24°	4067	9135	4452	2460	66°	9135	4067	2460	4452
25°	4226	9063	4663	1445	65°	9063	4226	1445	4663
26°	4384	8988	4877	2,0503	64°	8988	4384	2,0503	4877
27°	4540	8910	5095	9626	63°	8910	4540	9626	5095
28°	4695	8829	5317	8807	62°	8829	4695	8807	5317
29°	4848	8746	5543	1,8040	61°	8746	4848	1,8040	5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
31°	5150	8572	6009	6643	59°	8572	5150	6643	6009
32°	5299	8480	6249	6003	58°	8480	5299	6003	6249
33°	5446	8387	6494	5399	57°	8387	5446	5399	6494
34°	5592	8290	6745	4826	56°	8290	5592	4826	6745
35°	5736	8192	7002	4281	55°	8192	5736	4281	7002
36°	5878	8090	7265	3764	54°	8090	5878	3764	7265
37°	6018	7986	7536	3270	53°	7986	6018	3270	7536
38°	6157	7880	7813	2799	52°	7880	6157	2799	7813
39°	6293	7771	8098	1,2349	51°	7771	6293	1,2349	8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
41°	6561	7547	8693	1504	49°	7547	6561	1504	8693
42°	6691	7431	9004	1106	48°	7431	6691	1106	9004
43°	6820	7314	9325	0724	47°	7314	6820	0724	9325
44°	6947	7193	9657	0355	46°	7193	6947	0355	9657
45°	7071	7071	1,0000	1,0000	45°	7071	7071	1,0000	1,0000
α	**sin** α	**cos** α	**tg** α	**ctg** α	α	**sin** α	**cos** α	**tg** α	**ctg** α

Глава II

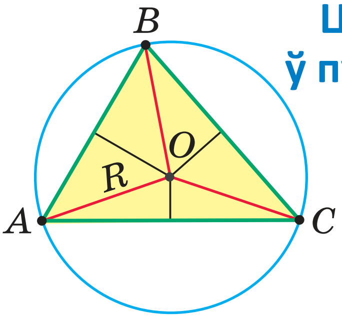
Упісаныя і апісаныя акружнасці

У гэтай главе вы даведаецеся:

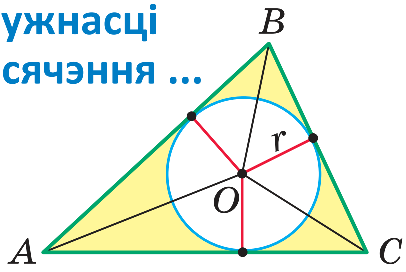
- Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай, а дзе цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка
- Аб формуле плошчы трохвугольніка $S = pr$
- Аб уласцівасцях упісанага ў акружнасць і апісанага каля акружнасці чатырохвугольнікаў

Апісаныя і ўпісаныя акружнасці

Цэнтр ... акружнасці ў пункце перасячэння ...

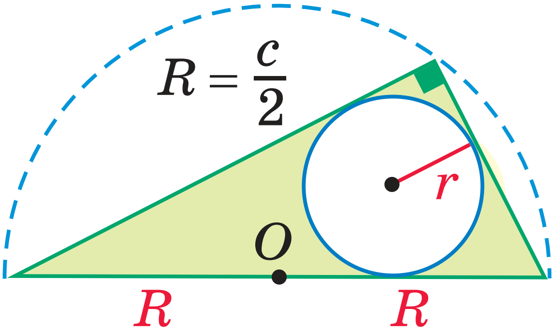


пасярэдніх перпендыкуляраў



бісектрыс

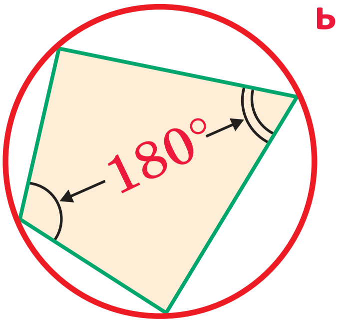
$S = pr$



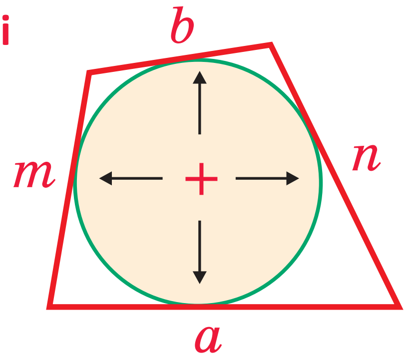
Прамавугольны

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

ьмвугольнікі



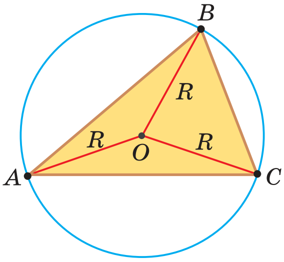
Упісаны



Апісаны

§ 8. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка

Азначэнне. Акружнасць называецца **апісанай** каля трохвугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні.



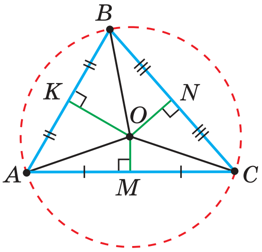
Рыс. 90

На рысунку 90 паказана акружнасць з радыусам R і цэнтрам O, апісаная каля трохвугольніка ABC.

Паколькі $OA = OB = OC = R$, то цэнтр апісанай акружнасці *роўнааддалены ад вяршынь трохвугольніка*.

Замест слоў «акружнасць, апісаная каля трохвугольніка ABC», таксама гавораць «акружнасць, апісаная вакол трохвугольніка ABC», або «апісаная акружнасць трохвугольніка ABC».

Тэарэма (аб акружнасці, апісанай каля трохвугольніка). **Каля любога трохвугольніка можна апісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.**

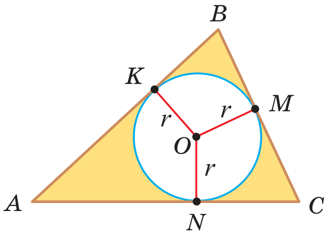


Рыс. 91

Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рыс. 91). Няхай O — пункт перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон. Правядзём адрэзкі OA, OB і OC. Па ўласцівасці пасярэдняга перпендыкуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Паколькі пункт O роўнааддалены ад усіх вяршынь трохвугольніка ABC, то акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OA праходзіць праз усе вяршыні трохвугольніка ABC, г. зн. з'яўляецца яго апісанай акружнасцю. Адзінасць апісанай акружнасці дакажыце самастойна.

Заўвага. Паколькі ўсе тры пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра апісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых двух з іх.

Азначэнне. Акружнасць называецца **ўпісанай** у трохвугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон.



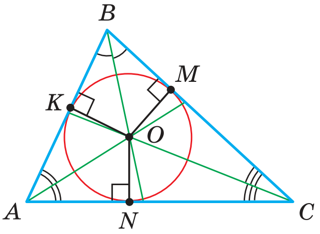
Рыс. 92

На рысунку 92 паказана акружнасць з цэнтрам *O* і радыусам *r*, упісаная ў трохвугольнік *ABC*; *K*, *M* і *N* — пункты яе дотыку да старон трохвугольніка *ABC*.

Паколькі $OK = OM = ON = r$ і па ўласцівасці датычнай да акружнасці $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то цэнтр упісанай акружнасці *роўнаадаленыад старон трохвугольніка*.

Замест слоў «акружнасць, упісаная ў трохвугольнік *ABC*», таксама гавораць «упісаная акружнасць трохвугольніка *ABC*».

Тэарэма (аб акружнасці, упісанай у трохвугольнік).
У любы трохвугольнік можна ўпісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка.



Рыс. 93

Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік *ABC* (рыс. 93). Няхай *O* — пункт перасячэння яго бісектрыс. Правядзём з пункта *O* перпендыкуляры *OK*, *OM* і *ON* адпаведна да старон *AB*, *BC* і *AC*. Па ўласцівасці бісектрысы вугла $OK = ON$, $ON = OM$. Акружнасць з цэнтрам у пункце *O* і радыусам *OK* будзе праходзіць праз пункты *K*, *M* і *N* і датыкацца да старон *AB*, *BC* і *AC* у дадзеных пунктах па прымеце датычнай. Такім чынам, гэта акружнасць з'яўляецца ўпісанай у трохвугольнік *ABC*. Адзінасць упісанай акружнасці дакажыце самастойна.

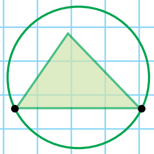
Заўвага. Паколькі ўсе тры бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра ўпісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых дзвюх з іх.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

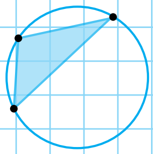
Тэст 1

На якім з рысункаў паказана акружнасць, апісаная каля трохвугольніка?

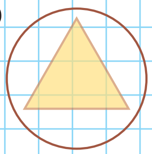
а)



б)



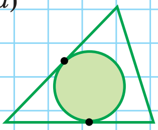
в)



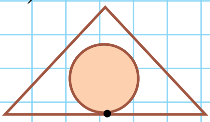
Тэст 2

На якім з рысункаў паказана акружнасць, упісаная ў трохвугольнік?

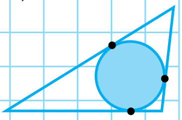
а)



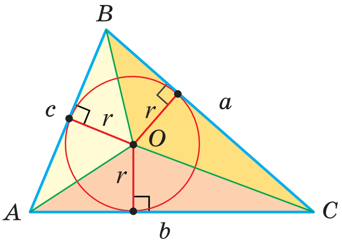
б)



в)



Тэарэма. Плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка, r — радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.



$$\boxed{S = pr}$$

Рыс. 94

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — цэнтр яго ўпісанай акружнасці (рыс. 94). Злучым адрэзкамі пункт O з вяршынямі A, B і C. Трохвугольнік ABC разаб'ецца на тры трохвугольнікі: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радыусы r, праведзеныя ў пункты дотыку, будуць вышынямі гэтых трохвугольнікаў. Плошча трохвугольніка ABC роўна суме плошчаў названых трохвугольнікаў:

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr.$$

Тэарэма даказана.

Вынік.

Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, можна знайсці па формуле

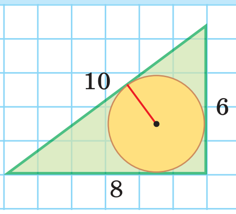
$$r = \frac{S}{p}.$$

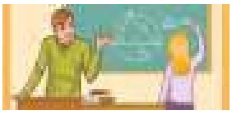
Адной з важнейшых задач дадзенай тэмы з'яўляецца задача знаходжання радыуса апісанай і радыуса ўпісанай акружнасцей дадзенага трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3**.

Тэст 3

Выкарыстаўшы формулу $S = pr$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 6 см, 8 см, 10 см.

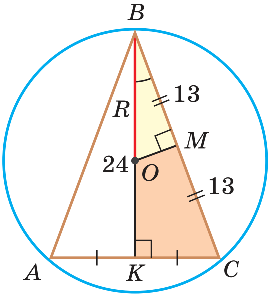




Заданні да § 8

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC, у якога AB = BC = 26 см, вышыня BK = 24 см* (рыс. 95).

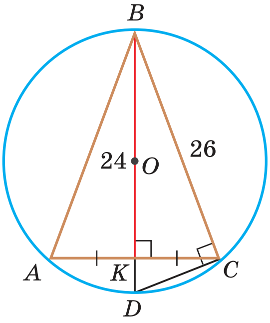


Рыс. 95

Рашэнне. *Спосаб* 1 (метад падобнасці). Цэнтр апісанай акружнасці ляжыць на перасячэнні пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка. Правядзём пасярэднія перпендыкуляры да старон AC і BC, якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры апісанай акружнасці. Паколькі ў раўнабедраным трохвугольніку вышыня, праведзеная да асновы, з'яўляецца медыянай, то BK — пасярэдні перпендыкуляр да стараны AC. Няхай MO — пасярэдні перпендыкуляр да стараны BC. Тады $BM = 13$ см, $BO = R$ — шуканы радыус. Паколькі $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (як прамавугольныя з агульным вострым вуглом CBK), то

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC},\ \frac{13}{R} = \frac{24}{26}, \text{ адкуль } R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14\frac{1}{12} \text{ (см).}$$

Спосаб 2 (трыганаметрычны метад). З $\triangle OBM$ (гл. рыс. 95) $\cos\angle OBM = \frac{BM}{BO}$, з $\triangle CBK$ $\cos\angle CBK = \frac{BK}{BC}$, адкуль $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.



Рыс. 96

Спосаб 3* (сярэдняе прапарцыянальнае). Прадоўжым вышыню BK да перасячэння з апісанай акружнасцю ў пункце D (рыс. 96). Паколькі цэнтр апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка ляжыць на прамой BK (гл. спосаб 1), то $BD = 2R$ — дыяметр дадзенай акружнасці. У прамавугольным трохвугольніку BCD ($\angle BCD = 90°$ як упісаны, які абапіраецца на дыяметр) катэт BC ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай BD і праекцыяй BK катэта BC на гіпатэнузу. Таму $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$, адкуль $R = 14\frac{1}{12}$ (см).

Адказ: $14\frac{1}{12}$ см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 1 вынікае ўласцівасць: ***«Цэнтр акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы, або на яе прадаўжэнні»***.

Правільнае і адваротнае сцверджанне: ***«Калі цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць на вышыні трохвугольніка або на яе прадаўжэнні, то гэты трохвугольнік раўнабедраны».***

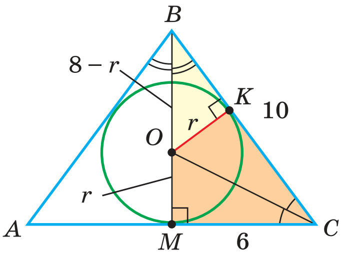
Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Карысна запомніць!

Калі ў ключавой задачы 1 бакавую старану абазначыць b, а вышыню, праведзеную да асновы, — h_a, то атрымаецца прапорцыя $\frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{h_a}{b}$. Адсюль вынікае зручная формула для знаходжання радыуса акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка:

$$\boxed{R = \frac{b^2}{2h_a}.}$$

Задача 2. *Знайсці радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC, у якога $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.*



Рыс. 97

Рашэнне. *Спосаб* 1 (метад падобнасці). Цэнтр упісанай акружнасці знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка. Правядзём у трохвугольніку ABC бісектрысы з вяршынь B і C, якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры ўпісанай акружнасці (рыс. 97). Бісектрыса BM, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка ABC, будзе яго вышынёй і медыянай, прамень CO — бісектрыса вугла C, $OM = r$ — шуканы радыус упісанай акружнасці. Паколькі $AM = MC = 6$ см, то з $\triangle BMC$ па тэарэме Піфагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), адкуль $BO = BM - OM = 8 - r$ (см). Правядзём радыус OK у пункт дотыку акружнасці са стараной BC, $OK \perp BC$. З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў BKO і BMC ($\angle MBC$ — агульны) вынікае: $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Тады $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $5r = 3(8 - r)$, $8r = 24$, $r = 3$ (см).

Спосаб 2 (трыганаметрычны метад). З $\triangle OBK$ (гл. рыс. 97) $\sin\angle OBK = \frac{OK}{OB}$, з $\triangle MBC$ $\sin\angle MBC = \frac{MC}{BC}$, адкуль $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.

Спосаб 3 (уласцівасць бісектрысы трохвугольніка). CO — бісектрыса $\triangle BMC$. Вядома, што бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам. Таму $\frac{OM}{OB} = \frac{MC}{BC}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, адкуль $r = 3$ (см).

Спосаб 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2); $p = \frac{1}{2} P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см). З формулы плошчы трохвугольніка $S = pr$ вынікае: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).

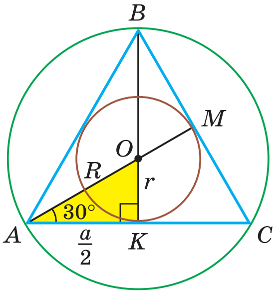
Адказ: 3 см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 2 вынікае ўласцівасць: ***«Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы».***

Правільнае і адваротнае сцверджанне: ***«Калі цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць на вышыні трохвугольніка, то гэты трохвугольнік раўнабедраны».***

Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Задача 3. *Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са стараной a. Знайсці радыус R яго апісанай акружнасці і радыус r яго ўпісанай акружнасці.*



Рыс. 98

Рашэнне. *Спосаб* 1 (трыганаметрычны метад). Паколькі ў роўнастароннім трохвугольніку бісектрысы з'яўляюцца і вышынямі, і медыянамі, то яго бісектрысы ляжаць на пасярэдніх перпендыкулярах да старон трохвугольніка. Таму *ў роўнастароннім трохвугольніку цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей супадаюць.*

Разгледзім роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной a, у якога вышыні AM і BK перасякаюцца ў пункце O — цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей (рыс. 98). Тады $OA = OB = R$ — радыусы апісанай, $OK = OM = r$ — радыусы ўпісанай акружнасці. Паколькі AM — бісектрыса і $\angle BAC = 60°$, то $\angle OAK = 30°$. Паколькі BK — вышыня і медыяна, то $AK = \frac{a}{2}$. З $\triangle AKO$ $\cos 30° = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

У $\triangle AKO$ катэт OK ляжыць супраць вугла ў 30°, таму $OK = \frac{1}{2} AO$, $r = \frac{1}{2} R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Спосаб 2 (уласцівасць медыян). Паколькі AM і BK — медыяны трохвугольніка ABC (гл. рыс. 98), то па ўласцівасці медыян $BO : OK = 2 : 1$. Вышыню роўнастаронняга трохвугольніка можна знайсці па формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Адкуль $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3} BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = OK = \frac{1}{3} BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Адказ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Карысна запомніць!

Паколькі радыус апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $a = R\sqrt{3}$. Значыць, старана роўнастаронняга трохвугольніка ў $\sqrt{3}$ раза большая за радыус яго апісанай акружнасці. Каб знайсці радыус R апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка, трэба старану a падзяліць на $\sqrt{3}$, а каб знайсці яго старану a, трэба радыус R памножыць на $\sqrt{3}$. Радыус упісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $r = \frac{1}{2}R$.

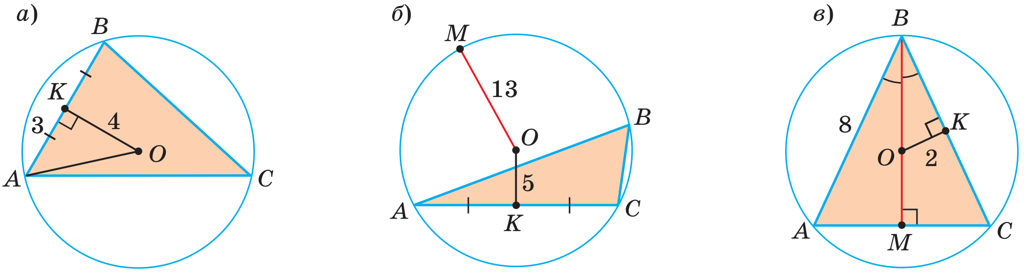
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

86. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O.

а) Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, *а*).

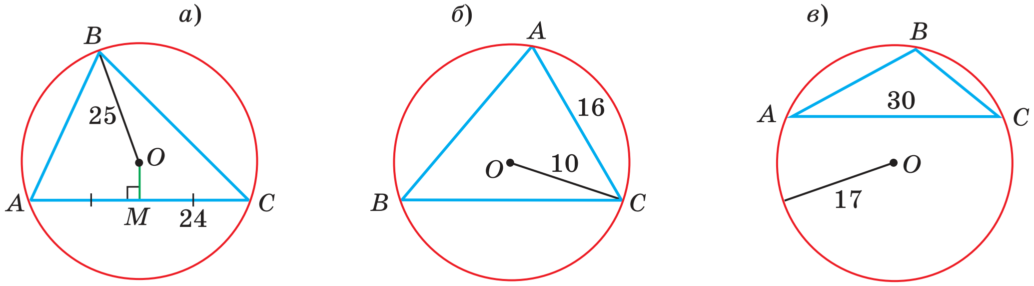
б) Знайдзіце старану AC, калі K — яе сярэдзіна (рыс. 99, *б*).

в) Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, *в*).



Рыс. 99

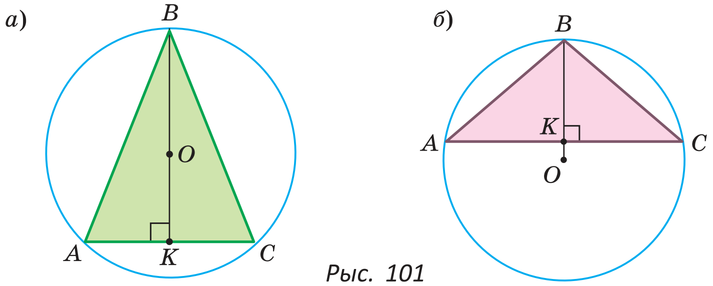
87. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць. Па даных на рысунках 100, *а*)—*в*) знайдзіце адлегласць ад цэнтра O акружнасці да прамой AC.



Рыс. 100

88. Выкарыстаўшы ключавую задачу 1 (с. 60), знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і вышынёй BK, калі:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рыс. 101, *а*);
б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рыс. 101, *б*).

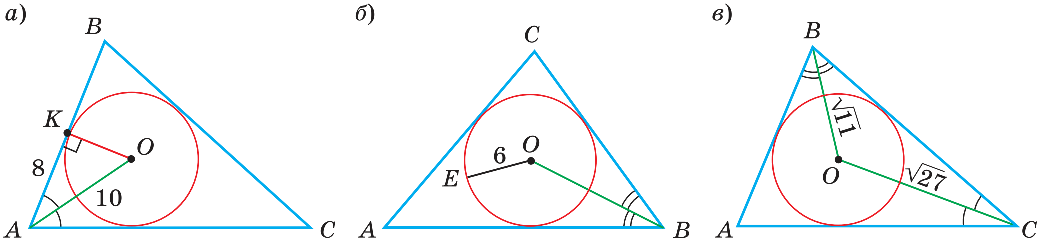


Рыс. 101

89. Радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, роўны 5 см, вышыня, праведзеная да яго асновы, роўна 8 см. Знайдзіце плошчу дадзенага трохвугольніка.

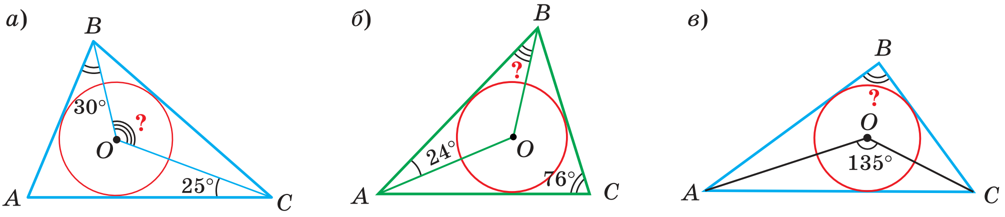
90. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O.

а) Па рысунку 102, *а*) вызначце радыус упісанай акружнасці.
б) Па рысунку 102, *б*) вызначце даўжыню адрэзка OB, калі $\angle ABC = 60°$.
в) Па рысунку 102, *в*) вызначце даўжыню стараны BC, калі дыяметр упісанай акружнасці роўны $\sqrt{8}$.



Рыс. 102

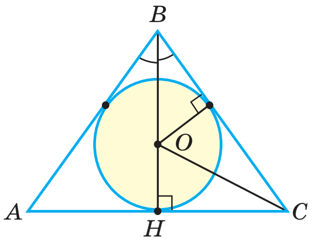
91. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O. Па даных на рысунках 103, *а*)—*в*) вызначце велічыню вугла, абазначанага пытальнікам.



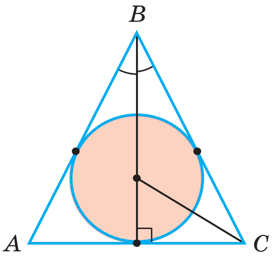
Рыс. 103

92. а) Выкарыстаўшы ключавую задачу 2 (с. 61), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 6$ см і вышынёй $BH = 4$ см, праведзенай да асновы (рыс. 104).

б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 10$ см і бакавой стараной $AB = 13$ см (рыс. 105).



Рыс. 104



Рыс. 105

93. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са стараной, роўнай $4\sqrt{3}$ см. Вылічыце:

а) радыус апісанай акружнасці гэтага трохвугольніка;
б) радыус упісанай акружнасці гэтага трохвугольніка.

94. а) Знайдзіце радыус R апісанай і радыус r упісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка, калі яго вышыня $h = 12$ см.
б) Знайдзіце плошчу роўнастаронняга трохвугольніка, калі радыус R яго апісанай акружнасці роўны 2 см.

95. а) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі апішыце акружнасць каля тупавугольнага трохвугольніка.
б) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі ўпішыце акружнасць у прамавугольны трохвугольнік.

96. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC, $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120°$. Вызначце:

а) радыус яго апісанай акружнасці;
б) радыус яго ўпісанай акружнасці.

97. а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, у якога перыметр роўны 18 см, а радыус упісанай акружнасці — 2 см.

б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, плошча якога роўна 45 см^2, а перыметр — 30 см.

98. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай AC, O_1 — цэнтр апісанай, O_2 — цэнтр упісанай акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка O_1O_2, калі $AB = 20$ см, вышыня $BH = 16$ см.

99. а) Акружнасць, упісаная ў раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць пунктам дотыку яго бакавую старану на адрэзкі, роўныя 6 см і 4 см, лічачы ад асновы. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік.

б) Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць яго вышыню, праведзеную да асновы, у адносіне 4 : 5, лічачы ад асновы. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі яго бакавая старана роўна 20 см.

100. Косінус вугла пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўны 0,8, перыметр трохвугольніка роўны 54 см. Знайдзіце:

а) радыус яго ўпісанай акружнасці;

б) радыус яго апісанай акружнасці.

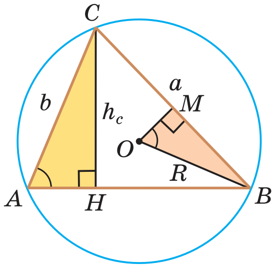
101. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам O, якая датыкаецца да яго старон AB, BC і AC адпаведна ў пунктах M, N і K. Знайдзіце:

а) $\angle MNK$, калі $\angle A = 70°$;

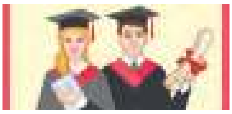
б) $\angle AOB$, калі $\angle KMN = 64°$.

102. Акружнасць з цэнтрам у пункце O апісана каля трохвугольніка ABC (рыс. 106), $OB = R$ — радыус акружнасці, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — вышыня, $OM \perp BC$. Дакажыце, што:

а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\dfrac{CH}{AC} = \dfrac{MB}{OB}$; в) $R = \dfrac{ab}{2h_c}$.



Рыс. 106



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

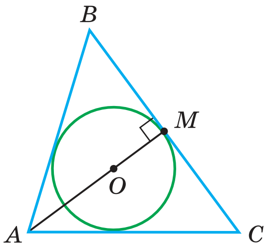
103*. а) У трохвугольніку ABC $\angle A = 30°$, $BC = 6$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

б) У трохвугольніку ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, вышыня $BH = 8$ см. Знайдзіце радыус R апісанай акружнасці.

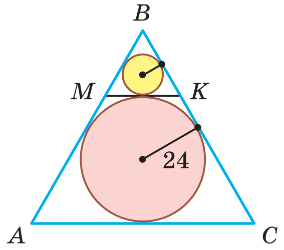
104*. У трохвугольніку ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік, датыкаецца да дадзеных старон адпаведна ў пунктах M, N, K. Знайдзіце:

а) $AK + MB + NC$; б) даўжыню адрэзка AK.

105*. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O (рыс. 107), вышыня AM праходзіць праз пункт O, $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці.



Рыс. 107



Рыс. 108

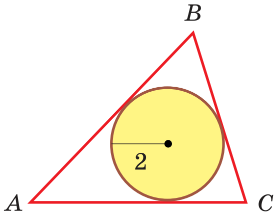
106*. У роўнастароннi трохвугольнік ABC упісана акружнасць, радыус якой роўны 24. Адрэзак MK датыкаецца да гэтай акружнасці і паралельны старане AC (рыс. 108). Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік MBK.

107*. Дакажыце, што калі цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка супадаюць, то гэты трохвугольнік роўнастаронні.

108*. а) Дакажыце, што каля дадзенага трохвугольніка можна апісаць толькі адну акружнасць.

б) Дакажыце, што ў дадзены трохвугольнік можна ўпісаць толькі адну акружнасць.

109*. Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC, H — пункт перасячэння яго вышынь (артацэнтр), O — цэнтр апісанай акружнасці. Пункты O, H, A і C ляжаць на адной акружнасці. Знайдзіце велічыню вугла B.



Рыс. 109

Гімнастыка розуму

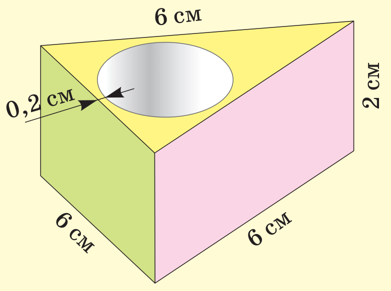
Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC (рыс. 109), роўны 2 см, плошча трохвугольніка $S = 2019$ см^2. Знайдзіце вусна перыметр P трохвугольніка ABC.

Якую ўласцівасць, на ваш погляд, мае трохвугольнік, у якога радыус упісанай акружнасці роўны 2? Абгрунтуйце ваша меркаванне.

Геаметрыя 3D

Загатоўка ўяўляе сабой правільную трохвугольную прызму вышынёй 2 см, у аснове якой ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной 6 см (рыс. 110). У цэнтры загатоўкі трэба зрабіць цыліндрычную адтуліну. Адлегласць ад акружнасці адтуліны да стараны асновы роўна 0,2 см.

Заданне 1. Знайдзіце (акругліўшы вынік да 1 мм) дыяметр свердла для свідравання патрэбнай адтуліны.



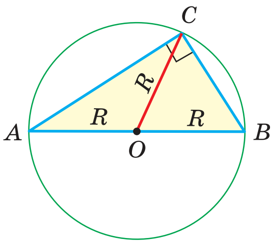
Рыс. 110

Заданне 2. Па формуле аб’ёму цыліндра $V_ц = \pi R^2 H$, дзе R — радыус асновы, H — вышыня цыліндра, знайдзіце аб’ём цыліндрычнай адтуліны. Прыміце $\pi \approx 3{,}14$. Адказ акругліце да 1 см^3.

Заданне 3. Улічыўшы, што аб’ём прызмы роўны здабытку яе плошчы асновы на вышыню, г. зн. $V_{пр} = S_{асн} \cdot H$, вылічыце, колькі працэнтаў складае аб’ём цыліндрычнай адтуліны ад аб’ёму прызмы. Адказ акругліце да 1 %.

§ 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

Тэарэма. **Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы, г. зн. $R = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.**



$\boxed{R = \frac{c}{2}}$

Рыс. 111

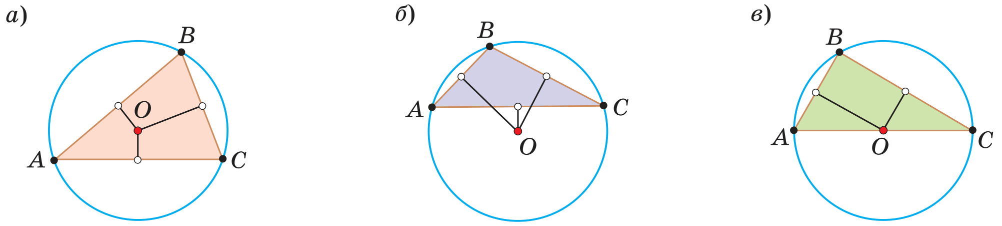
Доказ. Правядзём у прамавугольным трохвугольніку ABC медыяну CO да гіпатэнузы AB (рыс. 111). Паколькі медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, то $OC = OA = OB$. Тады сярэдзіна гіпатэнузы — пункт O — роўнааддалены ад пунктаў A, B і C і таму з’яўляецца цэнтрам апісанай акружнасці трохвугольніка ABC. Радыус гэтай акружнасці

$R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.

Тэарэма даказана.

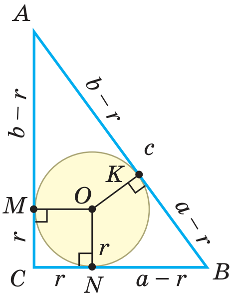
Заўвага. Таксама можна даказаць, што пасярэднія перпендыкуляры да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка перасякаюцца на сярэдзіне гіпатэнузы.

Адзначым, што ў востравугольнага трохвугольніка цэнтр апісанай акружнасці ляжыць унутры трохвугольніка (рыс. 112, *а*), у тупавугольнага — па-за трохвугольнікам (рыс. 112, *б*), у прамавугольнага — на сярэдзіне гіпатэнузы (рыс. 112, *в*). Абгрунтуйце першыя два сцверджанні самастойна.


а) *б*) *в*)

Рыс. 112

Тэарэма. **Радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, можна знайсці па формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, дзе r — шуканы радыус, a і b — катэты, c — гіпатэнуза трохвугольніка.**



$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

Рыс. 113

Доказ. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $BC = a$, $AC = b$ і гіпатэнузай $AB = c$. Няхай упісаная ў трохвугольнік акружнасць з цэнтрам O і радыусам r датыкаецца да старон трохвугольніка ў пунктах M, N і K (рыс. 113). Правядзём радыусы ў пункты дотыку і атрымаем: $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, $OK \perp AB$. Чатырохвугольнік $CMON$ — квадрат, паколькі ў яго ўсе вуглы прамыя і $OM = ON = r$. Тады $CM = CN = r$, $NB = a - r$, $MA = b - r$. Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $BK = BN = a - r$, $AK = AM = b - r$. Але $BK + AK = AB$, г. зн. $(a - r) + (b - r) = c$, $a + b - 2r = c$, адкуль $r = \frac{a+b-c}{2}$. Тэарэма даказана.

Вынік. *$r = p - c$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка.*

Доказ. Пераўтворым формулу радыуса ўпісанай акружнасці:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула $\boxed{r = p - c}$ у спалучэнні з формуламі $\boxed{S = pr}$ і $\boxed{R = \frac{c}{2}}$ дае магчымасць рашаць многія задачы, звязаныя з прамавугольным трохвугольнікам, алгебраічным метадам.

Прыклад. Дадзены прамавугольны трохвугольнік, $S = 24$, $R = 5$. Знайсці r.

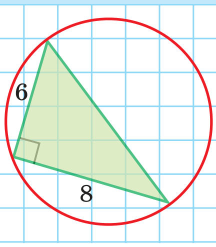
Рашэнне. Паколькі $r = p - c$, а $R = \frac{c}{2}$, то $p = r + c = r + 2R = r + 10$. З формулы $S = pr$ вынікае $24 = (r + 10)r$, $r^2 + 10r - 24 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $r_1 = 2$, $r_2 = -12$ — пабочны корань.

Адказ: $r = 2$.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

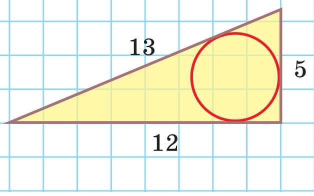
Тэст 1

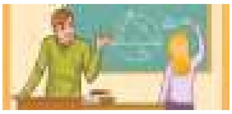
Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля паказанага на рысунку трохвугольніка.



Тэст 2

Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у паказаны на рысунку трохвугольнік.



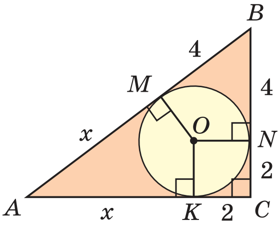


Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, у якога адзін з катэтаў роўны* 6, *а радыус упісанай акружнасці роўны* 2.



Рыс. 114

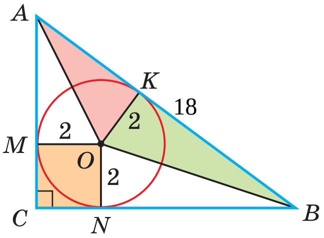
Рашэнне. *Спосаб* 1 (геаметрычны). Няхай у трохвугольніку ABC, дзе $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $r = 2$ — радыус упісанай акружнасці (рыс. 114). Правядзём з цэнтра O ўпісанай акружнасці перпендыкуляры OK, OM і ON да старон трохвугольніка, якія будуць радыусамі ўпісанай акружнасці. Паколькі $KONC$ — квадрат, то $NC = KC = r = 2$, $BN = 6 - 2 = 4$. Па ўласцівасці датычных $BM = BN = 4$, $AM = AK = x$. Тады $AC = x + 2$, $AB = x + 4$. Па тэарэме Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$, $4x = 24$, $x = 6$. Такім чынам, $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$. Радыус апісанай акружнасці $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Спосаб 2 (алгебраічны). Падставіўшы ў формулу $r = \frac{a + b - c}{2}$ значэнні $r = 2$ і $a = 6$, атрымаем $c = b + 2$. Па тэарэме Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$, г. зн. $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$, $b = 8$. Тады $c = 10$, $R = \frac{c}{2} = 5$.

Адказ: 5.

Задача 2*. *Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка* $c = 18$, *радыус упісанай у яго акружнасці* $r = 2$. *Знайсці плошчу трохвугольніка.*

Рашэнне. *Спосаб* 1 (геаметрычны). Няхай у $\triangle ABC$ гіпатэнуза $AB = c = 18$, O — цэнтр упісанай акружнасці, OK, OM, ON — яе радыусы, праведзеныя ў пункты дотыку (рыс. 115). Паколькі $OM \perp AC$, $ON \perp BC$,



Рыс. 115

$OK \perp AB$ і $OM = ON$, то $CMON$ — квадрат са старанай, роўнай радыусу r упісанай акружнасці, $OK = r$ — вышыня $\triangle AOB$. Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $AK = AM$, $BK = BN$. Адсюль $\triangle AKO = \triangle AMO$, $\triangle BKO = \triangle BNO$ па катэце і гіпатэнузе.

Плошча $\triangle ABC$ роўна суме падвоенай плошчы $\triangle AOB$ і плошчы квадрата $CMON$, г. зн.

$$S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot OK + MO^2 = c\cdot r + r^2 = 18\cdot 2 + 2^2 = 40.$$

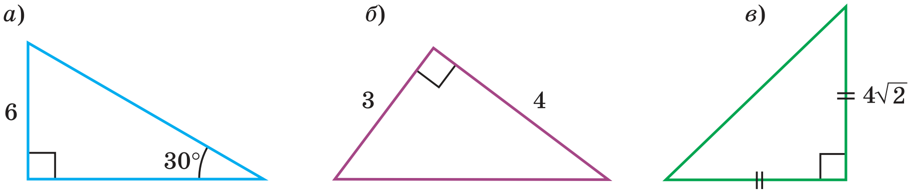
Спосаб 2 (алгебраічны). З формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ вынікае $2 = \frac{a+b-18}{2}$, $a + b = 22$. Узвядзём абедзве часткі роўнасці ў квадрат: $(a + b)^2 = 22^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 484$. Паколькі $a^2 + b^2 = c^2$ і $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то $c^2 + 4S = 484$, $64 + 4S = 484$, $S = 40$.

Спосаб 3 (алгебраічны). З формулы $r = p - c$ вынікае, што $p = r + c$. З формулы $S = pr$ вынікае, што $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18)\cdot 2 = 40$.

Адказ: 40.

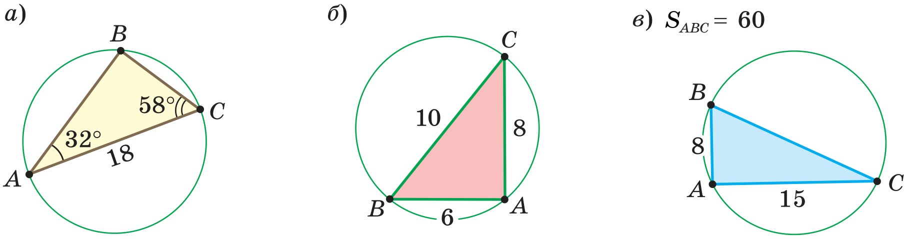
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

110. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 116, *а*)—*в*), знайдзіце радыус апісанай акружнасці трохвугольніка.



Рыс. 116

111. Па даных на рысунках 117, *а*)—*в*) знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.



Рыс. 117

112. Знайдзіце радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі:

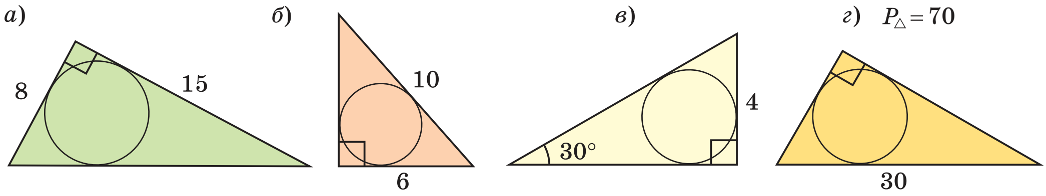
а) 12 см і 16 см; б) 18 м і 24 м;
в) 14 дм і 48 дм; г) 1 км і 2 км.

113. а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка ABC, калі ў яго адзін з катэтаў роўны 6 см, а радыус апісанай акружнасці — 5 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, адзін з катэтаў якога роўны 8 см, а сінус процілеглага яму вугла роўны $\frac{2}{3}$.

114. Выкарыстаўшы формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b і гіпатэнузай c, калі:

а) $a = 3$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 12$ дм;
в) $a = 7$ см, $c = 25$ см; г) $a = 4$ м, $c = 4\sqrt{2}$ м.

115. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 118, *а)*—*г)*, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.

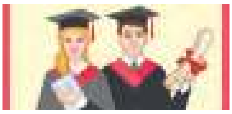


Рыс. 118

116. Адлегласць ад цэнтра акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, да гіпатэнузы роўна 6 см. Знайдзіце адлегласць ад гэтага цэнтра да вяршыні прамога вугла.

117. Знайдзіце катэты прамавугольнага трохвугольніка, калі ўпісаная акружнасць пунктам дотыку дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 5 см і 12 см.

118. Радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка роўны 13 см, упісанай — 4 см. Знайдзіце перыметр і плошчу трохвугольніка.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

119*. а) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна 24 см^2, радыус яго ўпісанай акружнасці роўны 2 см. Знайдзіце дыяметр апісанай акружнасці трохвугольніка.

б) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна 30 см^2, радыус яго апісанай акружнасці роўны 6,5 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.

120*. Знайдзіце перыметр прамавугольнага трохвугольніка, у якога гіпатэнуза $c = 14$ см, а радыус упісанай акружнасці $r = 1$ см.

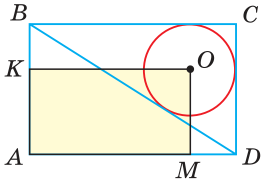
121*. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка са старанамі, роўнымі 12 см, 16 см і 20 см.

122*. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 9 см і 16 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у дадзены трохвугольнік.

123*. а) У прамавугольным трохвугольніку пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 3 см і 4 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

б) Дакажыце, што калі пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя m і n, то плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = mn$.

124*. $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 119), у трохвугольнік BCD упісана акружнасць з цэнтрам O. Дакажыце, што плошча прамавугольніка $AKOM$ роўна палавіне плошчы прамавугольніка $ABCD$.

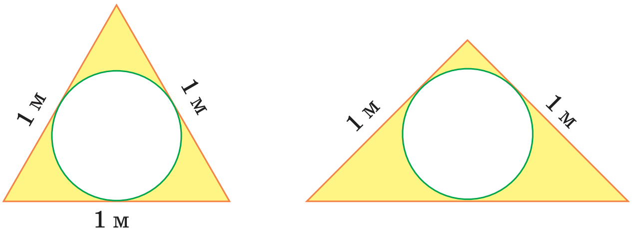


Рыс. 119

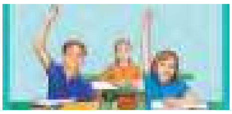
Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце *формулу Эйлера*, якая звязвае адлегласць паміж цэнтрамі ўпісанай і апісанай акружнасцей з іх радыусамі.

Рэальная геаметрыя

Ёсць два лісты ДСП (драўнінна-стружкавай пліты). Адзін з іх мае форму роўнастаронняга трохвугольніка са стараной 1 м, другі — форму прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 1 м (рыс. 120). З кожнага ліста неабходна выразаць па адным крузе найбольшага дыяметра. Вызначце, з якога ліста будзе выразаны круг большага дыяметра і якім у гэтым выпадку будзе працэнт адходаў, калі вядома, што плошчу круга можна знайсці па формуле $S = \pi R^2$, дзе $\pi \approx 3{,}14$.



Рыс. 120



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка.
2. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай, а дзе — цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка і чаму роўны яе радыус R.
4. Формулу радыуса r акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.
5. Формулу плошчы трохвугольніка, звязаную з радыусам r упісанай акружнасці.

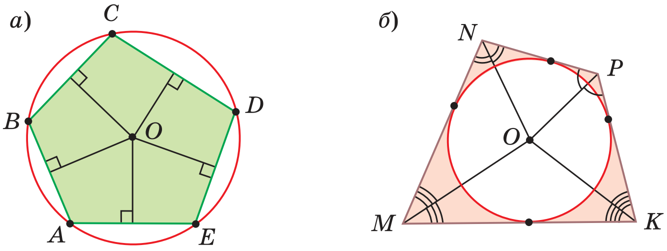
Умеем

1. Знаходзіць цэнтр апісанай акружнасці трохвугольніка.
2. Знаходзіць цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Выводзіць формулу $S = pr$.
4. Даказваць, што $R = \frac{c}{2}$ для прамавугольнага трохвугольніка.
5. Выводзіць формулу $r = \frac{a + b - c}{2}$ для прамавугольнага трохвугольніка.

§ 10. Упісаныя і апісаныя чатырохвугольнікі

Азначэнне. *Акружнасць называецца* ***апісанай*** *каля многавугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні. Пры гэтым многавугольнік называецца* ***ўпісаным у акружнасць.***
Акружнасць называецца ***ўпісанай*** *у многавугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон. Пры гэтым многавугольнік называецца* ***апісаным каля акружнасці.***

Пяцівугольнік $ABCDE$ (рыс. 121, *а*) з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, а чатырохвугольнік $MNPK$ (рыс. 121, *б*) — апісаным каля акружнасці.

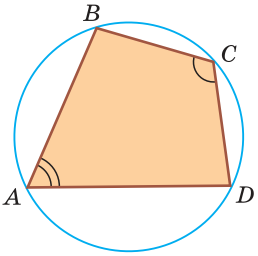


Рыс. 121

Цэнтр апісанай акружнасці многавугольніка знаходзіцца ў пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон, а цэнтр упісанай — у пункце перасячэння бісектрыс яго вуглоў.

Абгрунтуйце гэтыя сцверджанні самастойна.

Тэарэма (уласцівасць упісанага чатырохвугольніка).
Сума процілеглых вуглоў чатырохвугольніка, упісанага ў акружнасць, роўна 180°.

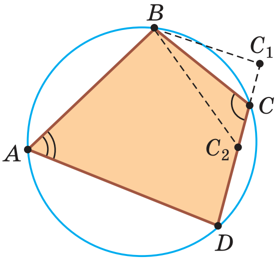


Калі ABCD упісаны, то $\angle A + \angle C = 180°$

Рыс. 122

Доказ. Няхай $ABCD$ — чатырохвугольнік, упісаны ў акружнасць (рыс. 122). Яго вуглы A, B, C і D з'яўляюцца ўпісанымі ў акружнасць. Паколькі ўпісаны вугал роўны палавіне дугі, на якую ён абапіраецца, то $\angle A = \frac{1}{2}\cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2}\cup BAD$. Дугі BCD і BAD дапаўняюць адна адну да акружнасці, і таму сума іх градусных мер роўна 360°. Адсюль $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$. Аналагічна даказваецца, што $\angle B + \angle D = 180°$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (прымета ўпісанага чатырохвугольніка).
Калі сума процілеглых вуглоў чатырохвугольніка роўна 180°, то каля яго можна апісаць акружнасць.



Калі $\angle A + \angle C = 180°$, то ABCD упісаны

Рыс. 123

Доказ*. Разгледзім чатырохвугольнік $ABCD$, у якога $\angle A + \angle C = 180°$ (рыс. 123). Праз вяршыні A, B і D правядзём акружнасць (каля любога трохвугольніка можна апісаць акружнасць). Калі б вяршыня C не ляжала на дадзенай акружнасці, а знаходзілася па-за ёй у становішчы C_1 або ўнутры яе ў становішчы C_2, то ў першым выпадку вугал C быў бы меншы, а ў другім — большы за палавіну градуснай меры дугі BAD (па ўласцівасці вугла паміж сякучымі і вугла паміж перасякальнымі хордамі). Тады сума $\angle A + \angle C$ не была б роўна 180°. Такім чынам, вяршыня C ляжыць на дадзенай акружнасці. Тэарэма даказана.

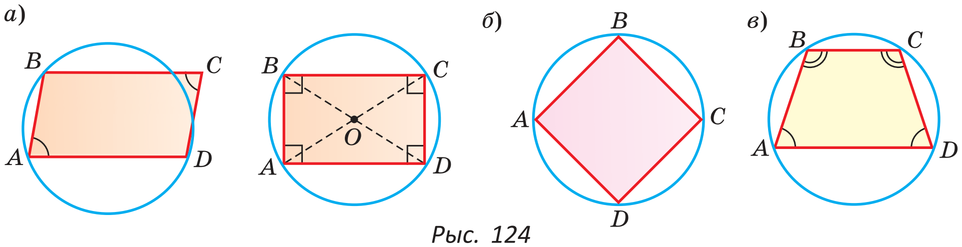
Заўвага. Паколькі сума вуглоў чатырохвугольніка роўна 360°, то для таго каб каля чатырохвугольніка можна было апісаць акружнасць, дастаткова, каб сума любой пары яго процілеглых вуглоў была роўна 180°.

Вынікі.

1. *Каля паралелаграма можна апісаць акружнасць, толькі калі гэты паралелаграм — прамавугольнік* (рыс. 124, *а*). *Цэнтр гэтай акружнасці ляжыць у пункце перасячэння дыяганалей прамавугольніка.*

2. *Каля ромба можна апісаць акружнасць, толькі калі гэты ромб — квадрат* (рыс. 124, *б*).

3. *Каля трапецыі можна апісаць акружнасць, толькі калі яна раўнабедраная* (рыс. 124, *в*).



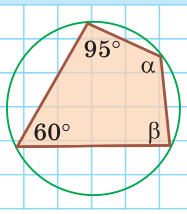
Рыс. 124

Дакажыце гэтыя вынікі самастойна.

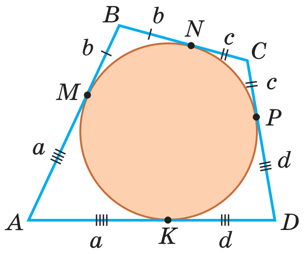
А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Каля чатырохвугольніка апісана акружнасць. Знайдзіце градусную меру вугла α і вугла β.



Тэарэма (уласцівасць апісанага чатырохвугольніка). **Сумы процілеглых старон апісанага чатырохвугольніка роўныя паміж сабой.**



Калі ABCD апісаны, то $AB + CD = BC + AD$

Рыс. 125

Доказ. Няхай $ABCD$ — апісаны чатырохвугольнік, M, N, P і K — пункты дотыку яго старон да акружнасці (рыс. 125). Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных да акружнасці з аднаго пункта, роўныя паміж сабой, то $AM = AK = a$, $BM = BN = b$, $CP = CN = c$, $DP = DK = d$. Тады

$$AB + CD = a + b + c + d,$$
$$AD + BC = a + d + b + c,$$

адкуль $AD + BC = AB + CD$.

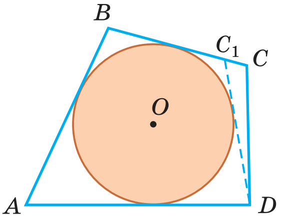
Тэарэма даказана.

Вынік.

Перыметр апісанага чатырохвугольніка роўны падвоенай суме даўжынь любой пары яго процілеглых старон:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + CD) = 2 \cdot (BC + AD).$$

Тэарэма (прымета апісанага чатырохвугольніка). **Калі сумы процілеглых старон выпуклага чатырохвугольніка роўныя, то ў яго можна ўпісаць акружнасць.**



Калі AB + CD = BC + AD, то ABCD апісаны

Рыс. 126

Доказ*. Няхай для выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ справядліва, што

$$AB + CD = AD + BC. \qquad (1)$$

Правядзём акружнасць, якая датыкаецца да прамых AD, AB і BC (рыс. 126). Такая акружнасць існуе, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс вуглоў A і B. Калі акружнасць не датыкаецца да стараны CD, то альбо прамая CD не мае з акружнасцю агульных пунктаў, альбо з'яўляецца сякучай. Разгледзім першы выпадак. Правядзём адрэзак DC_1, які датыкаецца да акружнасці. Па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка

$$AB + C_1D = AD + BC_1. \qquad (2)$$

Адняўшы пачленна ад роўнасці (1) роўнасць (2), атрымаем $CD - C_1D = BC - BC_1$, $CD - C_1D = C_1C$, $CD = C_1C + C_1D$, што супярэчыць няроўнасці трохвугольніка.

Разгледзеўшы выпадак, калі прамая DC — сякучая, таксама прыйдзем да супярэчнасці (зрабіце гэта самастойна). Такім чынам, дадзеная акружнасць датыкаецца да стараны CD і ў чатырохвугольнік $ABCD$ можна ўпісаць акружнасць. Тэарэма даказана.

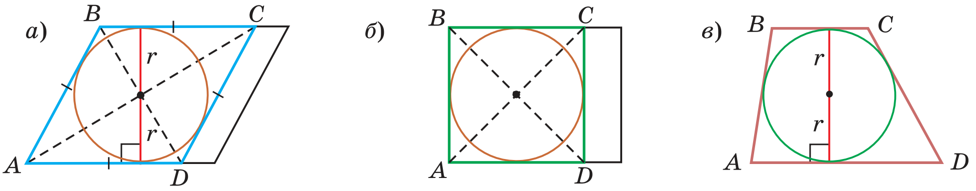
Вынікі.

1. *У паралелаграм можна ўпісаць акружнасць, толькі калі гэты паралелаграм — ромб. Цэнтр гэтай акружнасці ляжыць у пункце перасячэння дыяганалей ромба, а яе дыяметр роўны вышыні ромба* (рыс. 127, *а*).

2. *У прамавугольнік можна ўпісаць акружнасць, толькі калі гэты прамавугольнік — квадрат* (рыс. 127, *б*).

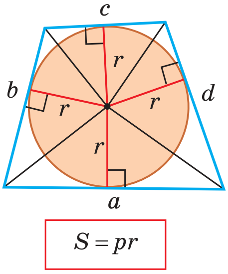
3. *Дыяметр акружнасці, упісанай у трапецыю, роўны яе вышыні* (рыс. 127, *в*).

Дакажыце гэтыя вынікі самастойна.



Рыс. 127

Для апісанага многавугольніка справядлівая формула $\boxed{S = pr,}$ дзе S — яго плошча, p — паўперыметр, r — радыус упісанай акружнасці. Доказ аналагічны прыведзенаму ў § 8 для трохвугольніка. Выканайце яго самастойна, выкарыстаўшы рысунак 128.

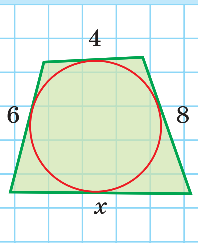


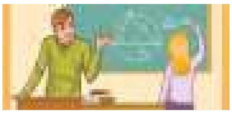
Рыс. 128

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

Тэст 2

У чатырохвугольнік упісана акружнасць. Знайдзіце даўжыню стараны x.



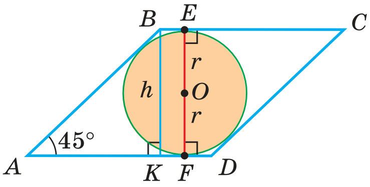


Заданні да § 10

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці радыус акружнасці, упісанай у ромб з перыметрам, роўным 24 см, і вострым вуглом, роўным 45°.*



Рыс. 129

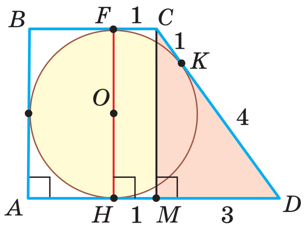
Рашэнне. *Спосаб* 1 (рашэнне прамавугольнага трохвугольніка). Няхай $ABCD$ — ромб (рыс. 129), O — цэнтр упісанай у ромб акружнасці. Вядома, што вышыня BK ромба роўна дыяметру EF упісанай акружнасці, г. зн. $h = 2r$. Паколькі ў ромба ўсе стораны роўныя, то $AB = \frac{24}{4} = 6$ (см).

З прамавугольнага трохвугольніка ABK знаходзім, што $\frac{BK}{AB} = \sin A$, адкуль $BK = AB \cdot \sin 45° = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см). Шуканы радыус упісанай акружнасці $r = \frac{BK}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

Спосаб 2 (метад плошчаў). Ромб — паралелаграм. Па формуле плошчы паралелаграма ($S = ab \sin\gamma$) знойдзем плошчу дадзенага ромба: $S = a \cdot a \cdot \sin\gamma = 6 \cdot 6 \cdot \sin 45° = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ (см^2). З другога боку, плошчу ромба можна знайсці па формуле плошчы апісанага многавугольніка $S = pr$. Паколькі $p = \frac{24}{2} = 12$ (см), то $S = 12r$. Адсюль $18\sqrt{2} = 12 \cdot r$, $r = \frac{18\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

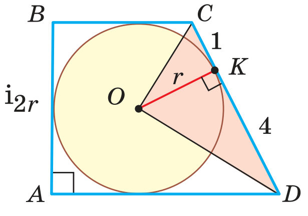
Адказ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

Задача 2. *Акружнасць, упісаная ў прамавугольную трапецыю ABCD, дзе* $\angle A = 90°$, *дзеліць пунктам дотыку большую бакавую старану CD на адрэзкі* $CK = 1$, $KD = 4$. *Знайсці плошчу трапецыі* (рыс. 130).



Рыс. 130

Рашэнне. *Спосаб* 1. Плошча трапецыі знаходзіцца па формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Неабходна знайсці суму асноў і вышыню трапецыі. Правядзём вышыню $FH = h$ трапецыі, якая праходзіць праз цэнтр O ўпісанай акружнасці. Па ўласцівасці датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, $CF = CK = 1$, $DH = DK = 4$. Правядзём вышыню CM. Паколькі $HFCM$ — прамавугольнік (усе вуглы прамыя), то $HM = FC = 1$, $MD = 3$. У прамавугольным трохвугольніку CMD па тэарэме Піфагора $CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тады $AB = CM = h = 4$. Па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка $AD + BC = AB + CD = 4 + 5 = 9$. Адсюль $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{AD + BC}{2} \cdot CM = \frac{9}{2} \cdot 4 = 18$.



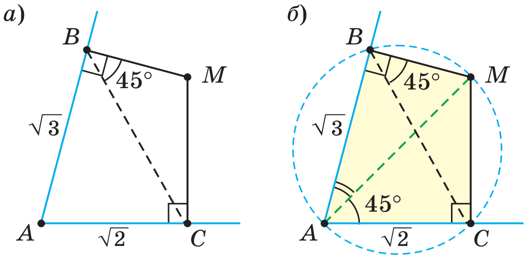
Рыс. 131

Спосаб 2*. Цэнтр O ўпісанай акружнасці ляжыць на перасячэнні бісектрыс вуглоў $\angle BCD$ $\angle ADC$. Паколькі $\angle BCD + \angle ADC = 180°$ як унутраныя аднастароннія вуглы пры $BC \parallel AD$ і сякучай CD, то $\angle OCD + \angle ODC = 90°$ (рыс. 131). Тады $\angle COD = 90°$, $\triangle COD$ — прамавугольны, радыус $OK = r$ з'яўляецца яго вышынёй, праведзенай да гіпатэнузы CD. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу. Таму $OK = \sqrt{CK \cdot KD}$ або $r = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$. Вышыня h апісанай трапецыі роўна дыяметру ўпісанай акружнасці, адкуль $AB = h = 2r = 4$. Паколькі па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка $AD + BC = AB + CD = 9$, то $S_{ABCD} = pr =$ $= (AB + CD) \cdot r = 9 \cdot 2 = 18$.

Адказ: 18.

Заўвага. Карысна запомніць уласцівасць: «***Бакавая старана апісанай трапецыі бачна з цэнтра ўпісанай акружнасці пад вуглом*** **90°**».

Задача 3*. *Унутры вострага вугла A ўзяты пункт M, з якога апушчаны перпендыкуляры MB і MC на стораны вугла A,* $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle MBC = 45°$. *Знайсці велічыню вугла BAC* (*рыс.* 132, *а*).



Рыс. 132

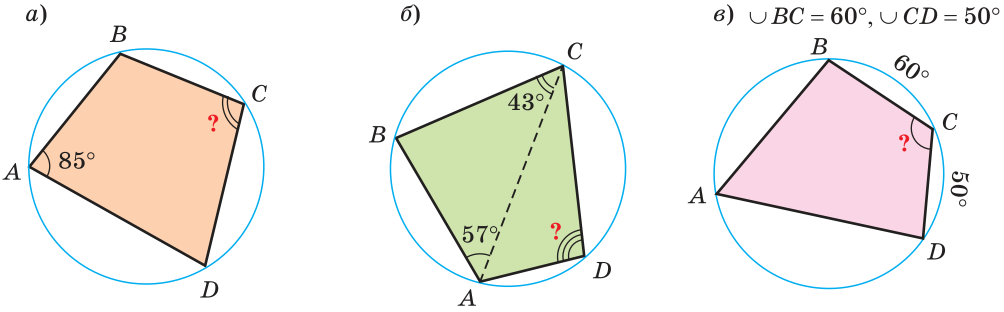
Рашэнне. Паколькі ў чатырохвугольніку $ABMC$ сума вуглоў B і C роўна 180°, то каля яго можна апісаць акружнасць. Правядзём у ёй хорду AM (рыс. 132, *б*). Паколькі $\angle MAC = \angle MBC$ як упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу MC, то $\angle MAC = 45°$ і прамавугольны трохвугольнік AMC з'яўляецца раўнабедраным, $AM = AC\sqrt{2} = 2$.

У прамавугольным трохвугольніку ABM $\cos \angle BAM = \frac{AB}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, адкуль $\angle BAM = 30°$, $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC = 30° + 45° = 75°$.

Адказ: 75°.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

125. Каля чатырохвугольніка $ABCD$ апісана акружнасць. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 133, *а*)—*в*), знайдзіце велічыню вугла, абазначанага пытальнікам.



Рыс. 133

126. $ABCD$ — упісаны чатырохвугольнік. Ведаючы, што:

а) $\angle A$ на 20° большы за $\angle C$, знайдзіце $\angle C$;

б) $\angle B : \angle D = 2 : 3$, знайдзіце $\angle D$;

в) $\angle A + \angle B + \angle C = 284°$, знайдзіце $\angle B$;

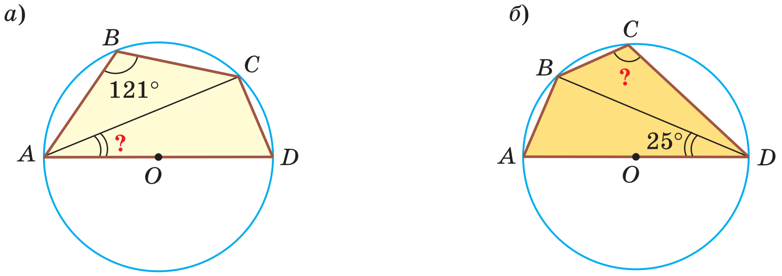
г) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 6$, знайдзіце $\angle D$.

127. Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць.

а) Знайдзіце $\angle BCD$, калі $\angle BAC = 26°$, $\angle CBD = 24°$.
б) Знайдзіце $\angle CAD$, калі $\angle ABD = 34°$, $\angle ADC = 116°$.

128. Цэнтр акружнасці, апісанай каля чатырохвугольніка $ABCD$, ляжыць на старане AD. Па даных на рысунках 134, *а*), *б*) знайдзіце:

а) $\angle CAD$; б) $\angle BCD$.



Рыс. 134

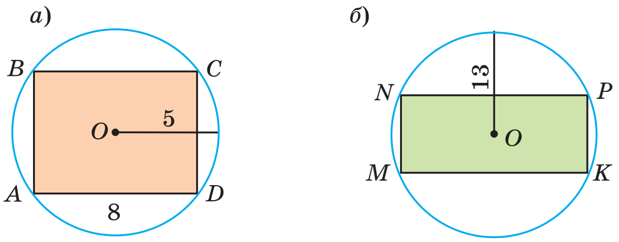
129. а) $ABCD$ — упісаная трапецыя ($AD \parallel BC$), $\angle A = 68°$. Знайдзіце градусную меру дугі ABC.
б) $ABCD$ — упісаная трапецыя, сярэдняя лінія якой роўна 7 см, а бакавая старана — 6 см. Знайдзіце перыметр трапецыі.

130. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Дакажыце, што $\angle BAC = \angle BDC$.

131. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$, O — пункт перасячэння дыяганалей, $AO = 3$ см, $BO = 6$ см, $DO = 4$ см. Знайдзіце даўжыню адрэзка CO.

132. Па даных на рысунках 135, *а*), *б*) знайдзіце плошчы прамавугольнікаў $ABCD$ і $MNPK$, калі:

а) $AD = 8$ см, $R = 5$ см; б) $MK : MN = 12 : 5$, $R = 13$ см.

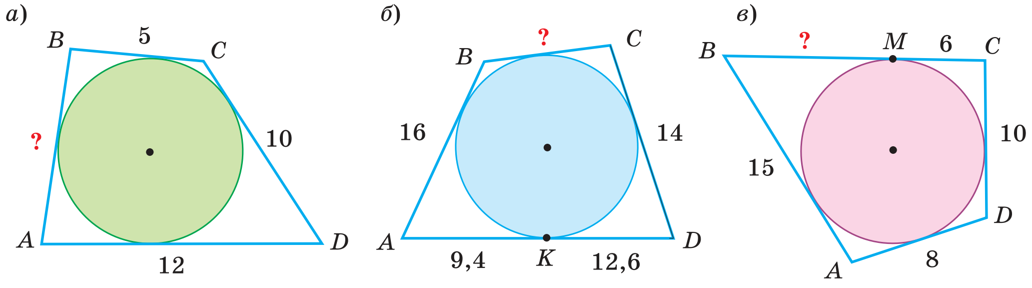


Рыс. 135

133. а) Дадзена раўнабедраная трапецыя, у якой дыяганаль перпендыкулярна бакавой старане. Меншая аснова трапецыі роўна 6 см, а радыус апісанай акружнасці — 5 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

б) Трапецыя $ABCD$ упісана ў акружнасць, большая аснова трапецыі з'яўляецца дыяметрам, меншая аснова роўна 12 см, вышыня трапецыі роўна 8 см. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

134. У чатырохвугольнік $ABCD$ упісана акружнасць. Па даных на рысунках 136, *а)*—*в)* знайдзіце даўжыню адрэзка, абазначанага пытальнікам.



Рыс. 136

135. а) Перыметр апісанага чатырохвугольніка $ABCD$ роўны 48 см. Знайдзіце $BC + AD$.
б) У трапецыю $ABCD$ з асновамі AD і BC упісана акружнасць. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі, калі $AB + CD = 16$ см.

136. а) Каля паралелаграма са старанамі 4 см і 5 см апісана акружнасць. Знайдзіце плошчу гэтага паралелаграма.
б) У паралелаграм з перыметрам 48 см і вострым вуглом 30° упісана акружнасць. Знайдзіце дыяметр гэтай акружнасці.

137. Сума дзвюх процілеглых старон чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, роўна 15 см, а радыус упісанай у яго акружнасці — 3 см. Знайдзіце плошчу дадзенага чатырохвугольніка.

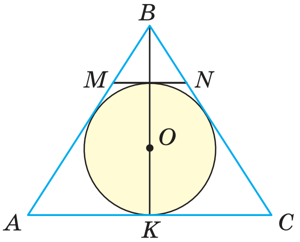
138. а) Дадзена апісаная прамавугольная трапецыя $ABCD$ ($\angle A = 90°$), сярэдняя лінія яе роўна 12,5, бакавая старана CD роўна 13. Знайдзіце асновы трапецыі.
б) Дадзена апісаная раўнабедраная трапецыя з асновамі, роўнымі 4 і 16. Знайдзіце плошчу гэтай трапецыі.

139. $ABCD$ — апісаны чатырохвугольнік, BC менш за AB на 1 см, AD больш за AB на 7 см, CD больш за AB у 2 разы. Знайдзіце AB.

140. O — цэнтр акружнасці, упісанай у чатырохвугольнік $ABCD$, $\angle BAO = 32°$, $\angle CDO = 24°$. Знайдзіце $\angle AOD$.

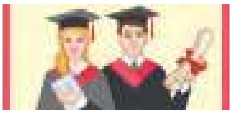
141. а) Радыус акружнасці, упісанай у ромб, роўны 4,5 см, востры вугал ромба роўны 30°. Знайдзіце перыметр ромба.
б) Дыяганалі ромба роўны 30 см і 40 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у ромб.

142. У раўнабедраны трохвугольнік ABC, у якога $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, упісана акружнасць. Датычная MN паралельна AC (рыс. 137). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $AMNC$.



Рыс. 137

143. У раўнабедранай трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 25$ см, $BC = 7$ см, дыяганаль $AC = 20$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля трапецыі.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

144*. а) Акружнасць радыуса 3 см упісана ў прамавугольную трапецыю, меншая аснова якой роўна 4 см. Знайдзіце бакавыя стараны і большую аснову трапецыі.

б) У прамавугольную трапецыю ўпісана акружнасць. Адлегласці ад цэнтра гэтай акружнасці да канцоў большай бакавой стараны роўны 15 см і 20 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

145*. Цэнтр акружнасці, апісанай каля трапецыі $ABCD$, ляжыць унутры трапецыі. Асновы трапецыі роўны 6 см і 8 см, вышыня роўна 7 см. Знайдзіце дыяметр апісанай акружнасці.

146*. Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$, $AB = CD = 6$ см, $AD = 8$ см, $BC = 4$ см. Бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце K. Знайдзіце даўжыню адрэзка AK.

147*. Дакажыце, што каля чатырохвугольніка $ABCD$ можна апісаць акружнасць, калі:

а) $\angle ABD = \angle ACD$;

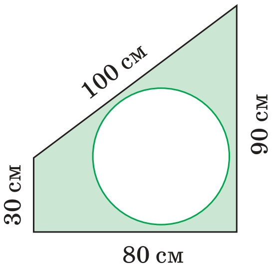
б) $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, дзе O — пункт перасячэння дыяганалей.

148*. У трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы AK і BN, якія перасякаюцца ў пункце I. Вядома, што пункты K, I, N і C ляжаць на адной акружнасці. Знайдзіце велічыню вугла C.

Мадэляванне

Кавалак тканіны мае форму прамавугольнай трапецыі, памеры якой паказаны на рысунку 138. З гэтай тканіны мадэльеру неабходна выразаць круг найбольшага дыяметра.

Складзіце алгарытм знаходжання цэнтра гэтага круга і велічыні яго радыуса.

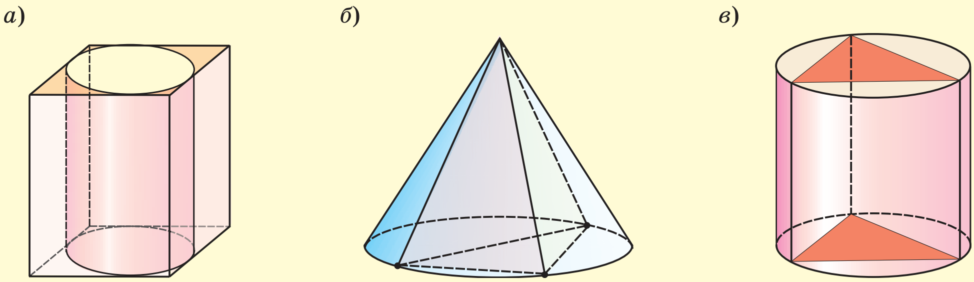


Рыс. 138

Геаметрыя 3D

Мнагаграннікі (прызма, піраміда) і целы вярчэння (цыліндр, конус, шар) могуць быць упісаны адзін у адзін (рыс. 139).

Заданне 1. У правільную чатырохвугольную прызму ўпісаны цыліндр так, што яго асновы ўпісаны ў асновы прызмы (гл. рыс. 139, *а*). Радыус асновы цыліндра роўны 4 см, вышыня цыліндра — 10 см. Знайдзіце памеры прызмы.

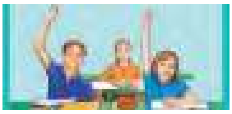


Рыс. 139

Заданне 2. У конус упісана трохвугольная піраміда так, што яе аснова ўпісана ў аснову конуса, а вяршыня супадае з вяршыняй конуса (гл. рыс. 139, *б*). Знайдзіце радыус асновы конуса, калі стораны асновы піраміды роўны 10 см, 24 см, 26 см.

Заданне 3. У цыліндр упісана правільная трохвугольная прызма так, што асновы прызмы ўпісаны ў асновы цыліндра, а бакавыя канты належаць бакавой паверхні цыліндра (рыс. 139, *в*). Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, калі радыус асновы цыліндра $2\sqrt{3}$ см, а яго вышыня — 8 см.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** ўдакладніце паняцце *правільнай прызмы*.



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне ўпісанага чатырохвугольніка.
2. Азначэнне апісанага чатырохвугольніка.
4. Уласцівасць і прымету ўпісанага чатырохвугольніка.
5. Уласцівасць і прымету апісанага чатырохвугольніка.

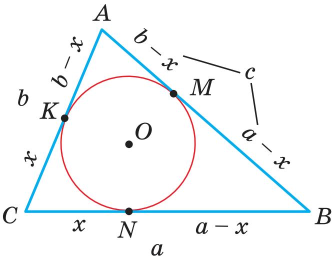
Умеем

1. Даказваць тэарэму аб уласцівасці вуглоў упісанага чатырохвугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці старон апісанага чатырохвугольніка.

§ 11*. Крэатыўная геаметрыя

1. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік

Задача 1. *Акружнасць упісана ў трохвугольнік ABC са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Вывесці формулу для знаходжання даўжынь адрэзкаў, на якія пункты дотыку акружнасці са старанамі дзеляць кожную старану трохвугольніка.*

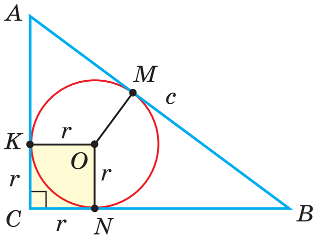


Рыс. 140

Рашэнне. Няхай K, M і N — пункты дотыку ўпісанай акружнасці адпаведна да старон AC, AB і BC трохвугольніка ABC (рыс. 140). Вядома, што адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой. Тады, калі $CK = CN = x$, то $BN = BM = a - x$, $AK = AM = b - x$. Паколькі $AB = AM + MB$, то $c = (a - x) + (b - x)$, адкуль $x = \frac{a+b-c}{2}$, г. зн. $CN = CK = \frac{a+b-c}{2}$. Пасля пераўтварэнняў атрымаем: $CN = CK = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c$.

Аналагічна: $BN = BM = \frac{a+c-b}{2} = p - b$, $AK = AM = \frac{b+c-a}{2} = p - a$.

Адказ: $CN = CK = p - c$, $BN = BM = p - b$, $AK = AM = p - a$.



Рыс. 141

Заўвага. Калі $\angle C = 90°$ (рыс. 141), то $CN = CK = r = p - c$ (гл. с. 69). Формула радыуса акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$ — прыватны выпадак выніку задачы 1.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

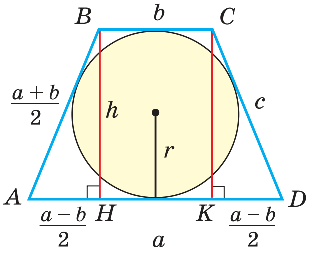
149. Дадзены трохвугольнік ABC са старанамі $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 8$. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC, датыкаецца да стараны AC у пункце K. Знайдзіце адносіну плошчаў трохвугольнікаў ABK і CBK.

150. У трохвугольнік ABC, у якога $AB = 8$, упісана акружнасць. Датычная да акружнасці перасякае стораны BC і AC у пунктах M і K адпаведна. Перыметр трохвугольніка MCK роўны 12. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC.

151. У трохвугольнік са старанамі 7, 9 і 10 упісана акружнасць. Да акружнасці праведзена датычная, якая перасякае дзве меншыя стараны трохвугольніка. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, адсечанага ад дадзенага гэтай датычнай.

2. Апісаная трапецыя

Задача 2. *Знайсці плошчу апісанай раўнабедранай трапецыі з асновамі a і b.*



Рыс. 142

Рашэнне. Плошчу трапецыі можна знайсці па формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Няхай у трапецыі $ABCD$ асновы $AD = a$ і $BC = b$, бакавыя стораны $AB = CD = c$, вышыня $BH = h$ (рыс. 142). Па ўласцівасці апісанага чатырохвугольніка $AB + CD = AD + BC$, адкуль $2AB = a + b$, $AB = c = \frac{a+b}{2}$. Вядома, што ў раўнабедранай трапецыі $AH = \frac{a-b}{2}$ (можна апусціць вышыню CK і пераканацца ў гэтым). З прамавугольнага трохвугольніка AHB атрымліваем: $h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$, $h = \sqrt{ab}$.

Адсюль $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

Адказ: $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

Заўвага. Плошча апісанай раўнабедранай трапецыі роўна здабытку сярэдняга арыфметычнага і сярэдняга геаметрычнага яе асноў.

Карысна запомніць!

Для *апісанай* раўнабедранай трапецыі з асновамі a і b, бакавой старанoй c, вышынёй h, сярэдняй лініяй m і радыусам r упісанай акружнасці (гл. рыс. 142) справядлівыя роўнасці:

1) $c = \frac{a+b}{2} = m$;
2) $P = 4c = 4m = 2(a+b)$;
3) $h = \sqrt{ab}$;
4) $S = ch$;
5) $r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$;
6) $S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА*

152. а) У раўнабедраную трапецыю з асновамі 2 см і 8 см упісана акружнасць. Знайдзіце плошчу трапецыі.
б) Знайдзіце плошчу апісанай раўнабедранай трапецыі, большая аснова якой роўна 18 см, бакавая старана — 13 см.

153. У раўнабедраную трапецыю плошчай 32 см^2 з вуглом 30° упісана акружнасць. Знайдзіце радыус гэтай акружнасці.

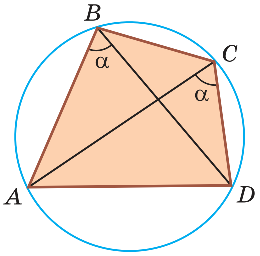
154. Дакажыце, што калі ў прамавугольную трапецыю з асновамі a і b можна ўпісаць акружнасць, то плошча трапецыі $S = ab$.

155. У прамавугольную трапецыю, меншая аснова якой роўна 4 см, упісана акружнасць. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці, калі плошча трапецыі роўна 48 см^2.

3. Дадатковыя ўласцівасці і прыметы ўпісанага чатырохвугольніка

Тэарэма.

Каля чатырохвугольніка можна апісаць акружнасць тады і толькі тады, калі вугал паміж яго старанай і дыяганаллю роўны вуглу паміж процілеглай старанай і другой дыяганаллю.



Рыс. 143

Доказ. 1. Калі чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць (рыс. 143), то $\angle ABD = \angle ACD$ як упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу.

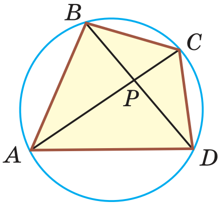
2. Дакажам, што калі ў некаторым чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$, то каля яго можна апісаць акружнасць. Апішам каля трохвугольніка ABD акружнасць.

У 8-м класе (В. У. Казакоў. «Геаметрыя, 8», с. 186) была даказана ўласцівасць: ***«Геаметрычным месцам пунктаў плоскасці, з якіх дадзены адрэзак AD бачны пад вуглом α, з'яўляецца аб'яднанне дзвюх дуг акружнасцей: дугі ABD і ёй сіметрычнай адносна прамой AD, за выключэннем пунктаў A і D»***. Дадзеная ўласцівасць гарантуе, што вяршыні ўсіх вуглоў, якія роўны вуглу ABD і ляжаць з аднаго боку ад прамой AD, размешчаны на дузе ABD акружнасці. Таму акружнасць, апісаная каля трохвугольніка ABD, пройдзе і праз вяршыню C. Тэарэма даказана.

---

* Да кожнага параграфа ёсць рэзерв задач, змешчаны ў дапаможніку «Наглядная геаметрыя. 9 клас» В. У. Казакова.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА



Рыс. 144

156. Дакажыце тэарэму: «***Каля чатырохвугольніка можна апісаць акружнасць тады і толькі тады, калі здабыткі адрэзкаў дыяганалей, на якія яны разбіваюцца пунктам перасячэння, роўныя***», г. зн. калі чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны, то $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ (рыс. 144), і наадварот.

157. а) O — пункт перасячэння дыяганалей выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, $\angle BAD = 42°$. Знайдзіце $\angle BCD$.

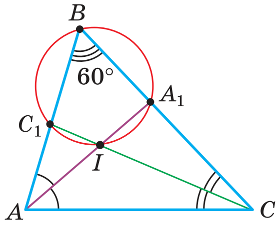
б) Дыяганалі чатырохвугольніка $ABCD$ перасякаюцца ў пункце P, $AP = 12$, $PC = 3$, $BP = 4$, $PD = 9$, $\angle CAD = 40°$. Знайдзіце $\angle CBD$.

158. У трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 12$, $BC = 4$, бакавая старана $AB = 5$, $\angle BAC = \angle CDB$. Знайдзіце плошчу трапецыі.

159. а) У чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle ADB = 45°$, $\angle BDC = 70°$, $\angle ACB = 45°$. Знайдзіце $\angle ABC$.

б) У чатырохвугольніку $ABCD$ $\angle BAD = 78°$, $\angle BCD = 102°$, $\angle CBD = 52°$. Знайдзіце $\angle CAD$.

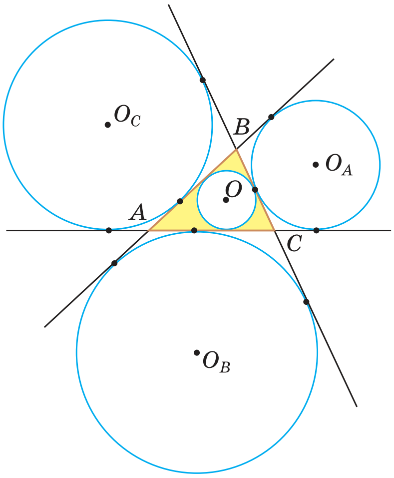
160. У трохвугольніку ABC (рыс. 145) $\angle B = 60°$, бісектрысы AA_1 і CC_1 перасякаюцца ў пункце I. Дакажыце, што каля чатырохвугольніка C_1BA_1I можна апісаць акружнасць.



Рыс. 145

4. Пазаўпісаныя акружнасці

Акружнасць, якая датыкаецца да стараны трохвугольніка і прадаўжэнняў дзвюх іншых яго старон, называецца *пазаўпісанай* акружнасцю трохвугольніка. На рысунку 146 паказаны трохвугольнік ABC і тры яго пазаўпісаныя акружнасці з цэнтрамі O_A, O_B, O_C і радыусамі r_a, r_b, r_c. Цэнтр кожнай такой акружнасці ляжыць у пункце перасячэння бісектрыс двух знешніх вуглоў пры вяршынях трохвугольніка.



Рыс. 146

Пазаўпісаныя акружнасці валодаюць шэрагам цікавых уласцівасцей:

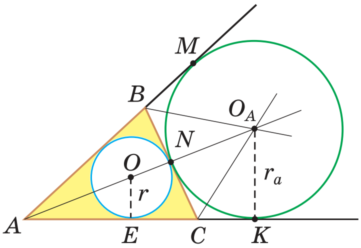
1. Цэнтры ўпісанай і пазаўпісанай акружнасцей ляжаць на бісектрысе адпаведнага ўнутранага вугла трохвугольніка.

2. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, дзе r — радыус упісанай акружнасці трохвугольніка.

3. $4R + r = r_a + r_b + r_c$, дзе R — радыус апісанай акружнасці $\triangle ABC$. Паспрабуйце даказаць некаторыя з гэтых уласцівасцей.

Знойдзем радыус r_a пазаўпісанай акружнасці трохвугольніка ABC са старанамі a, b і c (рыс. 147). Для гэтага правядзём радыусы OE і O_AK. Па ўласцівасці датычнай $OE \perp AC$, $O_AK \perp AC$. З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў AOE і AO_AK (па вострым вугле) вынікае $\frac{OE}{AE} = \frac{O_AK}{AK}$. Паколькі $AK = \frac{1}{2}P_{ABC} = p$, $AE = p - a$ і $r = \frac{S}{p}$, дзе $OE = r$, то $\frac{\frac{S}{p}}{p-a} = \frac{r_a}{p}$, адкуль $S = r_a(p - a)$,

$$\boxed{r_a = \frac{S}{p-a}.}$$



Рыс. 147

Прыклад. Вылічым, выкарыстаўшы дадзеную формулу, радыус пазаўпісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 3 і 4, якая датыкаецца да гіпатэнузы: $r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{3+4+5}{2} - 5} = \frac{6}{1} = 6.$

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

161. Няхай у трохвугольніку ABC $\angle A = 40°$. Знайдзіце $\angle BO_AC$, дзе O_A — цэнтр пазаўпісанай акружнасці трохвугольніка, якая датыкаецца да стараны BC.

162. Знайдзіце радыус пазаўпісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка са стараной, роўнай a.

163. Дакажыце, што для трохвугольніка $O_AO_BO_C$ (гл. рыс. 146) адрэзкі O_AA, O_BB, O_CC з'яўляюцца вышынямі.

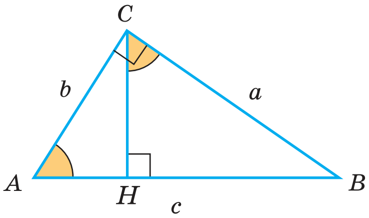
164. Пазаўпісаная акружнасць трохвугольніка ABC датыкаецца да стараны BC у пункце M, прадаўжэнняў старон AB і AC — у пунктах N і P адпаведна. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC, датыкаецца да стараны AC у пункце K, а да стараны AB — у пункце L. Дакажыце, што:

а) $AN = \frac{1}{2}P_{ABC}$; б) $NL = BC$.

165. Дакажыце, што адрэзак, які злучае цэнтр упісанай і цэнтр пазаўпісанай акружнасці трохвугольніка, дзеліцца апісанай акружнасцю гэтага трохвугольніка папалам.

5. Абагульненая тэарэма Піфагора

У прамавугольным трохвугольніку ABC ($\angle C = 90°$) праведзена вышыня CH, якая дзеліць яго на трохвугольнікі ACH і CBH, падобныя паміж сабой і падобныя трохвугольніку ABC ($\angle A = \angle BCH$) (рыс. 148). Тады тэарэма Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$ можа гучаць так: сума квадратаў гіпатэнуз a і b трохвугольнікаў CBH і ACH роўна квадрату гіпатэнузы трохвугольніка ABC. І наогул, калі m, n і l — адпаведныя лінейныя элементы $\triangle CBH$, $\triangle ACH$ і $\triangle ABC$, то можна сфармуляваць абагульненую тэарэму Піфагора: $m^2 + n^2 = l^2$.



Рыс. 148

Сапраўды, з падобнасці названых трохвугольнікаў $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{l}{c} = k$, адкуль $m = ka$, $n = kb$, $l = kc$, $m^2 + n^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2 = l^2$.

Прыклад. Няхай $P_{AHC} = 15$ см, $P_{CBH} = 36$ см (гл. рыс. 148). Знойдзем P_{ABC}. Па абагульненай тэарэме Піфагора $P_{AHC}^2 + P_{CBH}^2 = P_{ABC}^2$, адсюль $P_{ABC}^2 = 15^2 + 36^2 = 1521$, $P_{ABC} = 39$.

Адказ: $P_{ABC} = 39$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

166. У прамавугольным трохвугольніку з катэтамі 15 і 20 да гіпатэнузы праведзена вышыня. Яна разбівае дадзены трохвугольнік на два прамавугольныя трохвугольнікі. У кожны з атрыманых трохвугольнікаў упісана акружнасць. Знайдзіце:

а) адлегласць паміж пунктамі дотыку гэтых акружнасцей з названай вышынёй;
б) адлегласць паміж цэнтрамі гэтых акружнасцей.

167. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, дзеліць прамавугольны трохвугольнік на два трохвугольнікі, плошчы якіх роўны 1 см^2 і 4 см^2. Знайдзіце гіпатэнузу дадзенага прамавугольнага трохвугольніка.

168. Дакажыце, што для прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі a і b і вышынёй h, праведзенай да гіпатэнузы, справядлівая роўнасць

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

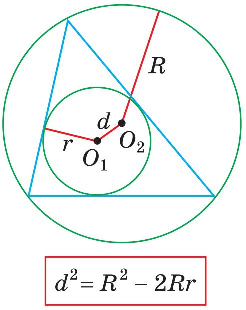
169. Няхай $CH = h$ — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC з гіпатэнузай AB, r — радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC, r_1 — радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ACH, r_2 — радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік BCH.

а) Дакажыце, што $r_1 + r_2 + r = h$.
б) Знайдзіце r, калі $r_1 = 3$, $r_2 = 4$.

6. Формула Эйлера для акружнасцей

Для ўпісанай і апісанай акружнасцей трохвугольніка з радыусамі R і r і адлегласцю d паміж іх цэнтрамі (рыс. 149) справядлівая формула Эйлера

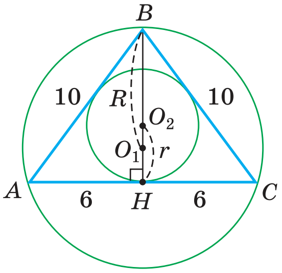
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$



Рыс. 149

Праверым справядлівасць гэтай формулы на прыкладзе раўнабедранага трохвугольніка ABC, у якога $AB = BC = 10$, $AC = 12$ (рыс. 150).

Спачатку знойдзем адлегласць паміж цэнтрамі дадзеных акружнасцей традыцыйным спосабам. Правядзём вышыню BH, даўжыня якой будзе роўна 8 (піфагорава тройка 6, 8, 10). Цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей — адпаведна пункты O_1 і O_2 — ляжаць на прамой BH (уласцівасць раўнабедранага трохвугольніка). Тады $BO_1 = R$, $O_2H = r$, $d = O_1O_2$ — адлегласць паміж указанымі цэнтрамі. Для знаходжання радыуса апісанай акружнасці выкарыстаем формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$, дзе b — бакавая старана, h_a — вышыня, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка. Атрымаем $R = \frac{10^2}{2 \cdot 8} = 6\frac{1}{4}$. Радыус упісанай акружнасці $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$. Паколькі $BO_1 = R = 6\frac{1}{4}$ і $O_1H = 8 - 6\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, то $O_1H < O_2H$. Шуканая адлегласць $d = O_1O_2 = O_2H - O_1H = 3 - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.



Рыс. 150

А цяпер знойдзем d па формуле Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr = \left(6\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{625}{16} - \frac{150}{4} = \frac{25}{16}$, адкуль $d = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Як бачым, формула Эйлера дастаткова эфектыўная.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

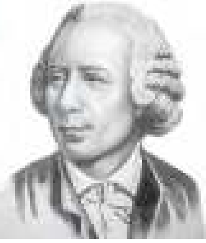
170. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 12 і 16 двума спосабамі: традыцыйным і з дапамогай формулы Эйлера.

171. Дакажыце, што для радыуса R апісанай і радыуса r упісанай акружнасцей трохвугольніка справядлівая няроўнасць $\frac{R}{r} \geqslant 2$.

172. Пры дапамозе формулы Эйлера дакажыце, што ў роўнастароннім трохвугольніку $R = 2r$.

Цікава ведаць. Леанард Эйлер — выдатны матэматык, які ўнёс значны ўклад у развіццё матэматыкі. Нарадзіўся ў Швейцарыі, доўгі час працаваў у Расіі, быў акадэмікам Пецярбургскай акадэміі навук.

У 1775 г. Леанард Эйлер апублікаваў тэарэму: «*Асновы вышынь, асновы медыян і сярэдзіны адрэзкаў, якія злучаюць пункт перасячэння вышынь з вяршынямі трохвугольніка, ляжаць на адной акружнасці*». Гэту акружнасць называюць *акружнасцю Эйлера або акружнасцю дзевяці пунктаў*. Яе радыус у 2 разы меншы за радыус апісанай акружнасці трохвугольніка.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце інфармацыю аб *акружнасці Эйлера*, а таксама аб *прамой Эйлера*. Высветліце, як звязаны прамая Эйлера і акружнасць Эйлера.

ТЭМЫ РЭФЕРАТАЎ

1. Акружнасць дзевяці пунктаў.
2. Прамая Эйлера.
3. Пункт Нагеля, пункт Жэргона, пункт Тарычэлі.
4. Жыццё і матэматычная спадчына Леанарда Эйлера.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя, 9» можна знайсці на сайце: http://e-vedy.adu.by, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 9 кл.».

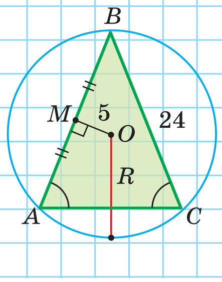
ЗАПАМІНАЕМ

1. Цэнтр апісанай акружнасці трохвугольніка (многавугольніка) ляжыць у пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон.
2. Цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка (многавугольніка) ляжыць у пункце перасячэння бісектрыс яго вуглоў.
3. Цэнтр апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы: $R = \frac{c}{2}$.
4. Радыус упісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка знаходзіцца па формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$.
5. Калі чатырохвугольнік упісаны ў акружнасць, то сумы яго процілеглых вуглоў роўны 180°. І наадварот.
6. Калі чатырохвугольнік апісаны каля акружнасці, то сумы яго процілеглых старон роўныя паміж сабой. І наадварот.
7. Плошчу трохвугольніка і апісанага многавугольніка можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе p — паўперыметр, r — радыус упісанай акружнасці.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

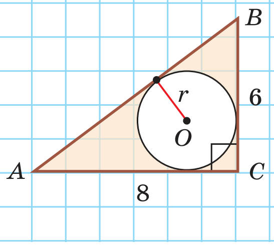
Тэст 1

Па даных на рысунку знайдзіце радыус R.



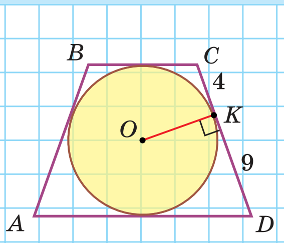
Тэст 2

Па даных на рысунку знайдзіце радыус r.



Тэст 3

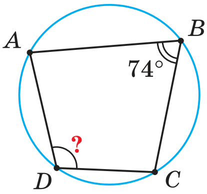
Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі $ABCD$.



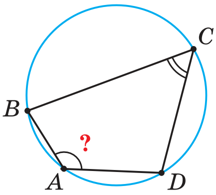
Падрыхтоўка да кантрольнай работы № 2

1. Знайдзіце велічыню вугла, абазначанага пытальнікам.

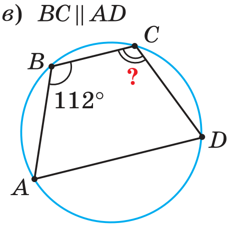
а)



б) $\angle C : \angle A = 1 : 3$

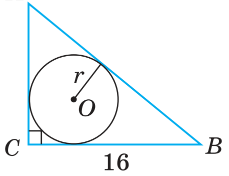


в) $BC \parallel AD$

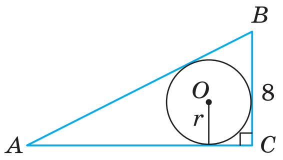


2. Знайдзіце радыус r упісанай акружнасці.

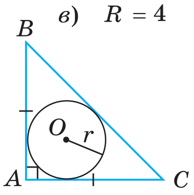
а) $R = 10$



б) $R = 8{,}5$

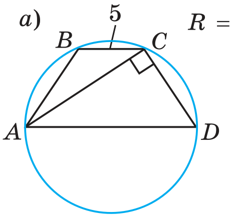


в) $R = 4$

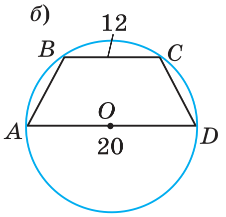


3. Знайдзіце вышыню трапецыі, упісанай у акружнасць.

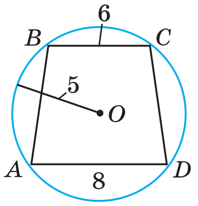
а) $R = 6{,}5$



б)

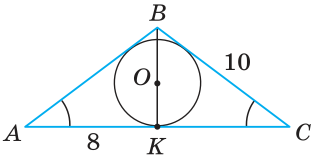


в)



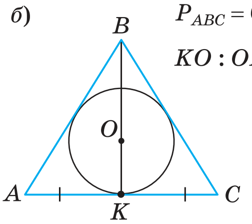
4. Знайдзіце радыус апісанай і радыус упісанай акружнасцей $\triangle ABC$.

а)

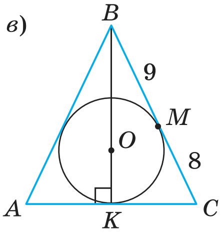


б) $P_{ABC} = 64$

$KO : OB = 3 : 5$

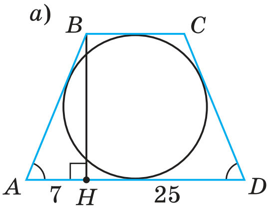


в)

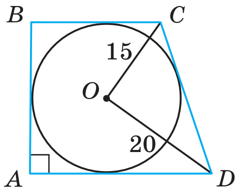


5. Знайдзіце плошчу апісанай трапецыі.

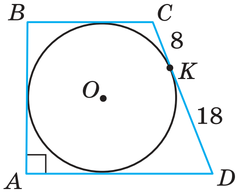
а)



б)

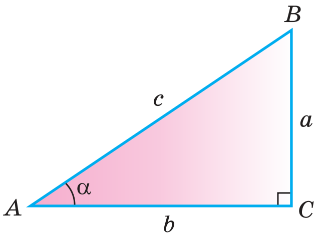


в)



Паўтарэнне главы I

1. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка



Дадзена: a, α.

Знайсці: b, c.

Рашэнне. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $b = a\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $c \cdot \sin\alpha = a$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$.

2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 30°, 60°, 45°

$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg} 30° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$,

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$.

3. Трыганаметрычныя формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

4. Знаходжанне значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Прыклады. $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

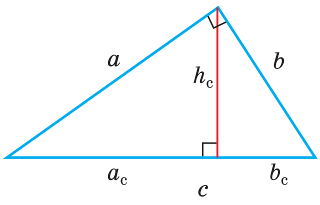
5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha.$$

6. Сярэдняе геаметрычнае ў прамавугольным трохвугольніку

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$
$$a = \sqrt{c \cdot a_c},$$
$$b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

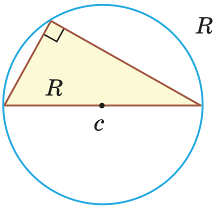
$$h_c = \frac{ab}{c}, \quad a_c = \frac{a^2}{c}, \quad b_c = \frac{b^2}{c}.$$



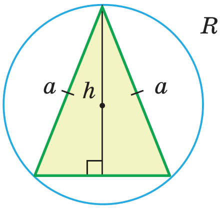
Паўтарэнне главы II

1. Знаходжанне радыуса апісанай акружнасці трохвугольніка

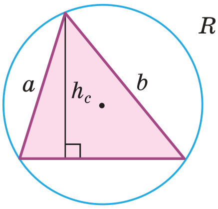
$R = \frac{c}{2}$



$R = \frac{a^2}{2h}$

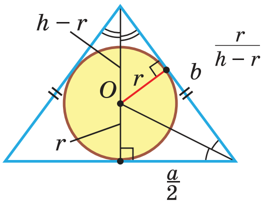


$R = \frac{ab}{2h_c}$

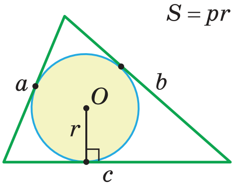


2. Знаходжанне радыуса ўпісанай акружнасці трохвугольніка

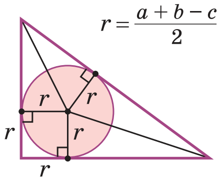
$\frac{r}{h-r} = \frac{\frac{a}{2}}{b}$



$S = pr$

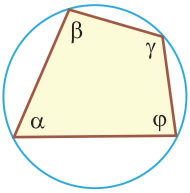


$r = \frac{a+b-c}{2}$

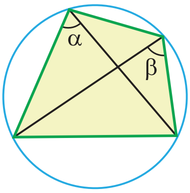


3. Упісаны чатырохвугольнік і яго апісаная акружнасць

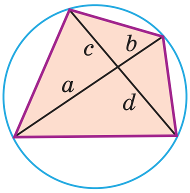
$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180°$



$\alpha = \beta$

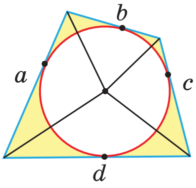


$ab = cd$

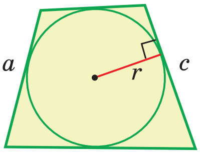


4. Апісаны чатырохвугольнік. Раўнабедраная апісаная трапецыя

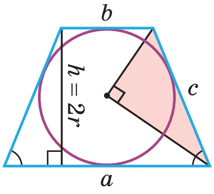
$a + c = b + d$



$S = (a + c)r = pr$

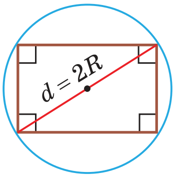


$S = ch \qquad h = \sqrt{ab}$

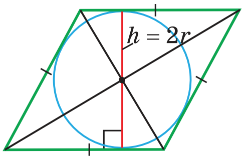


5. Паралелаграм і акружнасць. Прамавугольная апісаная трапецыя

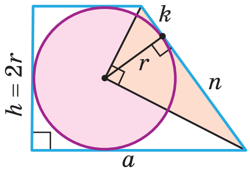
прамавугольнік



ромб



$S = ab \qquad r = \sqrt{kn}$

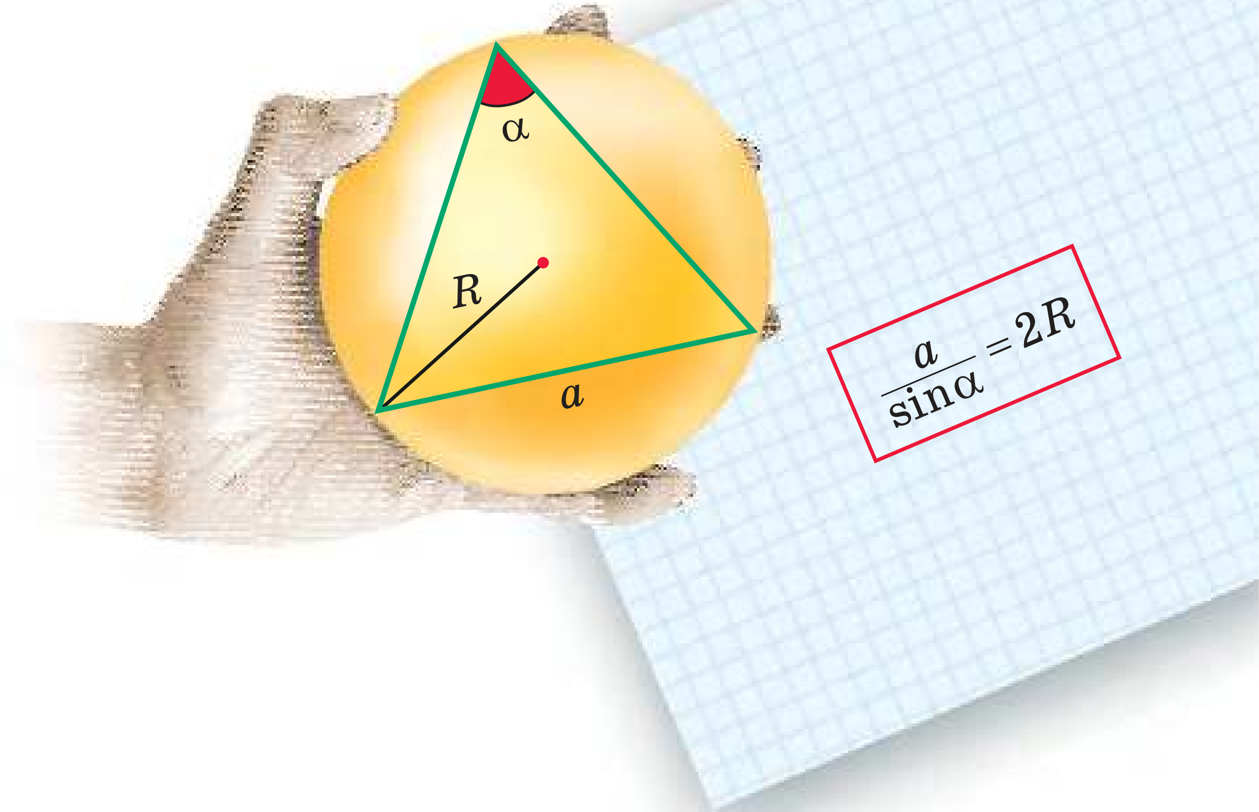


Глава III

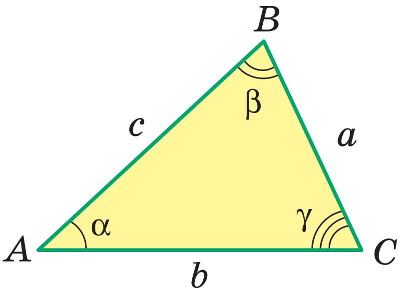
Тэарэма сінусаў, тэарэма косінусаў

У гэтай главе вы даведаецеся:

- Што сцвярджаюць тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў
- Як знайсці велічыню вугла трохвугольніка, ведаючы даўжыні ўсіх яго старон
- Пра формулу Герона аб плошчы трохвугольніка

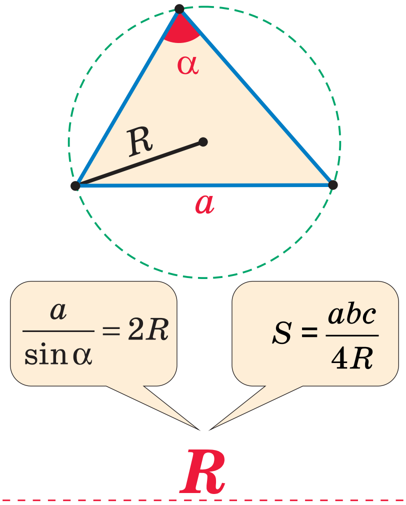


Тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

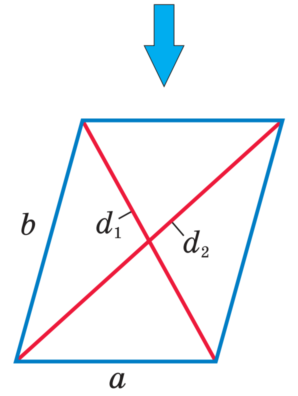
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$



$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

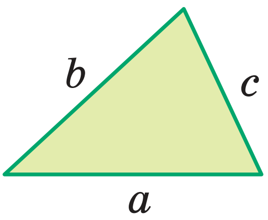
R



$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$$

Уласцівасці дыяганалей паралелаграма

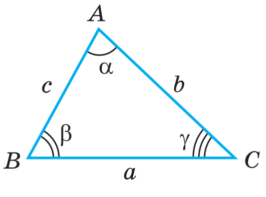
Формула Герона



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

§ 12. Тэарэма сінусаў

Вы ўжо ведаеце, што ў трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал, а супраць большага вугла — большая старана. Няхай a, b, c — стораны, α, β, γ — прылеглыя да іх вуглы трохвугольніка ABC адпаведна (рыс. 151). Калі старана a — большая, b — сярэдняя, c — меншая, то вугал α — большы, β — сярэдні, γ — меншы. Установім дакладную сувязь паміж даўжынёй стараны трохвугольніка і велічынёй процілеглага ёй вугла.

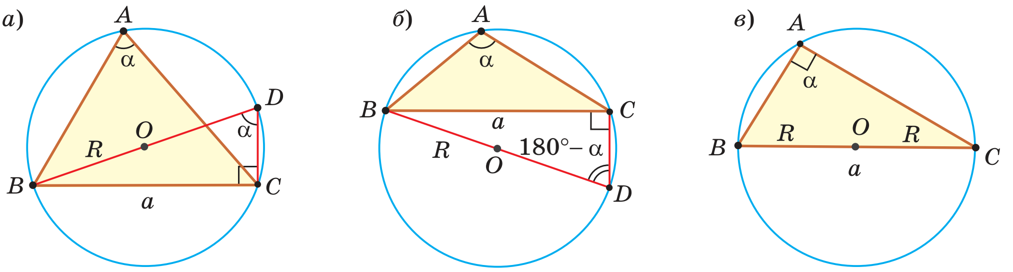


Рыс. 151

Тэарэма сінусаў. **Стораны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, г. зн.**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, R — радыус яго апісанай акружнасці. Вугал α можа быць вострым, тупым або прамым. Разгледзім гэтыя выпадкі асобна.



Рыс. 152

1) Вугал α востры (рыс. 152, *а*). Правёўшы дыяметр BD і адрэзак DC, атрымаем прамавугольны трохвугольнік BCD, у якім $\angle BCD = 90°$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр. Заўважым, што $\angle D = \angle A = \alpha$ як упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу BC. З прамавугольнага трохвугольніка BCD знаходзім $\sin D = \frac{BC}{BD}$, г. зн. $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

2) Вугал α тупы (рыс. 152, *б*). Правядзём дыяметр BD і адрэзак DC. У чатырохвугольніку $ABDC$ па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка $\angle D = 180° - \alpha$. З прамавугольнага трохвугольніка BCD ($\angle BCD = 90°$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$. Паколькі $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справядлівасць роўнасці $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ дакажыце самастойна.

З прычыны доказанага $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, адкуль $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. Тэарэма даказана.

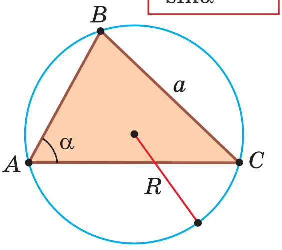
Тэарэма сінусаў дае магчымасць рашаць шырокае кола задач. Так, прапорцыя $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ дазваляе рашыць *дзве* наступныя задачы:

- ведаючы дзве стараны трохвугольніка і вугал, процілеглы адной з іх, знайсці сінус вугла, процілеглага другой старане;
- ведаючы два вуглы трохвугольніка і старану, процілеглую аднаму з гэтых вуглоў, знайсці старану, процілеглую другому вуглу.

Пры дапамозе формулы $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ можна рашыць яшчэ *тры* задачы (рыс. 153):

- ведаючы старану трохвугольніка і процілеглы ёй вугал, знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка;
- ведаючы вугал трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці, знайсці старану трохвугольніка, процілеглую дадзенаму вуглу;
- ведаючы старану трохвугольніка і радыус яго апісанай акружнасці, знайсці сінус вугла, процілеглага дадзенай старане.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = 2R}$$



Рыс. 153

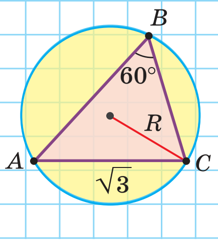
А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

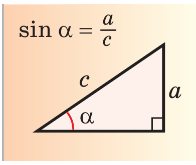
Знайдзіце старану x трохвугольніка на рысунку, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў: $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.

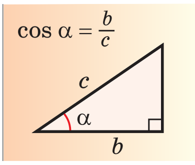
Тэст 2

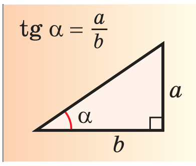
Знайдзіце велічыню радыуса R на рысунку, выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

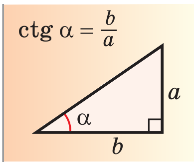


Паўтарэнне









1) $\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2},}$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$ $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$

2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2},}$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$ $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

3) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$

4) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$

Заданні да § 12

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У востравугольным трохвугольніку вядомы стораны* $a = 8$, $b = 9$ *і вугал* $\alpha = 60^\circ$. *Знайсці два другія вуглы* β *і* γ, *акругліўшы іх значэнні да* 1°, *і трэцюю старану трохвугольніка, акругліўшы яе даўжыню да* 0,1.

Рашэнне. Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, адкуль $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \frac{9 \cdot \sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9 \cdot 0{,}8660}{8} \approx 0{,}9743$. Пры дапамозе калькулятара (табліц) знаходзім $\beta \approx 77^\circ$. Тады $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, адкуль $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}$, $c = \frac{8 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8 \cdot \frac{0{,}6820}{0{,}8660} \approx 6{,}3$.

Адказ: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6{,}3$.

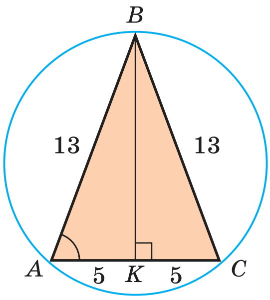
Заўвага. Калі б па ўмове трохвугольнік быў тупавугольным з тупым вуглом β, то, ведаючы $\sin\beta \approx 0{,}9743$, спачатку мы знайшлі б востры вугал $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затым, выкарыстаўшы формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, атрымалі б, што $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx$ $\approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

Задача 2. *Даказаць справядлівасць формулы плошчы трохвугольніка* $\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$ *дзе* a, b, c — *яго стораны,* R — *радыус апісанай акружнасці.*

Доказ. Выкарыстаем вядомую формулу плошчы трохвугольніка: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Па тэарэме сінусаў $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, адкуль $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Тады $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Выведзеная формула дазваляе знайсці радыус апісанай акружнасці трохвугольніка: $R = \frac{abc}{4S}$.

Задача 3. *Знайсці радыус R акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай* $AC = 10$ *і бакавой стараной* $BC = 13$ (рыс. 154).



Рыс. 154

Рашэнне. *Спосаб* 1. З формулы $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ вынікае, што $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Знойдзем $\sin A$. Для гэтага ў трохвугольніку ABC правядзём вышыню BK, якая будзе і медыянай, адкуль $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. З $\triangle ABK$ па тэарэме Піфагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, адкуль $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{12}{13}$.

Тады $2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{13}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{12}$, $R = \frac{169}{2 \cdot 12} = 7\frac{1}{24}$.

Спосаб 2. Выкарыстаем формулу $S = \frac{abc}{4R}$, з якой $R = \frac{abc}{4S}$. Паколькі $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, то $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$.

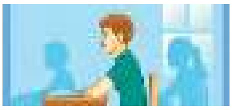
Адказ: $7\frac{1}{24}$.

*Заўвага**. Напомнім, што ў главе II мы знайшлі радыус R апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка, правёўшы пасярэднія перпендыкуляры да яго старон і выкарыстаўшы падобнасць атрыманых прамавугольных трохвугольнікаў. Таксама мы маглі карыстацца формулай $R = \frac{b^2}{2h_a}$, дзе b — бакавая старана, h_a — вышыня, праведзеная да асновы a. Замяніўшы S у формуле $R = \frac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, атрымаем $R = \frac{ab}{2h_c}$ — формулу радыуса апісанай акружнасці для адвольнага трохвугольніка. Такім чынам, мы маем чатыры формулы для знаходжання радыуса R апісанай акружнасці трохвугольніка:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = 2R,} \quad \boxed{R = \frac{abc}{4S},} \quad \boxed{R = \frac{ab}{2h_c},} \quad \boxed{R = \frac{b^2}{2h_a}.}$$

Адвольны трохвугольнік

Раўнабедраны трохвугольнік

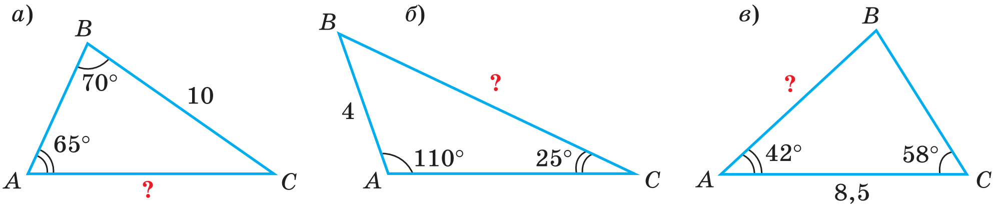


РАШАЕМ САМАСТОЙНА*

173. Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу, у якой α і β — вуглы, a і b — адпаведныя гэтым вуглам стораны трохвугольніка. Для знаходжання невядомых значэнняў карыстайцеся прапорцыяй $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

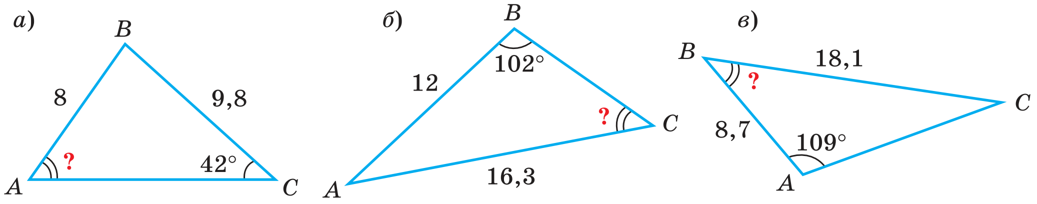
a	4		$\sqrt{6}$
b		6	2
α	30°	45°	120°
β	45°	60°	

174. Па даных на рысунках 155, *а*)—*в*) вылічыце даўжыню стараны трохвугольніка, абазначанай пытальнікам. Пры разліках карыстайцеся калькулятарам (табліцамі), вынік акругліце да 0,1.



Рыс. 155

175. Па даных на рысунках 156, *а*)—*в*) вылічыце пры дапамозе калькулятара (табліц) вугал трохвугольніка, абазначаны пытальнікам. Адказ акругліце да 1°.



Рыс. 156

176. Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка *ABC*. Пры дапамозе тэарэмы сінусаў знайдзіце даўжыню стараны b (акругліўшы адказ да 0,1), калі:

а) $a = 4$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$; б) $a = 6{,}5$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$.

177. Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка *ABC*. Знайдзіце велічыню вугла *B* трохвугольніка *ABC* (акругліўшы адказ да 1°), калі:

а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62°$; б) $AB = 4{,}6$, $AC = 4{,}3$, $\angle C = 26°$.

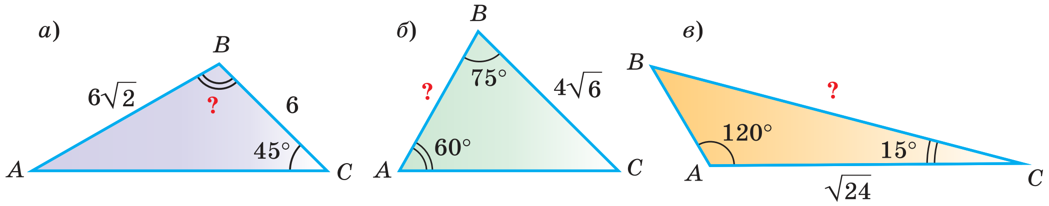
---

* Да кожнага параграфа ёсць рэзерв задач, змешчаны ў дапаможніку «Наглядная геаметрыя. 9 клас» В. У. Казакова.

178. У трохвугольніку ABC вядома: $\sin A = 0{,}8$, $\sin B = 0{,}6$, $AC + BC = 28$ см. Знайдзіце даўжыні старон AC і BC.

179. Па даных на рысунках 157, *а*)—*в*) вылічыце:

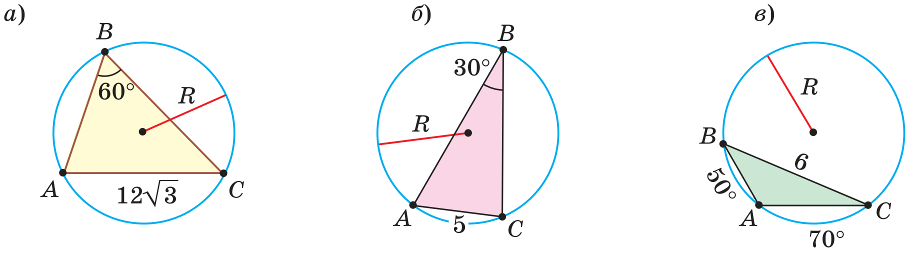
а) $\angle B$; б) AB; в) BC.



Рыс. 157

180. У паралелаграме $ABCD$ $\angle A$ востры, $\sin\angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі $AB = 6$ см.

181. Па даных на рысунках 158, *а*)—*в*) знайдзіце радыус R акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.

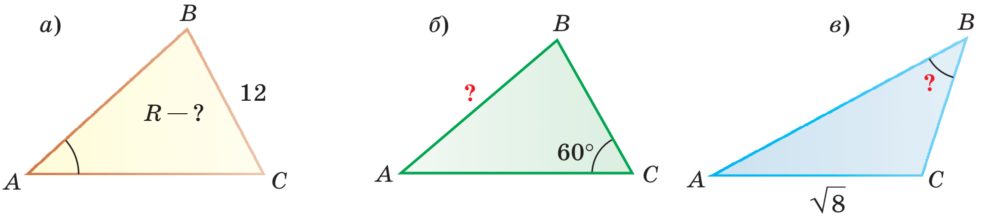


Рыс. 158

182. а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC (рыс. 159, *а*), калі $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.

б) Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC (рыс. 159, *б*), калі $\angle C = 60°$, а радыус яго апісанай акружнасці $R = 2\sqrt{3}$ см.

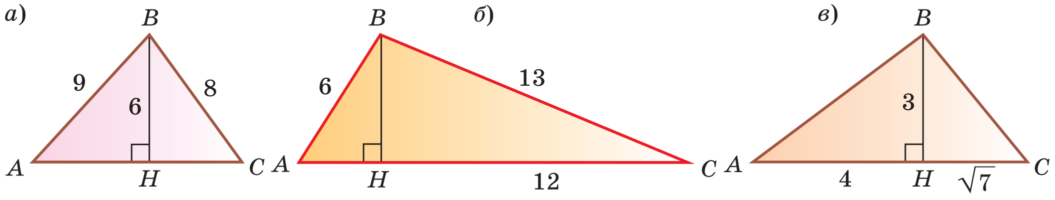
в) Знайдзіце велічыню вострага вугла B трохвугольніка ABC (рыс. 159, *в*), калі $AC = \sqrt{8}$ см, а радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC, роўны 2 см.



Рыс. 159

183. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O і дыяметрам, роўным $16\sqrt{2}$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC, калі $\angle BOC = 160°$ і $\angle ABC - \angle ACB = 10°$.

184. Па даных на рысунках 160, *а*)—*в*) вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.



Рыс. 160

185. а) У трохвугольніку ABC $\angle B = 45°$, $\angle C = 105°$, $BC = 6$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

б) Трохвугольнік ABC раўнабедраны, аснова $AC = 8$ см, вугал пры аснове роўны $15°$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

в) Дакажыце, што калі адзін з вуглоў трохвугольніка роўны $30°$ або $150°$, то даўжыня стараны трохвугольніка, процілеглай гэтаму вуглу, роўна радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

186. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка са старанамі:

а) 10 см, 10 см, 12 см;

б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.

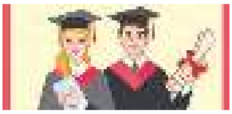
187. У трохвугольніку дадзена старана a і вуглы β, γ. Выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, знайдзіце стораны b і c.

188. Выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля роўнастаронняга трохвугольніка са старaной a.

189. У прамавугольніку $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, M — сярэдзіна стараны AD. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ACM.

190. а) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC, дыяганаль $AC = 8\sqrt{3}$ см. Прамень AC з'яўляецца бісектрысай вугла BAD, $\angle ACB = 30°$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.

б) Асновы BC і AD упісанай трапецыі $ABCD$ роўны 11 см і 21 см адпаведна, бакавая старана AB роўна 13 см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

191*. а) Пункт M ляжыць на аснове AC раўнабедранага трохвугольніка ABC. Дакажыце, што радыусы апісаных акружнасцей трохвугольнікаў ABM і CBM роўныя паміж сабой і не залежаць ад становішча пункта M.
б) Дадзены трохвугольнік ABC. На яго старане AC узяты пункт M. Дакажыце, што адносіна радыусаў акружнасцей, апісаных каля трохвугольнікаў ABM і CBM, не залежыць ад становішча пункта M.

192*. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC, калі:

а) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$, $C(4;\ 0)$;
б) $A(-2;\ 0)$, $B(6;\ 6)$, $C(6;\ -4)$.

193*. Дакажыце, што радыус акружнасці, якая праходзіць праз артацэнтр трохвугольніка і дзве любыя яго вяршыні, роўны радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

194*. Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC, дзе $AB < BC$; BM — медыяна, BK — бісектрыса трохвугольніка. Дакажыце, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, што $AK < AM$.

195*. Дакажыце, што радыус апісанай акружнасці трохвугольніка большы або роўны палавіне любой стараны трохвугольніка.

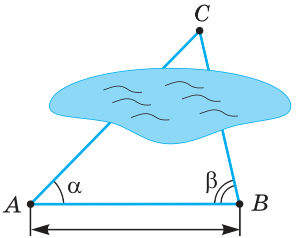
Мадэляванне

Заданне 1.

1) Складзіце алгарытм знаходжання пры дапамозе тэарэмы сінусаў адлегласці ад пункта A да недаступнага пункта C (рыс. 161), калі вядома, што $AB = c$, $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$.

2) Выразіце $AC = b$ праз c, α і β.

3) Знайдзіце AC пры ўмове, што $AB = 30$ м, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$. Адказ акругліце да 1 м.

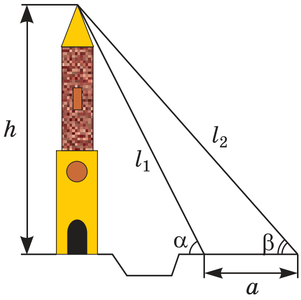


Рыс. 161

Заданне 2.

1) Гледзячы на рысунак 162, складзіце матэматычную мадэль знаходжання вышыні h вежы, даўжынь l_1 і l_2 тросаў, якія ідуць ад вяршыні вежы да зямлі. Адлегласць ад назіральніка да вежы вымераць рулеткай нельга, паколькі вежу акружае роў, але можна вымераць вуглы α і β і адлегласць a.

2) Знайдзіце вышыню вежы і даўжыні тросаў пры ўмове, што $a = 4$ м, $\alpha = 63°$, $\beta = 48°$. Адказ акругліце да 1 м.



Рыс. 162

Рыс. 163

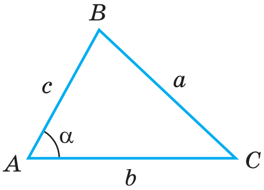
Цікава ведаць. Прыборы для вымярэння вуглоў на мясцовасці называюцца *вугламерамі*. Яны бываюць лазернымі і электроннымі. Інжынеры-будаўнікі карыстаюцца *тахеометрамі* (рыс. 163).

На рысунку 164 паказаны адзін з сімвалаў Беларусі — Камянецкая вежа, размешчаная ў Брэсцкай вобласці (г. Камянец). Гэта найбольш добра захаваная абаронная вежа, пабудаваная ў 1276—1288 гадах па загадзе князя Уладзіміра Васількавіча. Яе вышыня складае 31 м. Вежа з'яўляецца помнікам раманскага стылю з элементамі ранняй готыкі.

Рыс. 164

§ 13. Тэарэма косінусаў

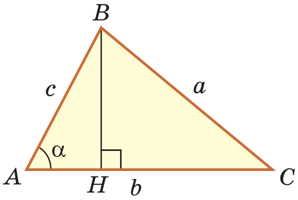
Тэарэма косінусаў дазваляе выразіць даўжыню любой стараны трохвугольніка праз даўжыні дзвюх іншых яго старон і косінус вугла паміж імі (напрыклад, даўжыню стараны a трохвугольніка ABC (рыс. 165) праз даўжыні старон b і c і $\cos\alpha$). Тэарэму косінусаў можна назваць самай «працуючай» у геаметрыі. Яна мае шматлікія вынікі, якія часта выкарыстоўваюцца пры рашэнні задач.



Рыс. 165

Тэарэма косінусаў. **Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены забытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі, г. зн.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



Рыс. 166

Доказ.

Дакажам тэарэму для выпадку, калі ў трохвугольніку ABC вугал A і вугал C вострыя (рыс. 166).

Правядзём вышыню BH да стараны AC. З $\triangle ABH$ знаходзім $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, адкуль $HC = b - c\cos\alpha$.

З $\triangle BHC$ па тэарэме Піфагора

$a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 =$

$= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.

Па асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Тады $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Справядлівасць тэарэмы для выпадкаў, калі $\angle A$ або $\angle C$ тупы або прамы, дакажыце самастойна. Тэарэма даказана.

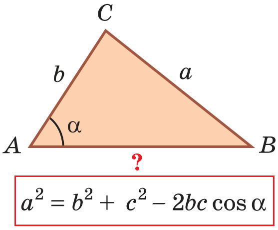
Для старон b і c тэарэма косінусаў запісацца так:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Заўвага. Калі $\gamma = 90°$, то па тэарэме Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$. Паколькі $\cos 90° = 0$, то $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90°$. Такім чынам, тэарэма Піфагора — прыватны выпадак тэарэмы косінусаў.

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў можна рашыць наступныя задачы:

- ведаючы дзве стараны і вугал паміж імі, знайсці трэцюю старану трохвугольніка;
- ведаючы дзве стараны і вугал, процілеглы адной з гэтых старон, знайсці трэцюю старану (рыс. 167) (у гэтым выпадку магчымы два рашэнні).



Рыс. 167

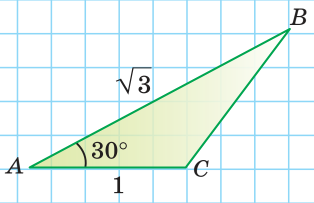
А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў знайдзіце BC:

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = ...$

2) $BC = ...$



Разгледзім вынікі з тэарэмы косінусаў, якія даюць магчымасць рашыць яшчэ шэраг задач.

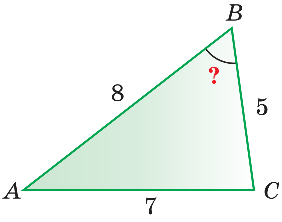
Вынік 1.

Тэарэма косінусаў дазваляе, ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайсці яго вуглы (косінусы вуглоў). З роўнасці $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ *вынікае формула*

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.}$$

Для вуглоў β і γ атрымаем:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Рыс. 168

Прыклад 1. У трохвугольніку ABC стораны $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Знойдзем $\angle B$ (рыс. 168).

Па тэарэме косінусаў

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$,

$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos B$,

$49 = 64 + 25 - 80\cos B$, $\cos B = \frac{1}{2}$, $\angle B = 60°$.

Выкарыстаўшы запісаную вышэй формулу, можна адразу атрымаць: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$.

Вынік 2.

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў можна па трох старанах вызначыць від трохвугольніка: *востравугольны*, *прамавугольны* або *тупавугольны*.

Так, з формулы $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ з улікам таго, што $2bc > 0$, вынікае:

1) калі $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos\alpha > 0$ і вугал α востры;
2) калі $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos\alpha < 0$ і вугал α тупы;
3) калі $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos\alpha = 0$ і вугал α прамы.

Пры вызначэнні віду трохвугольніка дастаткова знайсці знак косінуса вугла, які ляжыць супраць большай стараны, паколькі толькі большы вугал трохвугольніка можа быць прамым або тупым.

Прыклад 2. Высветлім, якім з'яўляецца трохвугольнік са старанамі $a = 2$, $b = 3$ і $c = 4$. Для гэтага знойдзем знак косінуса вугла γ, які ляжыць супраць большай стараны c. Паколькі $a^2 + b^2 - c^2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = 4 + 9 - 16 < 0$, то $\cos\gamma < 0$, вугал γ тупы і дадзены трохвугольнік тупавугольны.

Сфармулюем правіла вызначэння віду трохвугольніка (адносна вуглоў). *Трохвугольнік з'яўляецца*:

1) *востравугольным, калі квадрат яго большай стараны меншы за суму квадратаў дзвюх іншых яго старон*: $a^2 < b^2 + c^2$;

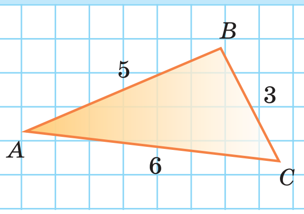
2) *тупавугольным, калі квадрат яго большай стараны большы за суму квадратаў дзвюх іншых яго старон*: $a^2 > b^2 + c^2$;

3) *прамавугольным, калі квадрат яго большай стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон*: $a^2 = b^2 + c^2$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

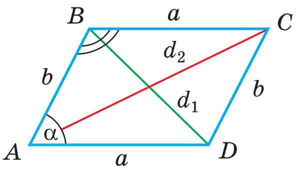
Тэст 2

Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік ABC:
а) востравугольным;
б) тупавугольным;
в) прамавугольным.



Вынік 3.

Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў усіх яго старон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



$$\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2}$$

Рыс. 169

Доказ. Няхай у паралелаграме $ABCD$ $AD = a$, $AB = b$, $BD = d_1, AC = d_2$ і $\angle A = \alpha$ — востры, адкуль $\angle B = 180° - \alpha$ — тупы (рыс. 169). Па тэарэме косінусаў з $\triangle ABD$:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

З $\triangle ABC$: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$. Паколькі $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

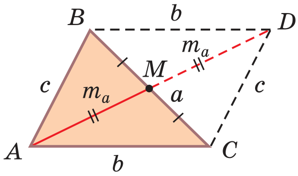
Склаўшы пачленна роўнасць (1) і роўнасць (2), атрымаем $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, што і трэба было даказаць.

Дадзеная формула дае магчымасць:

- ведаючы дзве суседнія стараны і адну з дыяганалей паралелаграма, знайсці другую дыяганаль;
- ведаючы дзве дыяганалі і адну са старон паралелаграма, знайсці суседнюю з ёй старану.

Вынік 4*.

Медыяну m_a трохвугольніка са старанамі a, b і c можна знайсці па формуле $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



$$\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$

Рыс. 170

Доказ. Разгледзім $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = m_a$ — медыяна трохвугольніка (рыс. 170). Прадоўжым медыяну AM за пункт M на яе даўжыню: $MD = AM = m_a$. Правядзём адрэзкі BD і DC. Паколькі ў чатырохвугольніку $ABDC$ дыяганалі AD і BC пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то ён — паралелаграм. Па ўласцівасці дыяганалей паралелаграма $AD^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$, $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Адсюль вынікае, што $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Сцверджанне даказана.

Аналагічна: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

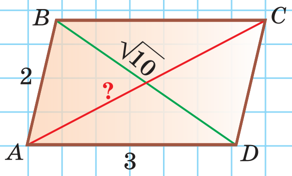
Формула медыяны дазваляе:

- ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайсці любую з яго медыян;
- ведаючы дзве стараны і медыяну, праведзеную да трэцяй стараны, знайсці трэцюю старану;
- ведаючы тры медыяны, знайсці любую са старон трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3** і **Тэст 4***.

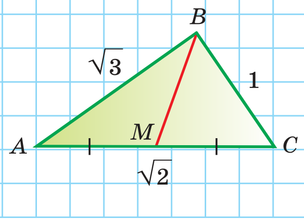
Тэст 3

Знайдзіце дыяганаль AC паралелаграма, ведаючы, што $BD = \sqrt{10}$.



Тэст 4*

Знайдзіце медыяну BM трохвугольніка ABC па формуле медыяны.



Заданні да § 13

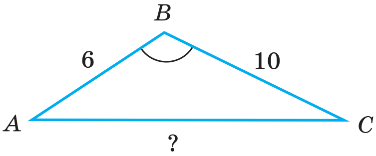
РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. а) *Дадзены трохвугольнік ABC,* $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 120°$. *Знайсці старану c.*
б) *Дадзены трохвугольнік ABC,* $a = 7$, $c = 8$, $\alpha = 60°$. *Знайсці старану b.*

Рашэнне. а) Па тэарэме косінусаў $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma =$ $= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 25 + 9 - 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Адсюль $c = \sqrt{49} = 7$.

б) Няхай $b = x$. Па тэарэме косінусаў $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$, г. зн. $7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60°$, $49 = 64 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Адсюль $b = 3$ або $b = 5$, паколькі для набораў даўжынь адрэзкаў 7, 3, 8 і 7, 5, 8 выконваецца няроўнасць трохвугольніка.
Адказ: а) 7; б) 3 або 5.

Задача 2. *Дзве стараны трохвугольніка роўны 6 і 10, яго плошча —* $15\sqrt{3}$. *Знайсці трэцюю старану трохвугольніка пры ўмове, што процілеглы ёй вугал — тупы.*



Рыс. 171

Рашэнне. Няхай у $\triangle ABC$ стораны $AB = 6$, $BC = 10$ і $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$ (рыс. 171).

Паколькі $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B$,

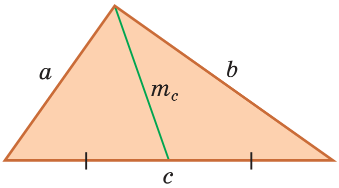
то $15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin B$, адкуль $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Паколькі $\sin 60° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і па ўмове $\angle B$ —

тупы, то $\angle B = 120°$, $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$. Для знаходжання стараны AC прыменім тэарэму косінусаў: $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos B$, $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, $AC = 14$.

Адказ: 14.

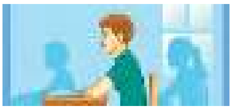
Задача 3*. *Знайсці плошчу трохвугольніка, дзве стараны якога роўны 6 і 8, а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 5.*



Рыс. 172

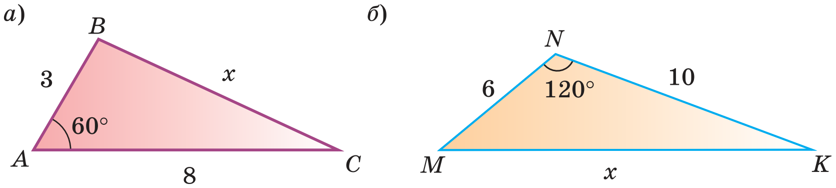
Рашэнне. Абазначым стораны трохвугольніка a, b, c. Няхай $a = 6$, $b = 8$, $m_c = 5$ — медыяна (рыс. 172). Па формуле медыяны $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, адкуль $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, $4 \cdot 25 = 72 + 128 - c^2$, $c^2 = 100$, $c = 10$. Па адваротнай тэарэме Піфагора дадзены трохвугольнік са старанамі 6, 8 і 10 — прамавугольны, яго плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S_\triangle = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Адказ: 24.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

196. Выкарыстаўшы тэарэму косінусаў, знайдзіце старану x (рыс. 173, *а*, *б*).



Рыс. 173

197. Выкарыстаўшы калькулятар (табліцы), знайдзіце старану c трохвугольніка (вынік акругліце да 0,1 см), калі:

а) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 50°$;
б) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\gamma = 132°$.

198. У трохвугольніку MNK стораны $MK = 4$ см, $NK = 6$ см, $\cos K = \frac{2}{3}$. Знайдзіце даўжыню стараны MN.

199. У востравугольным трохвугольніку ABC стораны $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\sin C = 0,6$. Знайдзіце даўжыню стараны AB.

200. а) Старана роўнастаронняга трохвугольніка ABC роўна 10 см. На старане BC узяты пункт M так, што $BM : MC = 2 : 3$. Знайдзіце даўжыню адрэзка AM.

б) На гіпатэнузе AB прамавугольнага трохвугольніка ABC узяты пункт M так, што $AM : MB = 2 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка CM, калі $AB = 9$ см, $BC = 6$ см.

201. Дыяганалі паралелаграма роўны 8 см і 14 см, косінус вострага вугла паміж імі роўны $\frac{2}{7}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

202. У трохвугольніку ABC праведзены медыяны $AM = 9$ см і $BK = 6$ см, якія перасякаюцца ў пункце E, $\angle MEK = 120°$. Знайдзіце старану AB трохвугольніка ABC.

203. а) У трохвугольніку ABC старана $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30°$, $BC - AB = 4$ см. Вылічыце даўжыні старон AB і BC.

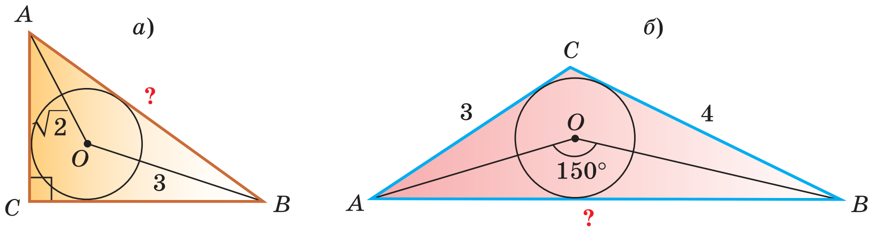
б) У трохвугольніку ABC старана $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60°$, $AB : AC = 1 : 2$. Вылічыце даўжыні старон AB і AC.

204. У трохвугольніку ABC стораны $AB = 5$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$. Знайдзіце найменшае магчымае значэнне даўжыні стараны AC.

205. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам O. Знайдзіце даўжыню стараны AB, калі:

а) $\angle C = 90°$, $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$ (рыс. 174, *а*);

б) $\angle AOB = 150°$, $AC = 3$, $BC = 4$ (рыс. 174, *б*).



Рыс. 174

206. а) У трохвугольніку ABC стораны $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $AC = 3$ см. Знайдзіце градусную меру вугла A.

б) У трохвугольніку ABC стораны $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Знайдзіце градусную меру вугла B.

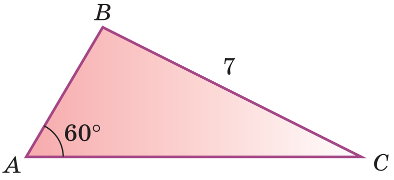
207. а) Знайдзіце косінус меншага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 2 см, 3 см і 4 см.

б) Знайдзіце косінус большага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 5 см, 6 см, 7 см.

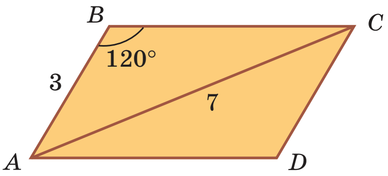
208. Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік (востравугольным, прамавугольным або тупавугольным), калі яго стораны роўны:

а) 10, 8 і 7; б) 20, 21 і 29; в) 5, 6 і 8.

209. а) Перыметр трохвугольніка ABC роўны 18. Вылічыце яго плошчу па даных рысунка 175.
б) Вугал ABC паралелаграма $ABCD$ роўны 120°. Вылічыце перыметр паралелаграма па даных рысунка 176.



Рыс. 175



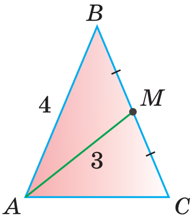
Рыс. 176

210. а) У паралелаграме $ABCD$ стораны AB = 3 см, AD = 4 см, дыяганаль AC = 6 см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі BD.

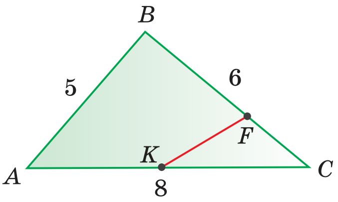
б) У паралелаграме $ABCD$ старана $AB = 2\sqrt{6}$ см, дыяганалі AC = 4 см, BD = 8 см. Знайдзіце даўжыню стараны AD.

211. а) У паралелаграме стораны роўны 7 см і 9 см, а дыяганалі адносяцца як 4 : 7. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.
б) У паралелаграме адна з дыяганалей на 2 см большая за другую, а стораны роўны 11 см і 13 см. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.

212. а) У раўнабедраным трохвугольніку ABC стораны $AB = BC$ = 4 см, AM = 3 см — медыяна (рыс. 177). Знайдзіце аснову AC трохвугольніка.
б) У трохвугольніку ABC стораны AB = 5 см, BC = 6 см, AC = 8 см. На старанах BC і AC узяты пункты F і K адпаведна, такія, што $BF = 2FC$, $AK = KC$ (рыс. 178). Знайдзіце даўжыню адрэзка KF.



Рыс. 177



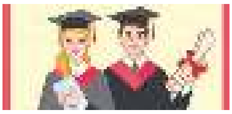
Рыс. 178

213. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC, датыкаецца да стараны AC у пункце K. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі AK = 5 см, KC = 10 см, $\angle A$ = 60°.

214. Знайдзіце даўжыню медыяны трохвугольніка са старанамі 7 см, 11 см, 12 см, праведзеную з вяршыні большага вугла трохвугольніка.

215. а) У трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дыяганалі $AC = 6$ см, $BD = 9$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей, $\cos\angle COD = \frac{1}{4}$. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

б) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ ($AD \parallel BC$), дыяганаль AC роўна 9 см, $AD - CD = 3$ см, $\cos\angle CAD = \frac{5}{6}$. Знайдзіце перыметр трапецыі.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

216*. Дзве стараны трохвугольніка роўны 8 см і 14 см, а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 7 см. Знайдзіце трэцюю старану трохвугольніка.

217*. Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 3$. Знайдзіце дыяганаль BD.

218*. У выпуклым чатырохвугольніку адрэзкі, якія злучаюць сярэдзіны процілеглых старон, роўны 2 і 3, а вугал паміж імі роўны 60°. Знайдзіце дыяганалі чатырохвугольніка.

219*. У трохвугольніку ABC $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што з павелічэннем вугла A старана a павялічваецца.

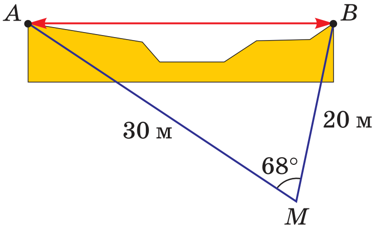
220*. Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік з вышынямі, роўнымі 3, 4 і 5: востравугольным, прамавугольным або тупавугольным.

221*. Дакажыце, што плошчу паралелаграма (які не з'яўляецца прамавугольнікам) можна вылічыць па формуле $S = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$, дзе d_1, d_2 — дыяганалі ($d_2 > d_1$), α — востры вугал паралелаграма.

Рэальная геаметрыя

Заданне 1. Растлумачце, як можна знайсці адлегласць паміж пунктамі A і B (рыс. 179), калі вядомы адлегласці ад пункта M, дзе знаходзіццаназіральнік, да пунктаў A і B і вугал AMB. Знайдзіце гэту адлегласць пры ўмове, што $MA = 30$ м, $MB = 20$ м, $\angle AMB = 68°$. Адказ акругліце да метраў.

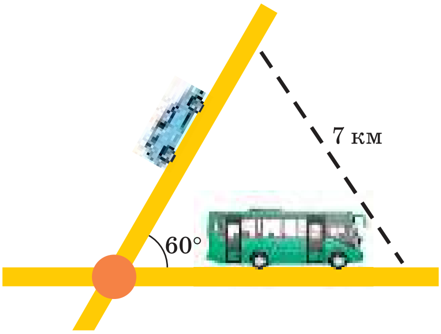
(Для самакантролю. Адказ: шуканы лік у метрах роўны колькасці дзён у лютым высакоснага года.)



Рыс. 179

Заданне 2. З аднаго населенага пункта выходзяць дзве дарогі, вугал паміж якімі 60° (рыс. 180). Адначасова па адной дарозе выязджае аўтамабіль са скорасцю 80 км/г, па другой — аўтобус са скорасцю 50 км/г. Вызначце ў мінутах, праз які час адлегласць паміж аўтобусам і аўтамабілем стане роўнай 7 км.

(Для самакантролю. Адказ: шуканы лік роўны n, дзе 1) — Меркурый; 2) — Венера; 3) — Зямля; ...; n) — Сатурн.)



Рыс. 180

Заданне 3. Вызначце вугал абстрэлу футбольных варот з 11-метровай адзнакі (рыс. 181). Для гэтага можна знайсці ў Інтэрнэце памеры футбольных варот і выканаць разлікі. А можна выйсці на школьнае футбольнае поле, вымераць крокамі адлегласць ад 11-метровай адзнакі да адной са стоек варот, напрыклад адлегласць AB (адлегласць AC будзе такой самай), і шырыню варот, г. зн. даўжыню BC. Затым пры дапамозе тэарэмы косінусаў трэба знайсці $\angle BAC = \alpha$. Выкарыстайце абодва спосабы і параўнайце вынікі.

(Для самакантролю. Адказ: шуканая колькасць градусаў роўна колькасці гадоў, пражытых А. С. Пушкіным.)

Рыс. 181

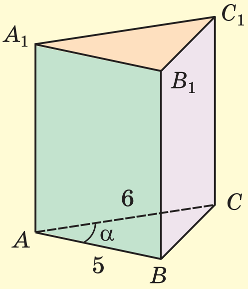
Геаметрыя 3D

Заданне. Дадзена прамая трохвугольная прызма (бакавыя грані — прамавугольнікі), у аснове якой ляжыць трохвугольнік са старанамі 5 см і 6 см. Косінус вугла α паміж імі роўны 0,6 (рыс. 182). Большая па плошчы бакавая грань прызмы з'яўляецца квадратам.

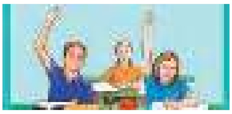
Знайдзіце:

а) плошчу бакавой паверхні прызмы;

б) плошчу поўнай паверхні прызмы.



Рыс. 182



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму сінусаў.
2. Асноўныя задачы, якія дазваляе рашыць тэарэма сінусаў.
3. Тэарэму косінусаў.
4. Алгарытм знаходжання косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Формулу, якая звязвае стораны і дыяганалі паралелаграма.
6. Як па трох старанах трохвугольніка вызначыць яго від: востравугольны, прамавугольны, тупавугольны.
7*. Формулу медыяны трохвугольніка.

Умеем

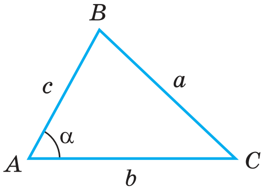
1. Даказваць тэарэму сінусаў.
2. Па дзвюх старанах і вугле, процілеглым адной з гэтых старон, знаходзіць вугал, процілеглы другой старане.
3. Па двух вуглах і старане, процілеглай аднаму з вуглоў, знаходзіць старану, процілеглую другому вуглу.
4. Па старане трохвугольніка і процілеглым ёй вугле знаходзіць радыус апісанай акружнасці.
5. Даказваць тэарэму косінусаў.
6. Знаходзіць косінус вугла трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.
7. Знаходзіць дыяганаль паралелаграма, ведаючы дзве яго суседнія стараны і другую дыяганаль.
8*. Знаходзіць медыяну трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.

§ 14. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў

1. Формула Герона

Мы ведаем, як знайсці плошчу трохвугольніка па аснове і вышыні, праведзенай да гэтай асновы: $S = \frac{1}{2}ah$, а таксама па дзвюх старанах і вугле паміж імі: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Цяпер мы выведзем формулу знаходжання плошчы трохвугольніка па трох старанах.

Тэарэма (формула Герона).
Плошчу трохвугольніка са старанамі a, b і c можна знайсці па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе $p = \frac{a+b+c}{2}$ — паўперыметр трохвугольніка.



Рыс. 183

Доказ. $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рыс. 183). З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ вынікае, што $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Для $0°<\alpha<180°$ сінус дадатны. Таму $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. З тэарэмы косінусаў $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, адкуль $\cos^2\alpha=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$.

Тады $$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}=\frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=$$

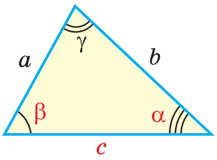
$$=bc\cdot\frac{1}{bc}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2}}=\sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}.$$

Паколькі $\frac{b+c-a}{2}=\frac{b+c+a-2a}{2}=p-a$, $\frac{a-b+c}{2}=\frac{a+c+b-2b}{2}=p-b$, $\frac{a+b-c}{2}=$ $=\frac{a+b+c-2c}{2}=p-c$, то $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Тэарэма даказана.

2. Рашэнне трохвугольнікаў

Рашэннем трохвугольніка называецца знаходжанне яго невядомых старон і вуглоў (часам іншых элементаў) па даных, якія вызначаюць трохвугольнік. Такая задача часта сустракаецца на практыцы, напрыклад у геадэзіі, астраноміі, будаўніцтве, навігацыі.

Разгледзім *алгарытмы* рашэння трох задач.



Рыс. 184

Задача *A* (рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вугле паміж імі).

Дадзена: a, b, γ (рыс. 184).

Знайсці: c, α, β.

Рашэнне.

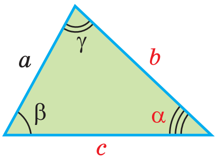
1) Па тэарэме косінусаў $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

2) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

3) Вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

4) Вугал $\gamma=180°-\alpha-\beta$.

Заўвага. Знаходжанне вугла α па тэарэме сінусаў $\left(\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma},\ \sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\gamma}{c}\right)$ патрабуе высвятлення таго, востры ці тупы вугал α.



Рыс. 185

Задача *B* (рашэнне трохвугольніка па старане і двух прылеглых да яе вуглах).

Дадзена: a, β, γ (рыс. 185).

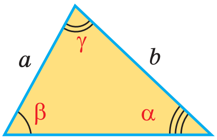
Знайсці: α, b, c.

Рашэнне.

1) Вугал $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

2) Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ ($\sin\alpha$ і $\sin\beta$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

3) Старану c можна знайсці пры дапамозе тэарэмы косінусаў або тэарэмы сінусаў: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ або $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ ($\cos\gamma$ і $\sin\gamma$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).



Рыс. 186

Задача *C* (рашэнне трохвугольніка па трох старанах).

Дадзена: a, b, c (рыс. 186).

Знайсці: α, β, γ і радыус R апісанай акружнасці.

Рашэнне:

1) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2) Ведаючы $\cos\alpha$, вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

3) Аналагічна знаходзім вугал β.

4) Вугал $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

5) Радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка можна знайсці па формуле $R = \frac{abc}{4S}$, дзе $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

*Заўвага**. Другім спосабам знаходжання R будзе знаходжанне косінуса любога вугла пры дапамозе тэарэмы косінусаў $\left(\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$, затым знаходжанне па косінусе вугла яго сінуса $\left(\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\right)$ і, нарэшце, выкарыстанне тэарэмы сінусаў $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = 2R\right)$ для знаходжання R.

Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

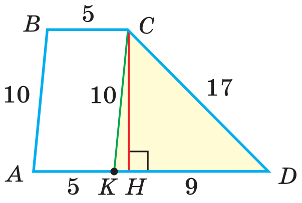
Задача 1. *Знайсці плошчу S і радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі* 9, 12 *і* 15.

Рашэнне. *Спосаб* 1. Выкарыстаем формулу Герона. Абазначым $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Атрымаем: $p = \frac{9 + 12 + 15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тады $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$ $= \sqrt{18\cdot 9\cdot 6\cdot 3} = \sqrt{2\cdot 9\cdot 9\cdot 6\cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радыус R апісанай акружнасці знойдзем з формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Маем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9\cdot 12\cdot 15}{4\cdot 54} = 7{,}5$.
Адказ: $S = 54$; $R = 7{,}5$.

Спосаб 2. Паколькі $9^2 + 12^2 = 15^2$, г. зн. $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то трохвугольнік — прамавугольны па адваротнай тэарэме Піфагора. Яго плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S = \frac{9\cdot 12}{2} = 54$, а радыус апісанай акружнасці роўны палавіне гіпатэнузы: $R = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

Задача 2. *Знайсці плошчу трапецыі з асновамі, роўнымі* 5 *і* 14, *і бакавымі старанамі, роўнымі* 10 *і* 17.



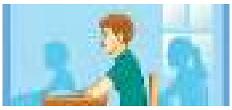
Рыс. 187

Рашэнне. Няхай у трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 14$ і $BC = 5$, бакавыя стораны $AB = 10$ і $CD = 17$. Правядзём $CK \parallel AB$ (рыс. 187). Паколькі $ABCK$ — паралелаграм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, адкуль $KD = AD - AK = 9$. Знойдзем вышыню CH трохвугольніка KCD, якая роўна вышыні трапецыі. Плошчу трохвугольніка KCD знойдзем па формуле Герона, абазначыўшы яго стораны $a = 10$, $b = 17$, $c = 9$. Атрымаем:

$$p = \frac{10+17+9}{2} = 18,\ p - a = 18 - 10 = 8,$$

$$p - b = 18 - 17 = 1,\ p - c = 18 - 9 = 9,$$

$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36$. Паколькі $S_{KCD} = \frac{1}{2}KD \cdot CH$, то $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36$, $CH = 8$. Плошча трапецыі $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = \frac{14+5}{2} \cdot 8 = 76$.
Адказ: 76.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

222. Стораны трохвугольніка $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Знайдзіце:

а) паўперыметр трохвугольніка $p = \frac{a+b+c}{2}$;

б) значэнні выразаў $p - a$, $p - b$, $p - c$;

в) плошчу трохвугольніка па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}$.

223. Пры дапамозе формулы Герона знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:

а) 7 см, 15 см, 20 см; б) 10 м, 10 м, 4 м.

224. а) Знайдзіце плошчу паралелаграма, адна старана якога роўна 15 см, а дыяганалі — 8 см і 26 см.

б) Знайдзіце плошчу паралелаграма, дзве стараны якога роўны 9 см і 10 см, а адна з дыяганалей — 17 см.

225. а) Знайдзіце найбольшую вышыню трохвугольніка са старанамі 20 см, 13 см, 11 см.

б) Знайдзіце найменшую вышыню трохвугольніка са старанамі 40 см, 37 см, 13 см.

226. а) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 5 см і 15 см, а бакавыя стораны — 9 см і 17 см.

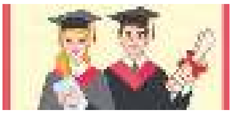
б) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 3 см і 12 см, а дыяганалі — 13 см і 14 см.

227. Знайдзіце плошчу трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі 15 см, 13 см і 4 см.

228. Рашыце трохвугольнік, у якога вядомы:

а) $a = 4$; $b = 5$; $\gamma = 30°$; б) $a = 1$; $b = 2$; $\gamma = 45°$;
в) $a = 8$; $\beta = 60°$; $\gamma = 50°$; г) $b = 10$; $\beta = 100°$; $\gamma = 32°$;
д) $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; е) $a = 50$; $b = 40$; $c = 20$.

229. Медыяны, праведзеныя да дзвюх старон трохвугольніка, роўны 12 см і 9 см, трэцяя старана трохвугольніка роўна 6 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

230*. а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 29 см, 25 см і 6 см.

б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі, роўнымі 20 см, 15 см, 7 см.

231*. Знайдзіце радыус акружнасці, якая датыкаецца да старон трохвугольніка, роўных 13 і 15, цэнтр якой ляжыць на трэцяй старане, роўнай 14.

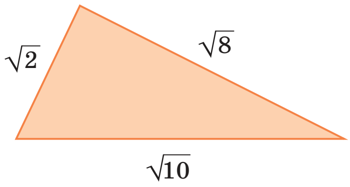
232*. Цэнтр O акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC, злучаны з яго вяршынямі адрэзкамі. Плошчы трохвугольнікаў, на якія разбіваецца трохвугольнік ABC, роўны 7 см^2, 15 см^2, 20 см^2. Знайдзіце стораны трохвугольніка.

Цікава ведаць. **Герон Александрыйскі** — адзін з выдатных інжынераў антычнага свету. Многія яго вынаходніцтвы да гэтага часу выклікаюць захапленне. Вось толькі некаторыя з іх: адометр — механізм для знаходжання адлегласцей на мясцовасці, аўтамат па продажу вады, устройства для аўтаматычнага адкрывання дзвярэй і інш.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым яшчэ знакаміты матэматык Герон. Якія трохвугольнікі называюцца *геронавымі трохвугольнікамі*? Устанавіце пры дапамозе Вікіпедыі, чаму гэтага вучонага звалі Геронам Александрыйскім і ці мог ён сустракацца з Піфагорам.

Гімнастыка розуму

Прыдумайце прыгожы спосаб знаходжання плошчы паказанага на рысунку 188 трохвугольніка.

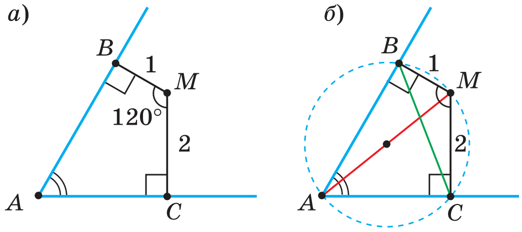


Рыс. 188

§ 15*. Крэатыўная геаметрыя

1. Прыклады рашэння задач з выкарыстаннем тэарэмы сінусаў і тэарэмы косінусаў

Задача 1. *Унутры вугла A, роўнага* 60°, *узяты пункт M, які знаходзіцца на адлегласці* 1 *ад адной стараны вугла і на адлегласці* 2 *ад другой стараны. Знайсці адлегласць ад пункта M да вяршыні вугла A* (*рыс.* 189, *а*).



Рыс. 189

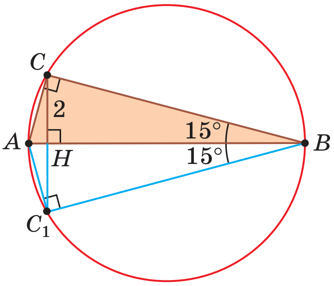
Рашэнне. Няхай $MB \perp AB$, $MC \perp AC$, $MB = 1$, $MC = 2$. Знойдзем даўжыню адрэзка AM. Сума вуглоў чатырохвугольніка $ABMC$ роўна 360°. Таму $\angle BMC = 120°$.

Паколькі ў чатырохвугольніку $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180°$, то каля яго можна апісаць акружнасць па прымеце ўпісанага чатырохвугольніка (рыс. 189, *б*). Паколькі прамы ўпісаны вугал абапіраецца на дыяметр, то адрэзак AM — дыяметр гэтай акружнасці, г. зн. $AM = 2R$, дзе R — радыус. З $\triangle BMC$ па тэарэме косінусаў $BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2 \cdot MB \cdot MC \cdot \cos 120° = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, $BC = \sqrt{7}$. З $\triangle ABC$ па тэарэме сінусаў $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, адкуль $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°} = AM$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Адказ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Заўвага. Другім спосабам рашэння будзе прадаўжэнне адрэзка BM да перасячэння з праменем AC і выкарыстанне ўласцівасцей атрыманых прамавугольных трохвугольнікаў. Разгледзьце гэты спосаб самастойна.

Задача 2. *У прамавугольным трохвугольніку ABC вядома: $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 15°$, вышыня $CH = 2$* (рыс. 190). *Знайсці гіпатэнузу AB.*

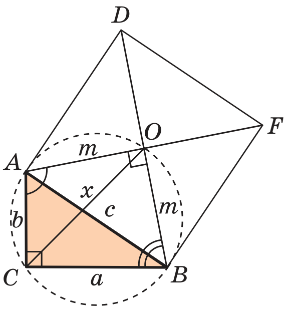


Рыс. 190

Рашэнне. Пабудуем $\triangle ABC_1$, сіметрычны $\triangle ABC$ адносна прамой AB (гл. рыс. 190). Паколькі $\angle ACB + \angle AC_1B = 180°$, то вакол чатырохвугольніка $ACBC_1$ можна апісаць акружнасць, дзе AB — дыяметр гэтай акружнасці (прамы ўпісаны вугал абапіраецца на дыяметр). Трохвугольнік C_1CB упісаны ў гэту акружнасць, $\angle CBC_1 = 30°$, $CC_1 = 4$. Па тэарэме сінусаў $\frac{CC_1}{\sin \angle CBC_1} = 2R$, $\frac{4}{\sin 30°} = AB$, адкуль $AB = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

Адказ: 8.

Задача 3. *Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $BC = a$ і $AC = b$. На гіпатэнузе AB як на старане пабудаваны квадрат $ADFB$* (рыс. 191). *Знайсці адлегласць ад цэнтра O гэтага квадрата да вяршыні C прамога вугла, г. зн. адрэзак CO.*



Рыс. 191

Рашэнне. *Спосаб* 1. Паколькі $\angle AOB = 90°$ (дыяганалі квадрата $ADFB$ узаемна перпендыкулярныя), то $\angle AOB + \angle ACB = 180°$, таму чатырохвугольнік $AOBC$ з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, яе дыяметр $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тады $AO = OB = m = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Няхай $CO = x$. Па тэарэме косінусаў

з $\triangle AOC$ знаходзім $\cos \angle OAC = \frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm}$,

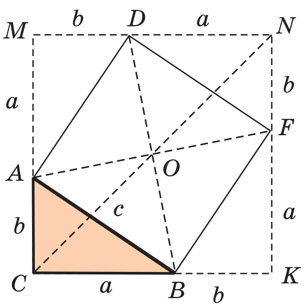
з $\triangle BOC$ знаходзім $\cos \angle OBC = \frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$.

Па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка $\angle OAC + \angle OBC = 180°$. Паколькі $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то $\frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm} = -\frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$, адкуль знаходзім $x^2 = ab + m^2 = ab + \frac{c^2}{2} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$. Тады $x = CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Спосаб 2. Выкарыстаем тэарэму Пталемея, якая гаворыць: **«Здабытак дыяганалей упісанага чатырохвугольніка роўны суме здабыткаў яго процілеглых старон»**. Для нашай задачы атрымліваем (гл. рыс. 191):

$$CO \cdot AB = CB \cdot AO + AC \cdot OB,$$

$$CO \cdot c = a \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{c}{\sqrt{2}}, \text{ адкуль } CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$



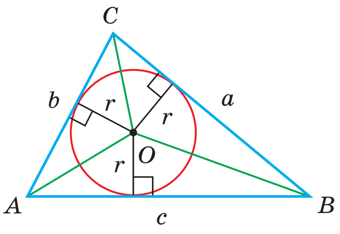
Рыс. 192

Спосаб 3. Дабудуем $\triangle ABC$ да квадрата $CMNK$, як паказана на рысунку 192. Можна паказаць, што цэнтр квадрата $CMNK$ супадзе з цэнтрам квадрата $ADFB$, г. зн. з пунктам O (пункты B і D сіметрычныя адносна цэнтраў абодвух квадратаў).

Тады $CN = (a + b)\sqrt{2}$, $CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Адказ: $CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Задача 4. *Пункт O — цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC,* $S_{AOB} = 7$ *см*^{2}, $S_{BOC} = 15$ *см*^{2}, $S_{AOC} = 20$ *см*^{2}. *Знайсці стораны трохвугольніка (гл. задачу* 232*).



Рыс. 193

Рашэнне. Няхай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ і r — радыус упісанай акружнасці (рыс. 193).

Тады $S_{BOC} = \frac{1}{2}ar$, $S_{AOB} = \frac{1}{2}cr$, $S_{AOC} = \frac{1}{2}br$.

Адсюль $a = \frac{2S_{BOC}}{r} = \frac{30}{r}$, $b = \frac{2S_{AOC}}{r} = \frac{40}{r}$, $c = \frac{2S_{AOB}}{r} = \frac{14}{r}$. Прыменім формулу Герона:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{r} + \frac{40}{r} + \frac{14}{r}\right) = \frac{42}{r}, \quad p - a = \frac{12}{r}, \quad p - b = \frac{2}{r},$$

$$p - c = \frac{28}{r}; \quad S_{ABC} = \sqrt{\frac{42}{r} \cdot \frac{12}{r} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{28}{r}} = \frac{168}{r^2}.$$

З другога боку, $S_{ABC} = 7 + 15 + 20 = 42$ (см^2). З ураўнення $\frac{168}{r^2} = 42$ знаходзім $r = 2$. Адкуль $a = \frac{30}{2} = 15$ (см), $b = \frac{40}{2} = 20$ (см), $c = \frac{14}{2} = 7$ (см).

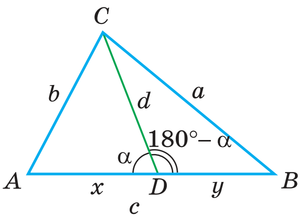
Адказ: 15 см; 20 см; 7 см.

2. Тэарэма Сцюарта

Наступная тэарэма дазваляе знайсці даўжыню адрэзка, які злучае вяршыню трохвугольніка з пунктам на процілеглай старане.

Тэарэма Сцюарта. «*Калі a, b i c — стораны трохвугольніка і адрэзак d дзеліць старану c на адрэзкі, роўныя x і y* (рыс. 194), *то справядлівая формула*

$$\boldsymbol{d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy}\text{».}$$



Рыс. 194

Доказ. Па тэарэме косінусаў з $\triangle ACD$ і $\triangle BCD$ (гл. рыс. 194) вынікае:

$$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$a^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos(180° - \alpha) = d^2 + y^2 + 2dy\cos\alpha. \qquad (2)$$

Памножым абедзве часткі роўнасці (1) на y, а роўнасці (2) — на x: $yb^2 = yd^2 + yx^2 - 2ydx\cos\alpha$, $xa^2 = xd^2 + xy^2 + 2xdy\cos\alpha$. Складзём пачленна атрыманыя роўнасці:

$xa^2 + yb^2 = d^2(x + y) + xy(x + y)$.

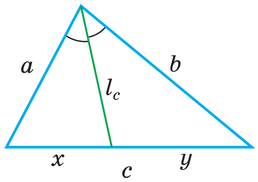
З апошняй роўнасці выразім d^2:

$d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$. Тэарэма даказана.

Вынік.

Бісектрысу трохвугольніка можна знайсці па формуле (рыс. 195)

$$\boldsymbol{l_c^2 = ab - xy}.$$



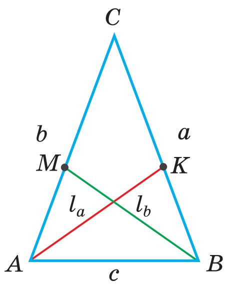
Рыс. 195

Доказ. Па ўласцівасці бісектрысы трохвугольніка $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Падзяліўшы старану c у адносіне $a : b$, атрымаем: $x = \frac{c}{a+b} \cdot a$, $y = \frac{c}{a+b} \cdot b$. Па тэарэме Сцюарта

$$l_c^2 = a^2 \cdot \frac{y}{c} + b^2 \cdot \frac{x}{c} - xy = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} - xy =$$

$$= \frac{ab}{a+b} \cdot (a+b) - xy = ab - xy.$$

Задача 5. *Даказаць, што калі ў трохвугольніку дзве бісектрысы роўныя, то трохвугольнік — раўнабедраны (тэарэма Штэйнера—Лемуса).*



Рыс. 196

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC, $AK = l_a$ і $BM = l_b$ — бісектрысы, праведзеныя да старон $BC = a$ і $AC = b$ адпаведна, і $l_a = l_b$ (рыс. 196). Трэба даказаць, што $a = b$. Выразім l_a і l_b праз a, b і c і прыраўняем атрыманыя выразы.

Бісектрыса дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам. Таму $\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, адкуль $CK = \frac{a}{b+c} \cdot b$, $BK = \frac{a}{b+c} \cdot c$;

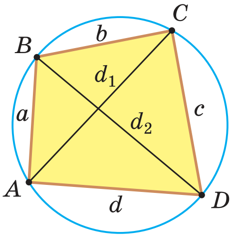
$\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$, адкуль $CM = \frac{b}{a+c} \cdot a$, $AM = \frac{b}{a+c} \cdot c$.

Па формуле бісектрысы трохвугольніка $l_a^2 = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$, $l_b^2 = ac - \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+c} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$.

З умовы $l_a = l_b$ вынікае: $ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Перанясём складаемыя ў адну частку роўнасці, раскладзём на множнікі (выканайце гэта самастойна) і атрымаем: $(a-b) \cdot \left(1 + ab \cdot \frac{a^2 + ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2}{(a+c)^2(b+c)^2}\right) = 0$. Адсюль $a - b = 0$, $a = b$ (другі множнік пры дадатных a, b і c большы за нуль). Сцверджанне даказана.

3. Тэарэма Пталемея аб упісаным чатырохвугольніку

Здабытак дыяганалей упісанага чатырохвугольніка роўны суме здабыткаў яго процілеглых старон, г. зн. $\mathbf{d_1d_2 = ac + bd}$ (рыс. 197).



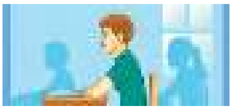
Рыс. 197

Доказ. З $\triangle ABC$ і $\triangle ADC$ па тэарэме косінусаў $\cos B = \frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2ab}$, $\cos D = \frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$.

Паколькі $\angle D = 180° - \angle B$ (па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка) і $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то $\frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2ab} = -\frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$, адкуль $d_1^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

Аналагічна з $\triangle ABD$ і $\triangle CBD$ атрымаем $d_2^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

Тады $d_1^2 \cdot d_2^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \cdot \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} = (ac + bd)^2$, $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$. Тэарэма даказана.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

233. Дакажыце, што калі m_a, m_b і m_c — медыяны трохвугольніка са старанамі a, b і c, то справядлівыя наступныя формулы:

а) $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$; б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

234. Двума спосабамі (алгебраічным і геаметрычным) знайдзіце плошчу трохвугольніка з медыянамі, роўнымі 3 см, 4 см і 5 см.

235. У трохвугольнік упісана акружнасць радыуса 2, якая пунктам дотыку дзеліць адну з яго старон на адрэзкі, роўныя 1 і 6. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

236. Выкарыстаўшы тэарэму Пталемея, рашыце задачу: «Каля роўнастаронняга трохвугольніка ABC апісана акружнасць, на дузе BC узяты пункт M. Дакажыце, што $AM = BM + CM$».

237. У трохвугольніку ABC праведзены адрэзак AK, дзе $K \in BC$. Выкарыстаўшы тэарэму Сцюарта, выразіце даўжыню адрэзка AK праз адрэзкі AB, AC, BK і CK. Вылічыце даўжыню адрэзка AK, калі $AB = 6$, $AC = 9$, $BK = 2$, $KC = 4$.

238. Пры дапамозе тэарэмы Сцюарта выведзіце формулу для медыяны m_a трохвугольніка са старанамі a, b і c: $m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

239. Медыяна трохвугольніка роўна m_a і ўтварае з суседнімі старанамі b і c вуглы β_1 і γ_1 адпаведна. Знайдзіце стораны b і c.

240. Вуглы трохвугольніка роўны α, β і γ. Знайдзіце старану a трохвугольніка, калі:

а) перыметр трохвугольніка роўны P;
б) плошча трохвугольніка роўна S.

241. а) Знайдзіце бісектрысу AK трохвугольніка ABC, калі $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$.
б) Знайдзіце бісектрысу раўнабедранага трохвугольніка з асновай 5 і бакавой стараной 20, праведзеную да бакавой стараны.

242. Стораны паралелаграма роўны a, b, дыяганалі — d_1 і d_2. Дакажыце, што $a^4 + b^4 = d_1^2 d_2^2$ тады і толькі тады, калі вугал паралелаграма роўны 45°.

243. а) Стораны трохвугольніка роўны a, b і c. Дакажыце, што медыяны m_a і m_b трохвугольніка перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі $a^2 + b^2 = 5c^2$.
б) Дакажыце, што медыяны m_a і m_b трохвугольніка перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі $m_c = \frac{3}{2}c$.

244. У паралелаграме $ABCD$ вядома: $AD = a$, $AB = b$, $\angle A = \alpha$.

а) Знайдзіце дыяганалі $BD = d_1$ і $AC = d_2$ паралелаграма ($d_1 < d_2$) і сінус вугла φ паміж дыяганалямі.
б) Рашыце задачу а) пры ўмове, што $a = 2$, $b = 1$, $\angle A = 60°$.

245. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце па дадзеных адрэзках a і b адрэзак x, калі:

а) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$;

б) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

ЗАПАМІНАЕМ

1. Тэарэма сінусаў. Стораны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу яго апісанай акружнасці: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

2. Радыус апісанай акружнасці трохвугольніка можна знайсці, выкарыстаўшы формулы: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $S = \frac{abc}{4R}$.

3. Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

4. Няхай a, b, c — стораны трохвугольніка і c — большая старана. Калі $a^2 + b^2 < c^2$, то трохвугольнік тупавугольны, калі $a^2 + b^2 > c^2$, то трохвугольнік вастравугольны, калі $a^2 + b^2 = c^2$, то трохвугольнік прамавугольны.

5. Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў усіх яго старон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

6. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

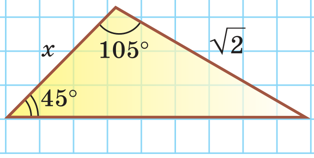
7*. Формула медыяны: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

Тэст 1

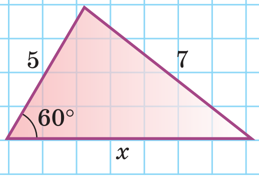
Даўжыня адрэзка x роўна:

а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2.



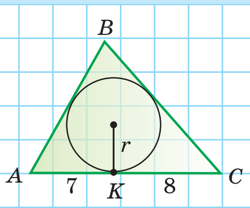
Тэст 2

Па даных на рысунку знайдзіце x.



Тэст 3

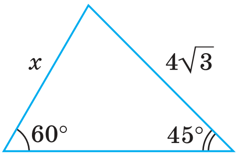
Знайдзіце радыус r упісанай акружнасці трохвугольніка ABC, калі яго перыметр роўны 42 і $AK = 7$, $KC = 8$.



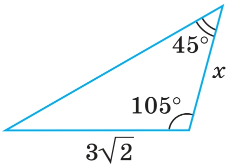
Падрыхтоўка да кантрольнай работы № 3

1. Знайдзіце даўжыню стараны x.

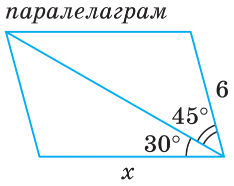
а)



б)

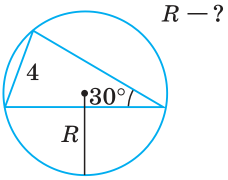


в)

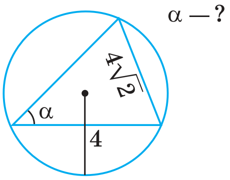


2. Знайдзіце радыус R (рыс. *а*), вугал α (рыс. *б*) і старану a (рыс. *в*).

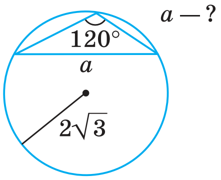
а)



б)

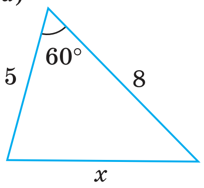


в)

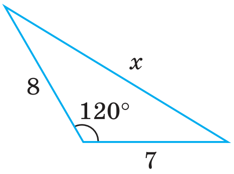


3. Знайдзіце даўжыню стараны x.

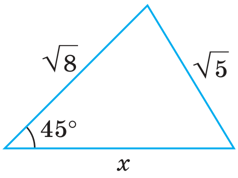
а)



б)

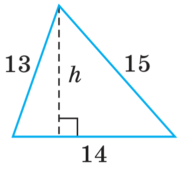


в)

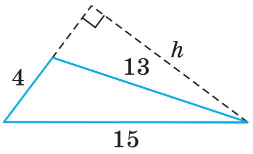


4. Ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайдзіце S, h і R.

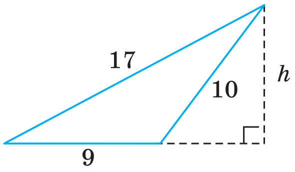
а)



б)

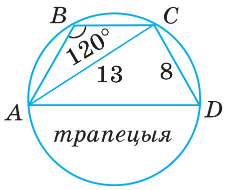


в)

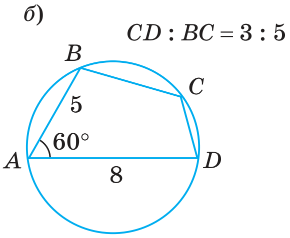


5*. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ABCD$.

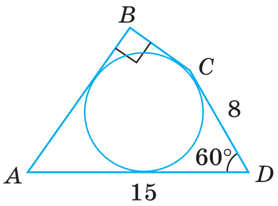
а)



б)



в)



ТЭМЫ РЭФЕРАТАЎ

1. Тэарэма Брэтшнайдэра (тэарэма косінусаў для чатырохвугольніка).
2. Тэарэма Сцюарта і яе дадаткі.
3. Тэарэма Апалонія.
4. Формула Брахмагупты.

Экспрэс-паўтарэнне главы III

Злучыце падзеленыя палавінкі формул па ўзоры: *A*4 і г. д. Растлумачце, што азначае кожная формула.

$\ldots = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ **5**

$\ldots = 2R$ **4**

$\ldots = \dfrac{abc}{4S}$ **6**

C $R = \ldots$

$\ldots = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ **3**

B $a^2 = \ldots$

$\ldots = 2a^2 + 2b^2$ **1**

A $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = \ldots$

E $S = \ldots$

F $m_a = \ldots$

D $d_1^2 + d_2^2 = \ldots$

$\ldots = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$ **2**

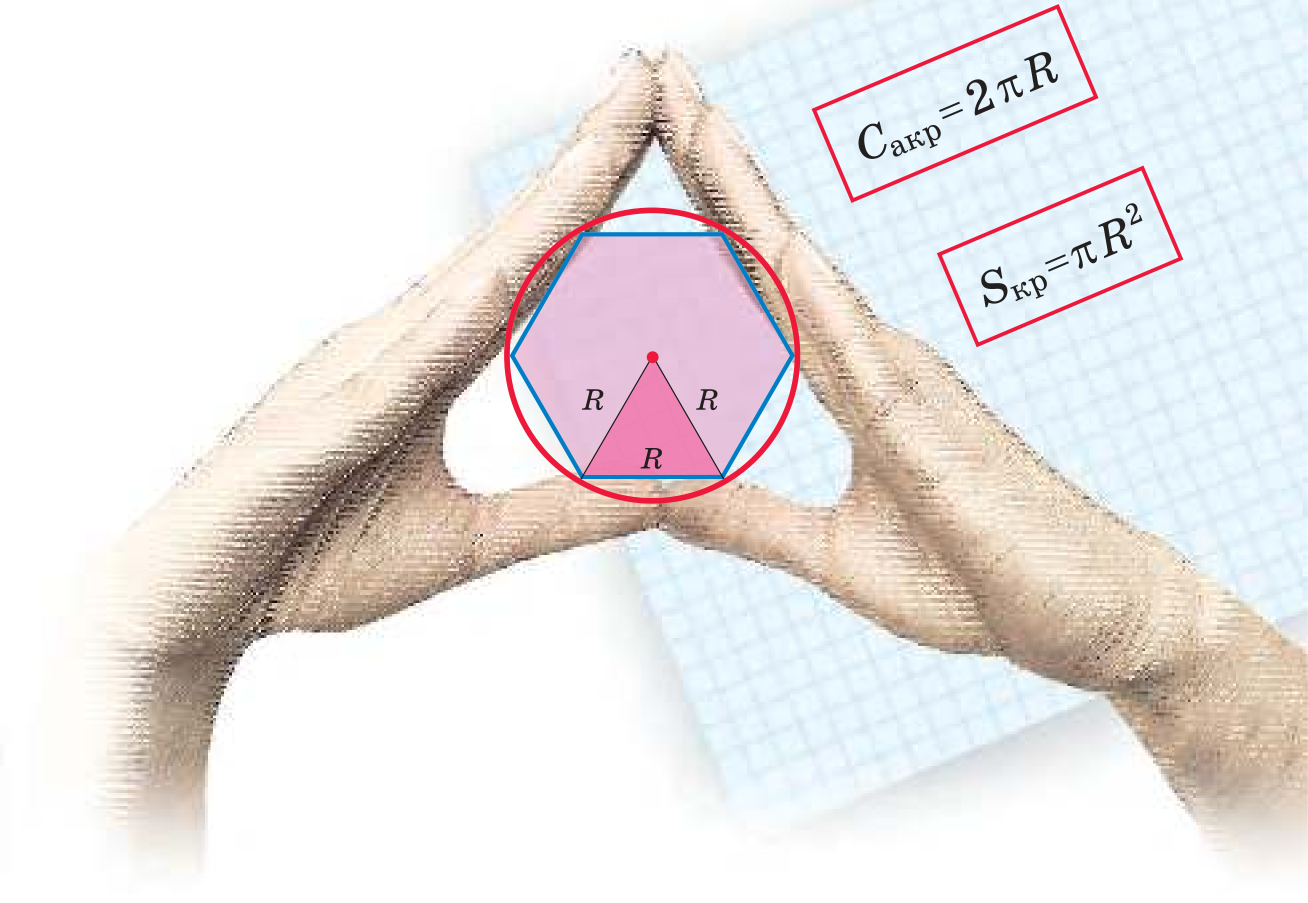
Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя, 9» можна знайсці на сайце: http://e-vedy.adu.by, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 9 кл.».

Глава IV

Правільныя многавугольнікі

У гэтай главе вы даведаецеся:

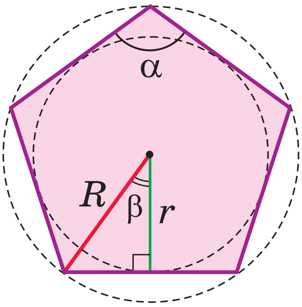
- Аб азначэнні і ўласцівасцях правільных многавугольнікаў
- Аб тым, што правільны чатырохвугольнік — гэта квадрат
- Чаму плошча круга роўна πR^2



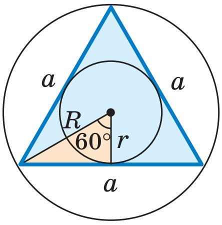
Правільныя многавугольнікі

УСЕ СТОРАНЫ РОЎНЫЯ І ЎСЕ ВУГЛЫ РОЎНЫЯ

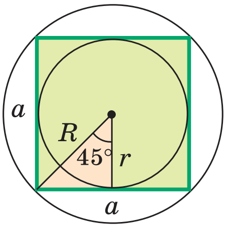
акружнасць
можна
апісаць
упісаць
цэнтры
супадаюць



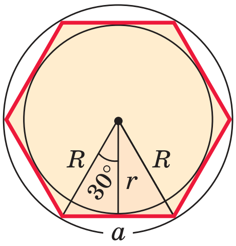
$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$$



$n = 3$

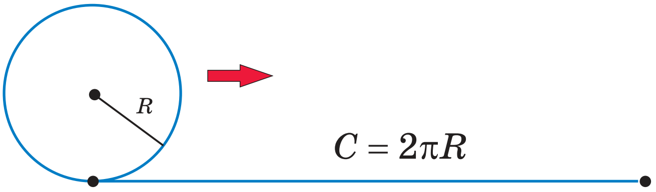


$n = 4$



$n = 6$

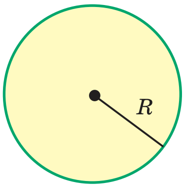
ДАЎЖЫНЯ АКРУЖНАСЦІ І ПЛОШЧА КРУГА



$C = 2\pi R$

даўжыня акружнасці

плошча круга

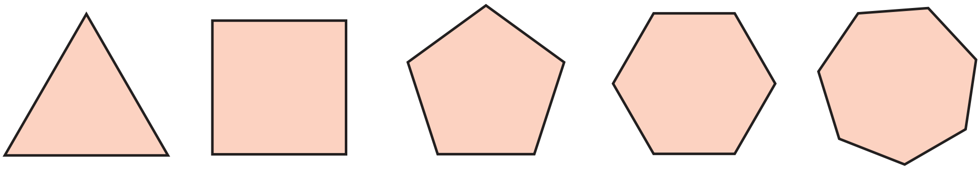


$S = \pi R^2$

§ 16. Правільныя многавугольнікі

Азначэнне. **Правільным** многавугольнікам называецца выпуклы многавугольнік, у якога ўсе стораны роўныя і ўсе вуглы роўныя.

На рысунку 198 паказаны правільныя трохвугольнік, чатырохвугольнік, пяцівугольнік, шасцівугольнік, сямівугольнік. Правільны трохвугольнік — гэта роўнастаронні трохвугольнік, а правільны чатырохвугольнік — гэта квадрат.



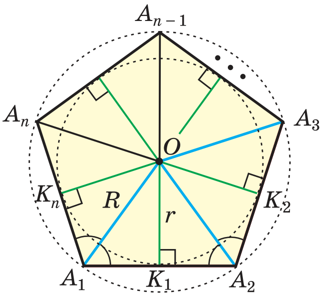
Рыс. 198

Адной з найбольш простых задач з'яўляецца задача знаходжання велічыні ўнутранага вугла правільнага многавугольніка. Паколькі ўсе вуглы правільнага n-вугольніка роўныя паміж сабой, а сума вуглоў любога n-вугольніка роўна $180°(n - 2)$, то вугал α правільнага n-вугольніка можна знайсці па формуле

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

Напрыклад, для правільнага шасцівугольніка $\alpha = \dfrac{180° \cdot (6-2)}{6} = 120°$.

Тэарэма. Каля любога правільнага многавугольніка можна апісаць акружнасць, у любы правільны многавугольнік можна ўпісаць акружнасць; цэнтры гэтых акружнасцей супадаюць.



Рыс. 199

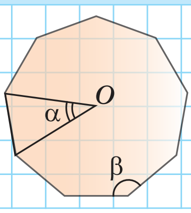
Доказ. У правільным многавугольніку $A_1A_2A_3...A_n$ правядзём бісектрысы ўнутраных вуглоў A_1 і A_2. Няхай O — пункт перасячэння гэтых бісектрыс (рыс. 199). Паколькі $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$ як палавіны роўных вуглоў, то $\triangle A_1OA_2$ — раўнабедраны з асновай A_1A_2. Правёўшы адрэзак OA_3, атрымаем $\triangle A_2OA_3$, роўны $\triangle A_1OA_2$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі ($A_1A_2 = A_2A_3$, старана OA_2 — агульная, $\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$). Злучыўшы пункт O адрэзкамі з астатнімі вяршынямі, атрымаем мноства роўных раўнабедраных трохвугольнікаў. Адсюль $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$. Таму акружнасць з цэнтрам O і радыусам $R = OA_1$ пройдзе праз усе вяршыні многавугольніка $A_1A_2A_3...A_n$, г. зн. будзе яго апісанай акружнасцю. А паколькі вышыні названых роўных раўнабедраных трохвугольнікаў, праведзеныя да іх асноў, роўныя, г. зн. $OK_1 = OK_2 = OK_3 = ... = OK_n$, то пункт O — таксама і цэнтр упісанай акружнасці многавугольніка $A_1A_2A_3...A_n$, радыус якой $r = OK_1$. Тэарэма даказана.

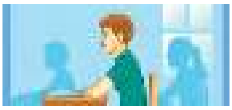
Пункт O называецца цэнтрам правільнага n-вугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

На рысунку паказаны правільны дзевяцівугольнік і яго цэнтр O. Знайдзіце велічыню вугла α і велічыню вугла β.





Заданні да § 16

РАШАЕМ САМАСТОЙНА*

246. Сума даўжынь дзвюх старон правільнага шасцівугольніка роўна 20 см. Знайдзіце перыметр гэтага многавугольніка.

247. Пакажыце відарыс правільнага васьмівугольніка $A_1A_2A_3...A_8$, «адрэзаўшы» ў квадрата вугалкі. Адзначце цэнтр O гэтага многавугольніка. Знайдзіце $\angle A_1OA_2$, $\angle A_1A_2O$, $\angle A_1A_2A_3$. У адказ запішыце градусную меру $\angle A_1A_2A_3$.

248. Выкарыстаўшы формулу сумы вуглоў многавугольніка, знайдзіце градусную меру вугла правільнага n-вугольніка, калі n роўна:

а) 5; б) 10; в) 18.

249. Унутраны вугал правільнага n-вугольніка роўны 150°. Знайдзіце колькасць старон гэтага n-вугольніка.

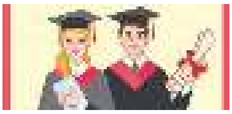
250. Сума градусных мер двух вуглоў правільнага многавугольніка роўна 324°, а яго перыметр роўны 280 см. Знайдзіце даўжыню стараны гэтага многавугольніка.

251. Дадзены правільны n-вугольнік $A_1A_2A_3...A_n$, пункт O — яго цэнтр, $\angle OA_1A_2 = 85°30'$, $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = 6$ см. Знайдзіце перыметр гэтага n-вугольніка.

252. Знешні вугал правільнага n-вугольніка $A_1A_2A_3...A_n$ роўны 60°, перыметр — 72 см. Знайдзіце $S_{A_1OA_2}$, дзе O — цэнтр n-вугольніка.

---

* Да кожнага параграфа ёсць рэзерв задач, змешчаны ў дапаможніку «Наглядная геаметрыя. 9 клас» В. У. Казакова.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

253*. Дадзены правільны пяцівугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рыс. 200).

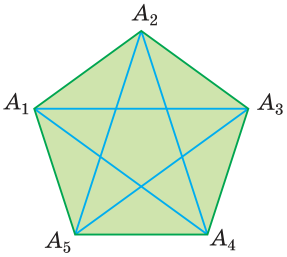
а) Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_2A_3$.

б) Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_3A_5$.

в) Дакажыце, што ўсе дыяганалі пяцівугольніка роўныя.

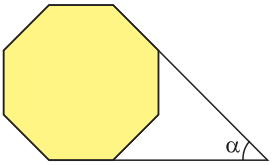
г) Дакажыце, што дыяганаль A_1A_3 паралельна старане A_4A_5.

д) Дакажыце, што пяцівугольнік, утвораны пры перасячэнні ўсіх дыяганалей дадзенага правільнага пяцівугольніка, таксама з'яўляецца правільным.



Рыс. 200

254*. На рысунку 201 паказаны відарыс правільнага 8-вугольніка. Знайдзіце велічыню вугла α.



Рыс. 201

255*. Дадзены правільны 12-вугольнік $A_1A_2A_3...A_{12}$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) A_2A_7 і A_4A_{12};

б) A_1A_3 і A_6A_{10}

(для пабудовы правільнага 12-вугольніка схематычна намалюйце круглы цыферблат гадзінніка, разбіце яго акружнасць на 12 роўных дуг, адзначыўшы пункты, якія адпавядаюць 1 г, 2 г, 3 г і г. д., і злучыце суседнія пункты адрэзкамі).

Гімнастыка розуму

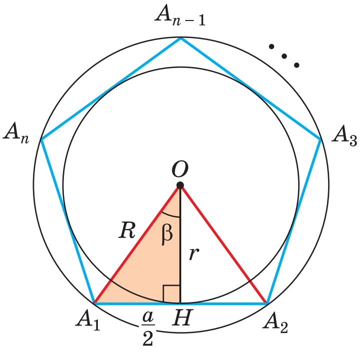
Паверхня футбольнага мяча сшыта з правільных чорных пяцівугольнікаў і правільных белых шасцівугольнікаў, якія злучаюць іх.

Заданне. Вядома, што ўсяго чорных пяцівугольнікаў 12. Вызначце матэматычным шляхам колькасць белых шасцівугольнікаў на паверхні мяча, а затым пераканайцеся ў сваёй праваце на ўроку фізкультуры.

(Для самакантролю. Адказ: колькасць белых шасцівугольнікаў на паверхні мяча роўна наміналу купюры Рэспублікі Беларусь, на правым баку якой размешчаны відарыс Дварца Румянцавых і Паскевічаў у г. Гомелі.)

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, у якіх краінах свету некаторыя манеты маюць форму правільнага многавугольніка.

§ 17. Формулы радыусаў апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага многавугольніка



Рыс. 202

Няхай $A_1A_2A_3...A_n$ — правільны n-вугольнік са стараной a, дзе O — яго цэнтр, $OA_1 = R$ — радыус апісанай акружнасці, $OH = r$ — радыус упісанай акружнасці (рыс. 202).

Паколькі $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, а вышыня OH раўнабедранага трохвугольніка A_1OA_2 з'яўляецца бісектрысай і медыянай, то вугал $\beta = \angle A_1OH = \frac{180^\circ}{n}$, $A_1H = \frac{a}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка A_1OH знаходзім:

а) $\sin\beta = \dfrac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $a = 2R\sin\beta = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$;

б) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$, адкуль $a = 2r\operatorname{tg}\beta = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

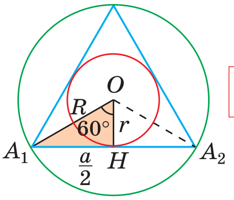
Заўвага. Выведзеныя формулы запамінаць не абавязкова. Важна памятаць спосаб іх атрымання: рашэнне прамавугольнага трохвугольніка A_1OH.

Прыклады. 1) Для правільнага трохвугольніка (рыс. 203) атрымаем:

$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 60^\circ$, $\sin 60^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{3}$, або $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}60^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$, $r\cdot\sqrt{3} = \frac{a}{2}$, $a = 2\sqrt{3}r$, або $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

2) Для правільнага чатырохвугольніка (рыс. 204) атрымаем:

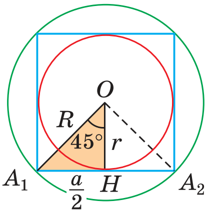
$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 45^\circ$, $\sin 45^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{2}$, або $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg}45^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$, $r\cdot 1 = \frac{a}{2}$, $a = 2r$, або $r = \frac{a}{2}$.



$\boxed{a = R\sqrt{3}}$

$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Рыс. 203

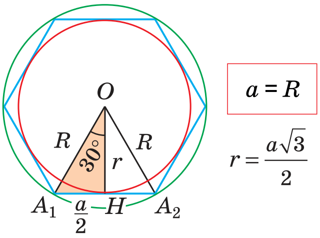


$\boxed{a = R\sqrt{2}}$

$r = \frac{a}{2}$

Рыс. 204

3) Для правільнага шасцівугольніка (рыс. 205) $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$, $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$, або $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



$a = R$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Рыс. 205

Карысна запомніць формулы, якія выражаюць старану a_n правільнага n-вугольніка праз радыус R апісанай акружнасці пры $n = 3, 4, 6$:

$$\boxed{a_3 = R\sqrt{3},} \quad \boxed{a_4 = R\sqrt{2},} \quad \boxed{a_6 = R.}$$

Для знаходжання плошчы правільнага n-вугольніка $A_1A_2A_3...A_n$ з цэнтрам O і радыусам R апісанай акружнасці можна знайсці плошчу трохвугольніка A_1OA_2 па формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ і памножыць яе на колькасць такіх трохвугольнікаў, г. зн. на n.

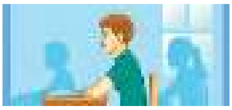
Прыклад.

$$S_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{6}\right) = 3R^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$S_8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{8}\right) = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2;$$

$$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{12}\right) = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Для знаходжання радыуса r акружнасці, упісанай у правільны многавугольнік, можна карыстацца формулай плошчы апісанага многавугольніка $S = pr$.



Заданні да § 17

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

256. Дадзены правільны трохвугольнік. Выкарыстаўшы формулы $a = R\sqrt{3}$ і $r = \frac{1}{2}R$, запоўніце ў сшытку табліцу, дзе a — старана трохвугольніка, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці.

a	6		
R		$4\sqrt{3}$	
r			1

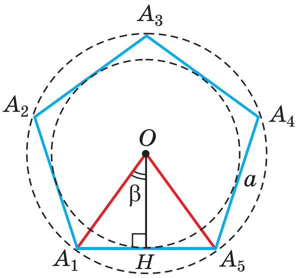
257. а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у правільны чатырохвугольнік са стараной, роўнай 8 см.

б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля правільнага чатырохвугольніка, перыметр якога роўны 32 см.

258. Дадзены правільны шасцівугольнік з перыметрам, роўным 30 см. Знайдзіце радыус апісанай і радыус упісанай акружнасці гэтага шасцівугольніка.

259. а) Вылічыце радыус апісанай акружнасці правільнага 10-вугольніка са стараной, роўнай 6 см. Адказ акругліце да 0,1 см.
б) Вылічыце радыус упісанай акружнасці правільнага 12-вугольніка са стараной, роўнай 24 см. Адказ акругліце да 0,1 см.

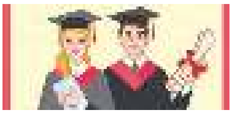
260. Дадзены правільны пяцівугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5$ з цэнтрам O і стараной $a = 20$ (рыс. 206). Знайдзіце вугал β і выразіце радыусы яго апісанай і ўпісанай акружнасцей праз a і β.



Рыс. 206

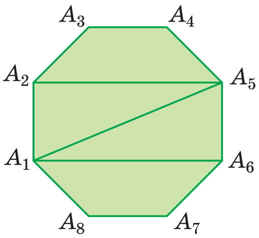
261. а) Выразіце старану a правільнага 9-вугольніка праз радыус R яго апісанай акружнасці.
б) Выразіце радыус r акружнасці, упісанай у правільны 18-вугольнік, праз яго старану a.

262. Знайдзіце плошчу правільнага 12-вугольніка, у якога радыус апісанай акружнасці роўны 6 см.



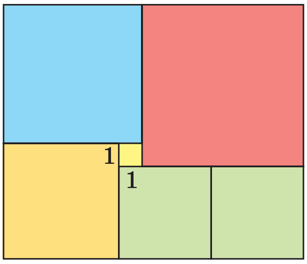
ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

263*. Дадзены правільны васьмівугольнік $A_1A_2A_3...A_8$ (рыс. 207).
а) Дакажыце, што $A_2A_5 \parallel A_3A_4$.
б) Дакажыце, што $A_1A_2A_5A_6$ — прамавугольнік.
в) Дакажыце, што дыяганаль A_1A_5 праходзіць праз цэнтр многавугольніка.
г) Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_2A_5$.
д) Дакажыце, што плошча прамавугольніка $A_1A_2A_5A_6$ роўна $\frac{1}{2}$ плошчы дадзенага правільнага васьмівугольніка.



Рыс. 207

Гімнастыка розуму



Рыс. 208

Прамавугольнік на рысунку 208 складзены з шасці квадратаў. Старана жоўтага квадрата роўна 1. Знайдзіце даўжыню стараны чырвонага квадрата.

(Для самакантролю. Адказ: даўжыня стараны чырвонага квадрата роўна колькасці перыядаў у табліцы Мендзялеева.)

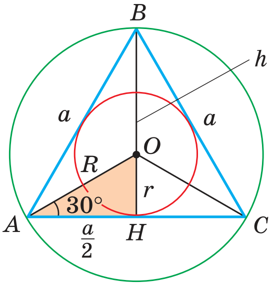
Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, якую тэарэму адносна правільных многавугольнікаў даказаў вялікі матэматык Карл Гаўс і якую геаметрычную фігуру ён загадаў намаляваць на сваім помніку.

§ 18. Правільны трохвугольнік, чатырохвугольнік, шасцівугольнік

1. Правільны трохвугольнік

Абагульнім інфармацыю аб правільным (роўнастароннім) трохвугольніку.

Запішам формулы вышыні h, плошчы S, радыуса R апісанай і радыуса r упісанай акружнасцей правільнага трохвугольніка ABC са стараной a (рыс. 209):



Рыс. 209

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

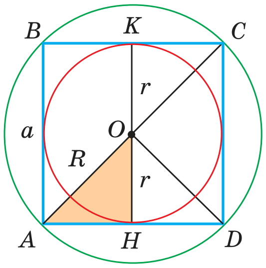
З $\triangle AOH$, дзе $\angle OAH = 30°$, вынікае, што $r = \frac{1}{2}R$.

Пры зададзенай старане a правільнага трохвугольніка яго можна пабудаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі, выкарыстаўшы алгарытм пабудовы трохвугольніка па трох старанах.

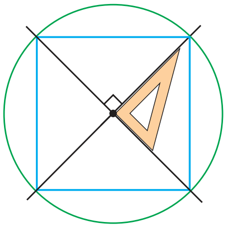
Паколькі $BO : OH = 2 : 1$, то $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. Для пабудовы апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага трохвугольніка дастаткова пабудаваць яго медыяны (вышыні), пункт перасячэння якіх будзе цэнтрам шуканых акружнасцей.

2. Правільны чатырохвугольнік

Няхай старана квадрата $ABCD$ роўна a, R — радыус апісанай, r — радыус упісанай акружнасці (рыс. 210). Дыяметр яго апісанай акружнасці роўны дыяганалі AC. У сваю чаргу, $AC = a\sqrt{2}$, адкуль $2R = a\sqrt{2}$, або $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. З раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка AOD таксама вынікае, што $AD = AO\sqrt{2}$, $a = R\sqrt{2}$. Дыяметр KH акружнасці, упісанай у квадрат, роўны даўжыні стараны квадрата,



Рыс. 210

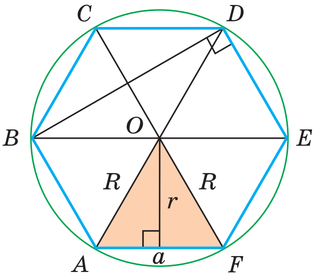


Рыс. 211

г. зн. $KH = AB = a$, адкуль $a = 2r$, $\boxed{r = \frac{a}{2}.}$ З прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка AOH таксама вынікае, што $r = AH = \frac{a}{2}$.

Для пабудовы квадрата, упісанага ў дадзеную акружнасць з зададзеным цэнтрам, можна пабудаваць дзве ўзаемна перпендыкулярныя прамыя, якія праходзяць праз цэнтр акружнасці (рыс. 211). Гэтыя прамыя перасякуць акружнасць у вяршынях квадрата. Абгрунтуйце гэта сцверджанне. Выканайце гэту пабудову пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка.

3. Правільны шасцівугольнік



Рыс. 212

Разгледзім правільны 6-вугольнік $ABCDEF$ са стараной a, упісаны ў акружнасць з цэнтрам O і радыусам R (рыс. 212). Яго ўнутраныя вуглы роўны па 120°. Трохвугольнік AOF раўнабедраны, паколькі $OA = OF = R$, $\angle AOF = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Таму $\triangle AOF$ — роўнастаронні, адкуль $\boxed{a = R.}$

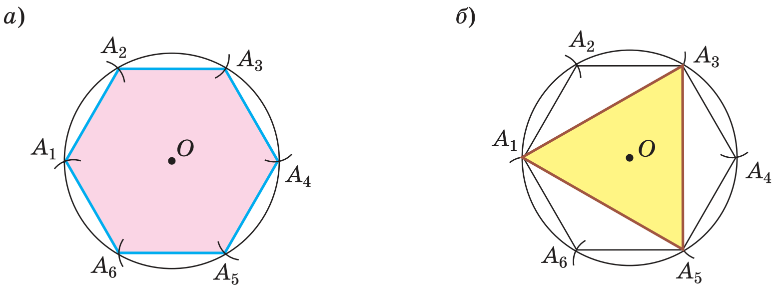
Паколькі радыус r упісанай акружнасці з'яўляецца вышынёй роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a, то $\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$

Паколькі $\angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 180^\circ$, то вялікая (галоўная) дыяганаль BE правільнага шасцівугольніка праходзіць праз яго цэнтр O, а ўсе тры вялікія дыяганалі AD, BE і CF разбіваюць яго на шэсць роўных роўнастаронніх трохвугольнікаў. Плошча правільнага шасцівугольніка

$$\boxed{S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.}$$

Малая (меншая) дыяганаль BD правільнага шасцівугольніка з'яўляецца дыяганаллю ромба $BCDO$ ($BC = CD = DO = BO = a$) з вугламі, роўнымі 60° і 120°. Адкуль $CD \parallel BE$. Трохвугольнік BDE з'яўляецца прамавугольным ($\angle BDE = 90^\circ$ як вугал, які абапіраецца на дыяметр), $\angle BED = 60^\circ$, $\angle DBE = 30^\circ$. Акрамя таго, $CD \parallel AF$, $BC \parallel FE$, $AB \parallel ED$, а адлегласці паміж названымі парамі паралельных прамых роўны $a\sqrt{3}$. Дакажыце гэта самастойна.

Пабудуем пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільны шасцівугольнік, упісаны ў дадзеную акружнасць з радыусам R (рыс. 213, a). Выкары-



Рыс. 213

стаем тое, што $a = R$, дзе a — старана правільнага шасцівугольніка. Адну вяршыню A_1 шасцівугольніка адзначым на акружнасці адвольна. З яе як з цэнтра радыусам, роўным радыусу R, зробім засечку на акружнасці і атрымаем вяршыню A_2. Затым аналагічна паслядоўна пабудуем астатнія вяршыні: A_3, A_4, A_5, A_6 — і злучым іх адрэзкамі. З роўнасці роўнастаронніх трохвугольнікаў ($\triangle A_1OA_2 = \triangle A_2OA_3 = \triangle A_3OA_4 = \triangle A_4OA_5 = \triangle A_5OA_6 = \triangle A_6OA_1$) вынікае роўнасць вуглоў пабудаванага шасцівугольніка $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, адкуль заключаем, што ён — правільны.

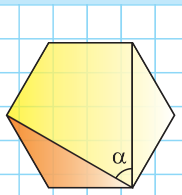
Для пабудовы правільнага трохвугольніка, упісанага ў дадзеную акружнасць, дастаткова злучыць адрэзкамі праз адну вяршыні правільнага ўпісанага шасцівугольніка (рыс. 213, *б*). Для пабудовы правільнага 12-вугольніка трэба падзяліць дугі A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_6 папалам (пабудаваўшы пасярэднія перпендыкуляры да старон правільнага шасцівугольніка) і кожны з пунктаў дзялення злучыць адрэзкамі з канцамі адпаведнай стараны.

Выкарыстаўшы дадзены спосаб дзялення дуг папалам, можна пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудаваць мноства правільных многавугольнікаў. Так, з правільнага 4-вугольніка можна пабудаваць правільны 8-вугольнік, 16-вугольнік, і наогул любы правільны 2^k-вугольнік, дзе k — цэлы лік, большы за два.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

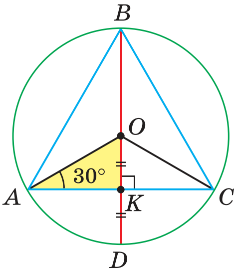
На рысунку паказаны відарыс правільнага шасцівугольніка, яго плошча роўна 120 см^2. Знайдзіце велічыню вугла α і плошчу аранжавага трохвугольніка.



Заданні да § 18

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *У акружнасці з цэнтрам O праведзены дыяметр BD, праз сярэдзіну радыуса OD праведзена хорда AC, перпендыкулярная дыяметру BD* (рыс. 214). *Даказаць, што* $\triangle ABC$ *— правільны.*

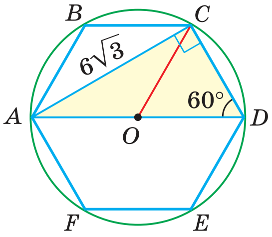


Рыс. 214

Доказ. Паколькі $OK = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OA$, то ў прамавугольным трохвугольніку AOK $\angle OAK = 30°$. У раўнабедраным трохвугольніку AOC ($OA = OC$) $\angle OCA = 30°$, $\angle AOC = 120°$. Упісаны вугал ABC роўны палавіне цэнтральнага вугла AOC, г. зн. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 60°$. Дыяметр, перпендыкулярны хордзе, дзеліць яе папалам. Таму $AK = KC$. Паколькі ў трохвугольніку ABC вышыня BK з'яўляецца і медыянай, то ён — раўнабедраны, $AB = BC$. Адсюль $\angle BAC = \angle BCA = 60°$ і $\triangle ABC$ — роўнастаронні, г. зн. правільны. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. З задачы вынікае другі спосаб пабудовы правільнага трохвугольніка, упісанага ў акружнасць: будуецца дыяметр BD, праз сярэдзіну радыуса OD праводзіцца хорда AC, перпендыкулярная дыяметру. Трохвугольнік ABC — правільны.

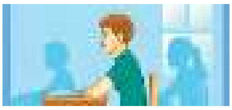
Задача 2. *Дадзены правільны шасцівугольнік ABCDEF, дыяганаль AC роўна* $6\sqrt{3}$. *Знайсці плошчу шасцівугольніка* (*рыс.* 215).



Рыс. 215

Рашэнне. Упісаны вугал ACD абапіраецца на дыяметр AD, таму ён прамы. З прамавугольнага трохвугольніка ACD: $\angle D = 60°$, $\operatorname{ctg} D = \frac{CD}{AC}$, $CD = AC\operatorname{ctg}60° = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 6.$ Паколькі $S_{COD} = \frac{CD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, то $S_{ABCDEF} = 6\cdot S_{COD} = 6\cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.

Адказ: $54\sqrt{3}$.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

264. Дадзены правільны трохвугольнік, a — яго старана, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці, h — вышыня, S — плошча. Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу.

a	6				
h		$2\sqrt{3}$			
R			2		
r				$\sqrt{6}$	
S					$16\sqrt{3}$

265. Дадзены правільны чатырохвугольнік, a — яго старана, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці. Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу.

a	4		
R		$8\sqrt{2}$	
r			$\sqrt{8}$

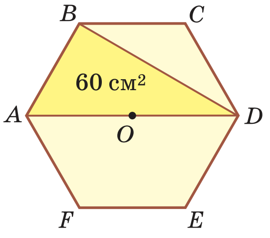
266. а) З дроту выраблены правільны трохвугольнік са стараной, роўнай 12 см. Дрот разагнулі і зрабілі з яго правільны чатырохвугольнік. Знайдзіце даўжыню стараны гэтага чатырохвугольніка.

б) З дроту выраблены правільны шасцівугольнік са стараной, роўнай 2 см. Дрот разагнулі і зрабілі з яго правільны трохвугольнік. Знайдзіце даўжыню яго стараны.

267. а) Знайдзіце плошчу правільнага шасцівугольніка са стараной, роўнай 4 см.

б) Знайдзіце перыметр правільнага шасцівугольніка, калі радыус упісанай у яго акружнасці роўны $6\sqrt{3}$ см.

268. Знайдзіце плошчу правільнага шасцівугольніка $ABCDEF$ (рыс. 216), калі плошча трохвугольніка ABD роўна 60 см^2.



Рыс. 216

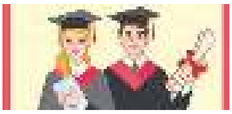
269. Дадзены правільны 6-вугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага 6-вугольніка, і радыус акружнасці, упісанай у гэты 6-вугольнік, калі $A_2A_4 = 4\sqrt{3}$ см.

б) Дакажыце, што адлегласць паміж прамымі A_2A_3 і A_6A_5 роўна даўжыні дыяганалі A_2A_4.

270. а) Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільнага трохвугольніка па яго вышыні h.

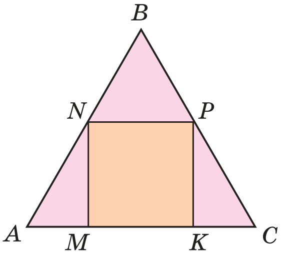
б) Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільнага чатырохвугольніка па яго дыяганалі d.



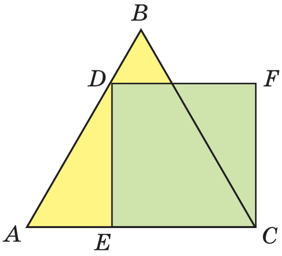
ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

271*. а) У правільны трохвугольнік ABC са стараной, роўнай 6, упісаны квадрат $MNPK$ (рыс. 217). Знайдзіце даўжыню стараны квадрата.

б) На рысунку 218 паказаны відарыс правільнага трохвугольніка ABC і правільнага чатырохвугольніка $EDFC$. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка, калі $FC = 3$.



Рыс. 217



Рыс. 218

272*. Знайдзіце плошчу правільнага трохвугольніка, калі дадзены:

а) радыус R яго апісанай акружнасці;

б) радыус r яго ўпісанай акружнасці.

273*. Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі квадрата па адрэзку, роўнаму суме стараны квадрата і яго дыяганалі.

274*. Каля дадзенай акружнасці апішыце пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільны:

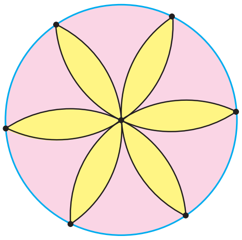
а) трохвугольнік; б) чатырохвугольнік; в) шасцівугольнік.

Мадэляванне

Дызайнер хоча вырабіць папяровыя кветкі, выразаўшы іх з кругоў, як паказана на рысунку 219.

Заданне. Дапамажыце дызайнеру: складзіце алгарытм рашэння задачы з выкарыстаннем цыркуля, нажніц і паперы.

Абгрунтуйце вашу ідэю матэматычна і праверце яе на практыцы.



Рыс. 219

Цікава ведаць. Ячэйкі пчаліных сотаў у форме правільных шасцівугольнікаў (рыс. 220) заўсёды захаплялі людзей. Нездарма пчолы лічацца аднымі з найлепшых інжынераў у свеце прыроды. Як дакладна і суразмерна падганяюць яны адну ячэйку сотаў да другой!

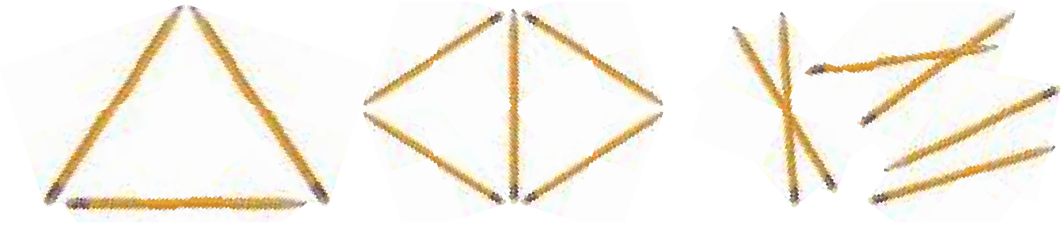
Рэгулярны ячэісты малюнак можна атрымаць з трохвугольных, квадратных або шасцівугольных ячэек. Шасцівугольныя ячэйкі з'яўляюцца найбольш эканамічнымі. На соты з такімі ячэйкамі ідзе найменшая колькасць воску. Упершыню такую асаблівасць заўважылі ў IV ст. н. э., тады ж было прапанавана меркаванне, што пчолы пры пабудове сотаў «кіруюцца матэматычным планам».

Рыс. 220

Гімнастыка розуму

З трох алоўкаў адной даўжыні можна скласці 1 правільны трохвугольнік. З пяці такіх алоўкаў можна скласці 2 правільныя трохвугольнікі (рыс. 221).

Паспрабуйце з шасці алоўкаў адной даўжыні атрымаць фігуру, якая складаецца з чатырох правільных трохвугольнікаў.



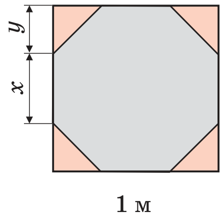
Рыс. 221

Рэальная геаметрыя

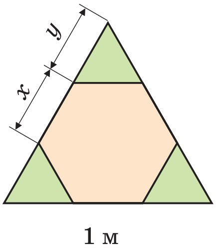
Заданне 1. Ёсць квадратны ліст гіпсакардону са стараной 1 м. З яго неабходна атрымаць правільны васьмівугольнік, абрэзаўшы вуглы (рыс. 222). Вызначце даўжыні адрэзкаў x і y. Адказ акругліце да 1 см.

Заданне 2. З ліста фанеры, які мае форму правільнага трохвугольніка са стараной 1 м, неабходна вырабіць правільны шасцівугольнік, абрэзаўшы вуглы (рыс. 223). Вызначце даўжыні адрэзкаў x і y. Адказ акругліце да 1 см.

Заўвага. Пры выкананні заданняў 1 і 2 карыстайцеся трыганаметрычнымі табліцамі і калькулятарам.



Рыс. 222



Рыс. 223

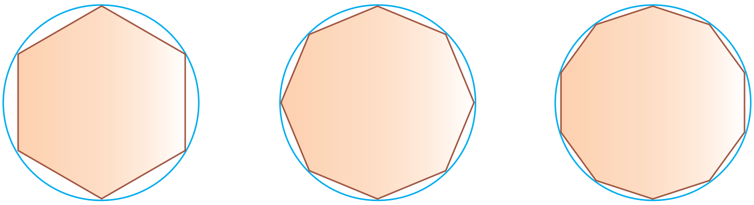
§ 19. Знаходжанне даўжыні акружнасці і плошчы круга

1. Даўжыня акружнасці і плошча круга

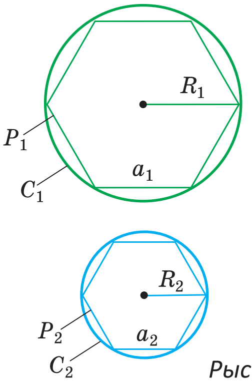
Даўжыню акружнасці, выраблenай з гнуткага дроту, можна вымераць, калі дрот распраміць у адрэзак. Яшчэ ў старажытнасці заўважылі, што адносіна даўжыні любой акружнасці да яе дыяметра ёсць велічыня пастаянная: даўжыня акружнасці прыкладна ў 3 разы большая за дыяметр. Вы можаце пераканацца ў гэтым пры дапамозе ніткі і лінейкі, выкарыстаўшы ў якасці акружнасці верхні кант кубка (рыс. 224).

Рыс. 224

Зразумела, што перыметр правільнага многавугольніка, упісанага ў акружнасць, будзе імкнуцца да даўжыні акружнасці пры неабмежаваным павелічэнні колькасці яго старон, а плошча гэтага многавугольніка — да плошчы круга, абмежаванай дадзенай акружнасцю (рыс. 225).



Рыс. 225



Рыс. 226

Выкарыстаўшы гэты факт, выведзем ужо вядомыя вам формулы даўжыні акружнасці $C = 2\pi R$ і плошчы круга $S = \pi R^2$, дзе R — радыус акружнасці і круга.

Спачатку пакажам, што адносіна даўжыні любой акружнасці C да яе дыяметра $D = 2R$ ёсць велічыня пастаянная. Для гэтага разгледзім дзве акружнасці і два правільныя ўпісаныя ў іх многавугольнікі з аднолькавай колькасцю старон n, дзе a_1 — старана першага, a_2 — старана другога многавугольніка, P_1 і P_2 — іх адпаведныя перыметры, C_1 — даўжыня першай, а C_2 — даўжыня другой апісанай акружнасці (рыс. 226).

Знойдзем адносіну названых перыметраў:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\overset{1}{\cancel{n}}\cdot a_1}{\underset{1}{\cancel{n}}\cdot a_2}=\frac{2R_1\sin\overset{1}{\cancel{\frac{180^\circ}{n}}}}{2R_2\sin\underset{1}{\cancel{\frac{180^\circ}{n}}}}=\frac{2R_1}{2R_2}.$$

Пры неабмежаваным павелічэнні ліку n перыметр P_1 будзе імкнуцца да C_1, перыметр P_2 — да C_2, а адносіна $\frac{P_1}{P_2}$ — да адносіны $\frac{C_1}{C_2}$, і тады $\frac{C_1}{C_2}=\frac{2R_1}{2R_2}$, $\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$. Адсюль вынікае, што адносіна даўжыні акружнасці да яе дыяметра, г. зн. $\frac{C}{2R}$ — велічыня пастаянная для любой акружнасці.

Гэта адносіна абазначаецца літарай π. Паколькі $\frac{C}{2R}=\pi$, то даўжыня акружнасці $C=2\pi R$. Такім чынам, намі даказана наступная тэарэма.

Тэарэма. **Даўжыня акружнасці радыуса *R* знаходзіцца па формуле**

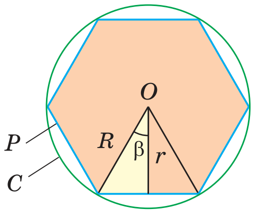
$$C = 2\pi R.$$

Цікава ведаць. Лік $\pi\approx 3{,}1415...$ — ірацыянальны і ў дзесятковым выглядзе ўяўляе сабой бясконцы неперыядычны дроб. Ён быў вядомы ўжо старажытным грэкам. Яшчэ Архімед знайшоў дроб $\frac{22}{7}$, які даволі дакладна набліжаў лік π. Мы ж для прыбліжаных вылічэнняў будзем карыстацца ў асноўным значэннем $\pi\approx 3{,}14$.

А цяпер выведзем формулу плошчы круга.

Тэарэма. **Плошча круга радыуса *R* знаходзіцца па формуле**

$$S = \pi R^2.$$



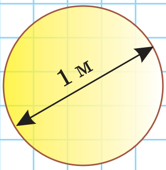
Рыс. 227

Доказ. Разгледзім некаторую акружнасць радыуса R і ўпісаны ў яе правільны n-вугольнік (рыс. 227), плошча якога $S_n=pr=\frac{1}{2}Pr$, дзе P — яго перыметр, r — радыус упісанай акружнасці. Пры неабмежаваным павелічэнні ліку n плошча S_n правільнага n-вугольніка будзе імкнуцца да плошчы $S_{\text{кр}}$ круга радыуса R, перыметр P — да даўжыні C апісанай акружнасці, а радыус r — да радыуса R (паколькі вугал β будзе імкнуцца да нуля). Тады $\frac{1}{2}Pr$ будзе імкнуцца да $\frac{1}{2}CR$, г. зн. да $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot R\cdot R$, што роўна πR^2, адкуль $S_{\text{кр}}=\pi R^2$. Тэарэма даказана.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

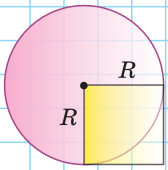
Тэст 1

Дыяметр круглага бервяна 1 м. Ці хопіць вяроўкі даўжынёй 3 м, каб абвязаць бервяно?



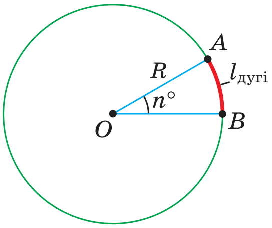
Тэст 2

Што большае: плошча круга або плошча трох жоўтых квадратаў са стараной, роўнай радыусу?



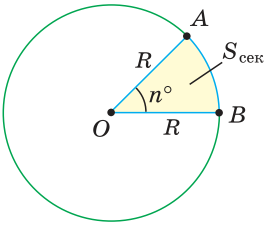
2. Даўжыня дугі акружнасці і плошча сектара круга

Паколькі даўжыня акружнасці $C = 2\pi R$, а яе градусная мера роўна 360°, то даўжыня дугі, якая змяшчае 1°, роўна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тады даўжыня l дугі, якая змяшчае $n°$ (рыс. 228), роўна $\frac{\pi R}{180}\cdot n$.



Рыс. 228

Напомнім, што *сектарам* называецца частка круга, абмежаваная двума радыусамі і дугой, якая злучае канцы радыусаў (рыс. 229). Радыус круга называецца *радыусам сектара*, названая дуга — *дугой сектара*, цэнтральны вугал паміж радыусамі, якія абмяжоўваюць сектар, — *вуглом сектара*.



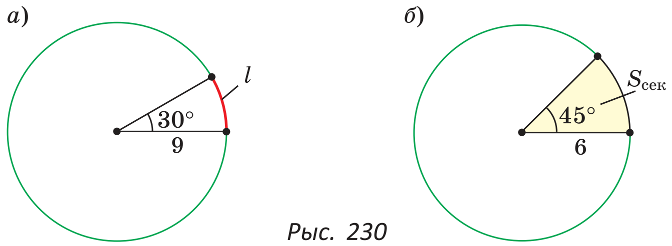
Рыс. 229

Паколькі плошча круга $S = \pi R^2$, то плошча сектара з вуглом у 1° роўна $\frac{\pi R^2}{360}$, а з вуглом у n градусаў — $\frac{\pi R^2}{360}\cdot n$.

Заўважым, што $S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360}\cdot n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi R}{180}\cdot n\right)\cdot R = \frac{1}{2}\cdot l_{дугі}\cdot R$, г. зн. плошча сектара роўна палавіне здабытку даўжыні дугі сектара на яго радыус.

Прыклад 1. Няхай дадзена дуга акружнасці з радыусам 9 см, якая змяшчае 30° (рыс. 230, *а*). Знойдзем даўжыню дугі:

$$l_{дугі} = \frac{\pi R}{180}\cdot n = \frac{\pi\cdot 9}{180}\cdot 30 = 1{,}5\pi \approx 1{,}5\cdot 3{,}14 \approx 4{,}7\ (см).$$



Рыс. 230

Прыклад 2. Няхай вугал сектара змяшчае 45°, а радыус роўны 6 см (рыс. 230, *б*). Знойдзем плошчу сектара:

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 45 = 4{,}5 \cdot \pi \approx 4{,}5 \cdot 3{,}14 \approx 14{,}1 \ (\text{см}^2).$$

Заўвага. Пры вылічэнні даўжыні дугі (плошчы сектара) дапушчальныя абодва наступныя запісы: $l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$ і $l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180°} \cdot n°$ ($S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ і $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$).

Даўжыня дугі і плошча сектара прама прапарцыянальны градуснай меры дугі і вугла сектара. Таму даўжыня дугі так адносіцца да даўжыні акружнасці, як градусная мера дугі адносіцца да градуснай меры акружнасці. Плошча сектара так адносіцца да плошчы круга, як градусная мера вугла сектара адносіцца да градуснай меры поўнага вугла, г. зн. справядлівыя прапорцыі:

$$\frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{n°}{360°}, \quad \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{n°}{360°}, \quad \frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}.$$

Заўвага. У трэцяй прапорцыі $l_{\text{дугі}}$ — гэта даўжыня дугі сектара.

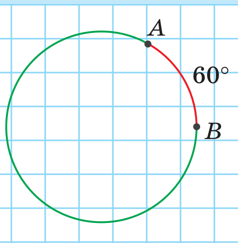
Дадзеныя прапорцыі таксама дазваляюць знаходзіць даўжыню дугі і плошчу сектара. Так, калі даўжыня акружнасці роўна 10 см, а градусная мера яе дугі $n° = 120°$, то $\frac{l_{\text{дугі}}}{10} = \frac{120°}{360°}$, адкуль даўжыня дадзенай дугі $l_{\text{дугі}} = \frac{10 \cdot 120°}{360°} = 3\frac{1}{3}$ (см).

А калі плошча круга роўна 12 см^2 і вугал сектара роўны 80°, то $\frac{S_{\text{сек}}}{12} = \frac{80°}{360°}$, адкуль плошча дадзенага сектара $S_{\text{сек}} = \frac{12 \cdot 80°}{360°} = 2\frac{2}{3}$ (см^2).

А цяпер выканайце **Тэст 3** і **Тэст 4**.

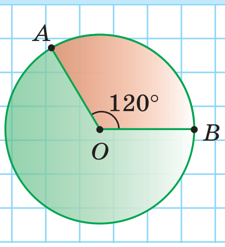
Тэст 3

Даўжыня акружнасці роўна 24 см. Знайдзіце даўжыню дугі *AB*, якая ўтрымлівае 60°.



Тэст 4

Плошча круга роўна 60 см^2. Знайдзіце плошчу сектара AOB, вугал якога роўны 120°.

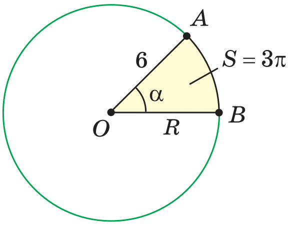


Заданні да § 19

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Дадзены сектар* AOB (рыс. 231), *радыус якога роўны* 6, *а плошча* — 3π. *Знайсці даўжыню дугі гэтага сектара. Адказ акругліць да* 0,1.



Рыс. 231

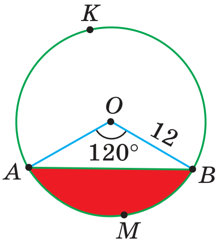
Рашэнне. *Спосаб* 1. Няхай $\angle AOB = \alpha$, адкуль $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha$. Паколькі па ўмове $S_{\text{сек}} = 3\pi$, то $3\pi = \frac{\pi\cdot 6^2}{360^\circ}\cdot\alpha$, адкуль $\alpha = 30^\circ$. Знойдзем даўжыню дугі AB: $\cup AB = \frac{\pi R}{180^\circ}\cdot\alpha = \frac{\pi\cdot 6}{180^\circ}\cdot 30^\circ = \pi \approx 3{,}1$.

Спосаб 2. Выкарыстаем прапорцыю $\frac{l_{\text{дугі}}}{C} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}$. Тады $\frac{l_{\text{дугі}}}{2\pi R} = \frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2}$, $\frac{l_{\text{дугі}}}{2} = \frac{S_{\text{сек}}}{R}$, $\frac{l_{\text{дугі}}}{2} = \frac{3\pi}{6}$, $l_{\text{дугі}} = \pi \approx 3{,}1$.

Спосаб 3. Паколькі $S_{\text{сек}} = \frac{1}{2}\cdot l_{\text{дугі}}\cdot R$, то $3\pi = \frac{1}{2}\cdot l_{\text{дугі}}\cdot 6$, $l_{\text{дугі}} = \pi \approx 3{,}1$.

Адказ: 3,1.

Задача 2. *Знайсці плошчу сегмента круга, радыус якога роўны* 12, *калі градусная мера дугі гэтага сегмента роўна* 120°.



Рыс. 232

Рашэнне. Напомнім, што *сегментам* называецца частка круга, абмежаваная хордай і дугой акружнасці, якая злучае канцы гэтай хорды.

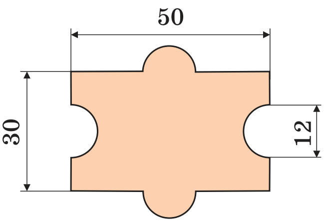
Няхай O — цэнтр дадзенай акружнасці, $\cup AMB = 120^\circ$ (рыс. 232). Тады $\angle AOB = 120^\circ$, $OA = OB = 12$ см. Плошча сегмента AMB роўна рознасці плошчы сектара $AOBM$ і плошчы раўнабедранага трохвугольніка AOB. Паколькі плошча сектара $AOBM$ $S_{AOBM} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot 120^\circ = \frac{\pi\cdot 12^2}{3} = 48\pi$, а плошча трохвугольніка AOB $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$, то плошча сегмента AMB $S_{AMB} = 48\pi - 36\sqrt{3}$.

Адказ: $48\pi - 36\sqrt{3}$.

Заўвага. Плошчу сегмента AKB (гл. рыс. 232) можна знайсці як суму плошчаў сектара $OAKB$ і трохвугольніка AOB або як рознасць плошчы круга і плошчы сегмента AMB.

Гімнастыка розуму

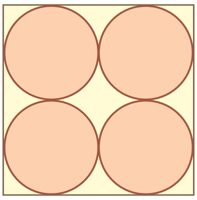
Фрагмент пазла ўяўляе сабой прамавугольнік памерам 30 × 50 (мм), у якім на процілеглых старанах ёсць два паўкруглыя выразы і на дзвюх іншых старанах — два паўкруглыя выступы. Вырazы і выступы маюць аднолькавы дыяметр 12 мм (рыс. 233). Знайдзіце плошчу гэтага фрагмента пазла ў квадратных сантыметрах.



Рыс. 233

Рэальная геаметрыя

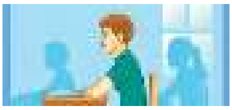
З квадратнага ліста металу неабходна выразаць 4 аднолькавыя кругі найбольшага дыяметра (рыс. 234). Вызначце, колькі працэнтаў складуць адходы.



Рыс. 234

Цікава ведаць. У 1987 г. было заснавана неафіцыйнае свята — дзень ліку π, які адзначаюць аматары матэматыкі 14 сакавіка (3-і месяц, 14-е чысло).

Доўгі час матэматыкі імкнуліся знайсці як мага большую колькасць знакаў ліку π пасля коскі. Лёгка запомніць дванаццаць першых знакаў ліку $\pi \approx 3{,}14159265358\ldots$ пры дапамозе наступнай лічылкі: «*Это я знаю и помню прекрасно, но многие цифры мне лишни, напрасны*», — у якой колькасць літар у кожным слове азначае наступную лічбу ліку π: «это» — 3, «я» — 1, «знаю» — 4 і г. д.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

275. Знайдзіце прыбліжана даўжыню акружнасці, калі яе радыус роўны:

а) 10 см; б) 1,5 дм; в) 0,05 м; г) $3\frac{1}{2}$ км.

(Пры вылічэннях вазьміце $\pi \approx 3{,}14$.)

276. Знайдзіце, акругліўшы да цэлых, радыус акружнасці, калі яе даўжыня роўна:

а) 60 см; б) 300 мм; в) 6,28 дм; г) 1 м.

277. Даўжыня акружнасці роўна 600 см. Знайдзіце даўжыню яе дугі, якая змяшчае:
а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 24°.

278. Даўжыня дугі акружнасці роўна 12 см. Вылічыце радыус акружнасці (акругліўшы вынік да 0,1 см), калі градусная мера дугі складае:
а) 45°; б) 120°.

279. Знайдзіце градусную меру дугі (акругліўшы адказ да 1°), калі дадзены яе радыус R і даўжыня l:
а) $R = 10$ см, $l = 15$ см; б) $R = 36$ м, $l = 12$ м.

280. Вылічыце прыблізна градусную меру дугі, даўжыня якой роўна радыусу акружнасці. Адказ акругліце да 1°.

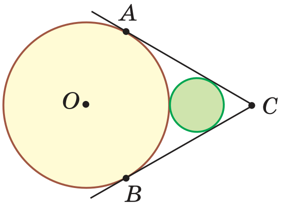
281. Даўжыня акружнасці большая за яе дыяметр на 12 см. Знайдзіце прыблізна радыус акружнасці. Вынік акругліце да 0,1 см.

282. Радыус закруглення чыгункі (рыс. 235) роўны 1800 м, даўжыня дугі закруглення роўна 900 м. Знайдзіце, колькі прыкладна градусаў змяшчае дуга закруглення (пры разліках вазьміце $\pi \approx 3$).

Рыс. 235

283. а) Вызначце, на колькі павялічыцца даўжыня C акружнасці, калі яе радыус R павялічыць на 1 см.
б) У колькі разоў павялічыцца плошча круга, калі яго радыус павялічыць у 2 разы?

284. Дуга AB акружнасці змяшчае 120°. Праз яе пункты A і B праведзены датычныя AC і BC (рыс. 236). Дакажыце, што даўжыня акружнасці, якая датыкаецца да дадзенай акружнасці і прамых AC і BC, роўна даўжыні дугі AB.



Рыс. 236

285. Знайдзіце прыблізна плошчу круга, узяўшы $\pi \approx 3{,}14$, калі радыус круга роўны:
а) 5 см; б) 10 м; в) 2,5 дм; г) 1 км.

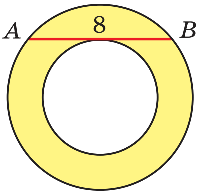
286. Знайдзіце прыблізна радыус круга (акругліўшы адказ да 0,1), калі плошча круга роўна:
а) 4 см^2; б) 314 дм^2.

287. Плошча накрыўкі люка роўна 0,5 м^2. Знайдзіце дыяметр люка. Адказ запішыце ў сантыметрах.

288. а) Вылічыце плошчу круга, калі даўжыня яго акружнасці роўна 6,28 см. Адказ акругліце да 0,01 см^2.
б) Вылічыце даўжыню акружнасці, калі плошча круга, абмежаванага гэтай акружнасцю, роўна 15 см^2. Адказ акругліце да 0,01 см.

289. а) Знайдзіце плошчу кольца, утворанага дзвюма канцэнтрычнымі акружнасцямі з радыусамі $R = 8$ см і $r = 5$ см.

б) Дадзена кольца (рыс. 237). Хорда *AB* большай акружнасці датыкаецца да меншай акружнасці і роўна 8 см. Знайдзіце плошчу кольца.



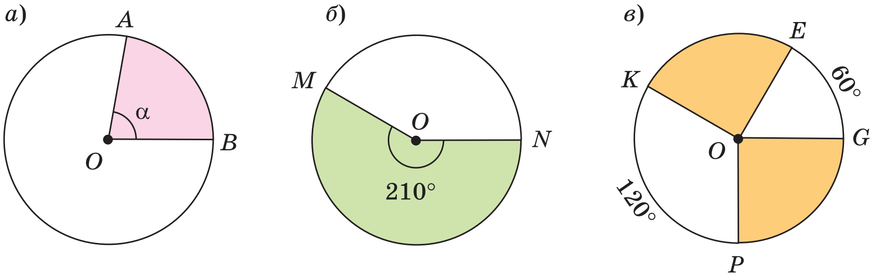
Рыс. 237

290. У акружнасць упісаны квадрат, у гэты квадрат упісана акружнасць. Знайдзіце адносіну плошчаў кругоў, абмежаваных гэтымі акружнасцямі.

291. Плошча круга роўна *Q*. Знайдзіце плошчу сектара з дугой, якая змяшчае:

а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 270°.

292. а) На рысунку 238, *а*) плошча зафарбаванага сектара адносіцца да плошчы круга як 2 : 9. Знайдзіце градусную меру вугла сектара.
б) На рысунку 238, *б*) плошча круга складае 120 см^2. Знайдзіце плошчу зафарбаванага сектара.
в) На рысунку 238, *в*) дугі *EG* і *KP* змяшчаюць 60° і 120° адпаведна, плошча незафарбаванага сектара *EOG* роўна 90 см^2. Знайдзіце суму плошчаў зафарбаваных сектараў *KOE* і *POG*.

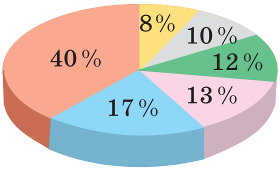


Рыс. 238

293. На рысунку 239 паказана кругавая дыяграма. Знайдзіце плошчу сектара, які складае 40 %, калі радыус круга роўны 10 см.

294. Знайдзіце адносіну плошчаў упісанага і апісанага кругоў:

а) для правільнага трохвугольніка;
б) для правільнага шасцівугольніка.



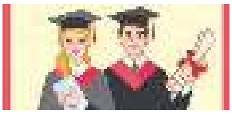
Рыс. 239

295. Знайдзіце плошчу сектара круга з вуглом α і радыусам R, калі:

а) $R = 4$ см, $\alpha = 15°$; б) $R = 2$ м, $\alpha = 135°$.

296. а) Вылічыце радыус сектара, калі яго плошча роўна 16π, а дуга сектара змяшчае $40°$.

б) Вылічыце плошчу сектара, калі плошча круга роўна 256π, а даўжыня дугі гэтага сектара роўна 4π.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

297*. З тонкага металічнага круга выразалі правільны трохвугольнік найбольшай плошчы. Вызначце, колькі працэнтаў склалі адходы. Адказ акругліце да $1\ \%$.

298*. Вызначце плошчу сегмента акружнасці радыуса R з дугой, роўнай α градусаў, калі:

а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 270°$.

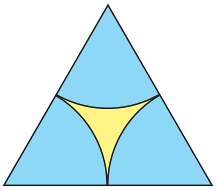
299*. З канцоў дугі AB да акружнасці, радыус якой роўны R, праведзены датычныя, якія перасякаюцца ў пункце D. Вызначце плошчу фігуры, змешчанай паміж гэтымі датычнымі і дугой, калі градусная мера дугі AB роўна:

а) $90°$; б) $120°$.

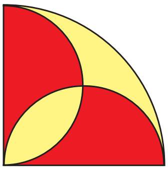
300*. а) Дадзены правільны трохвугольнік са стараной, роўнай 2. Пабудаваны тры сектары з цэнтрамі ў вяршынях трохвугольніка і радыусамі, роўнымі 1 (рыс. 240). Знайдзіце плошчу жоўтай часткі трохвугольніка.

б) Дадзены сектар з вуглом $90°$ і радыусам, роўным 4 (рыс. 241). На яго радыусах пабудаваны паўкругі. Знайдзіце плошчу чырвонай часткі сектара.

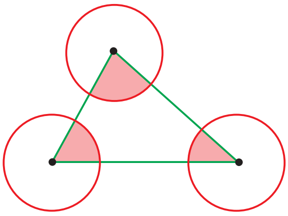
301*. На рысунку 242 паказаны тры кругі роўнага радыуса плошчай $12\ \text{см}^2$ кожны, цэнтры якіх знаходзяцца ў вяршынях адвольнага трохвугольніка. Знайдзіце суму плошчаў трох зафарбаваных сектараў гэтых кругоў.



Рыс. 240



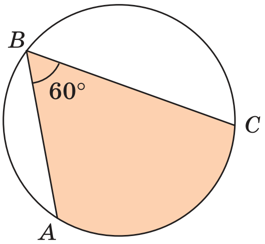
Рыс. 241



Рыс. 242

302*. Два кругі радыуса R кожны размешчаны на плоскасці так, што акружнасць аднаго праходзіць праз цэнтр другога. Вызначце плошчу агульнай часткі кругоў.

303*. Дадзены круг радыуса 1 і ўпісаны вугал ABC, роўны 60° (рыс. 243). Знайдзіце найбольшае значэнне плошчы зафарбаванай фігуры.



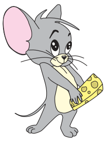
Рыс. 243

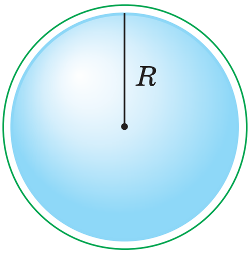
Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чаму фразеалагізм «квадратура круга» азначае «неразрашымую задачу».

Гімнастыка розуму

Будзем меркаваць, што зямны шар уздоўж экватара (даўжыня экватара прыкладна роўна 40 000 км) абцягнулі ніткай. Затым гэту нітку падоўжылі на 20 см і раўнамерна (на аднолькавай адлегласці ад паверхні Зямлі) размясцілі па акружнасці над экватарам (рыс. 244). Ці зможа ў атрыманы зазор паміж ніткай і паверхняй Зямлі пралезці мышка?

Знайдзіце памер гэтага зазору.

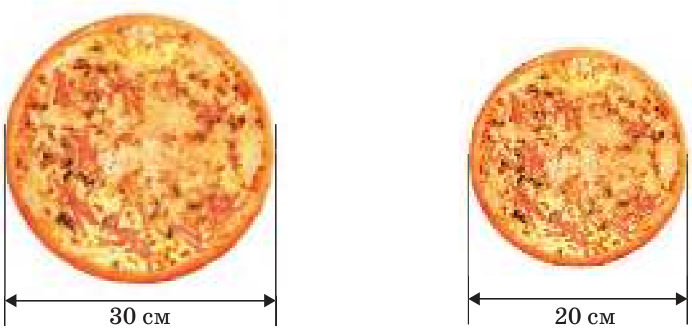




Рыс. 244

Рэальная геаметрыя

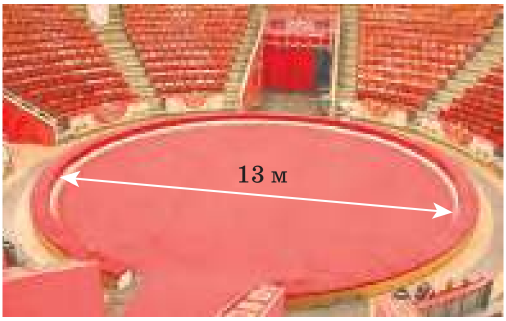
Піца дыяметрам 30 см каштуе 30 р. Колькі павінна каштаваць піца таго ж віду дыяметрам 20 см (рыс. 245)? Падказка: адказ 20 р. няправільны.



Рыс. 245

Цікава ведаць. Беларускі дзяржаўны цырк знаходзіцца на праспекце Незалежнасці ў Мінску. Першы паказ у ім адбыўся ў 1959 г. Мінскі цырк змяшчае 1625 гледачоў. Дыяметр цыркавой арэны (манежа) роўны 13 м, як і ва ўсіх цырках свету.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як цырк звязаны з геаметрыяй. У прыватнасці, што агульнае маюць словы «цырк» і «цыркуль»? Чаму дыяметр манежа роўны менавіта 13 м?



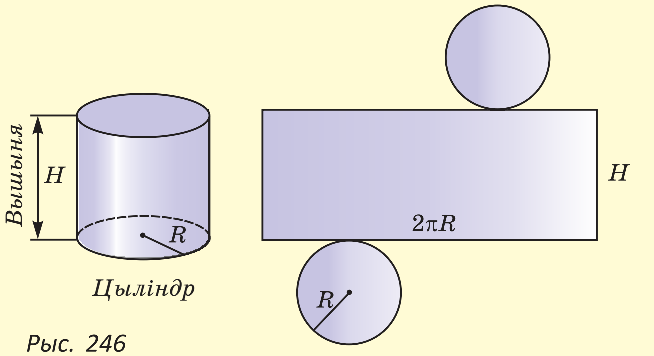
Заданне. а) Вызначце даўжыню акружнасці манежа. Падлічыце, за колькі секунд малпа можа аббегчы манеж па акружнасці со скорасцю 10 км/г.

б) Вызначце плошчу арэны ў квадратных метрах. Высветліце, колькі вёдраў пілавіння спатрэбіцца, каб засыпаць манеж, калі адным вядром можна засыпаць 9 дм^2.

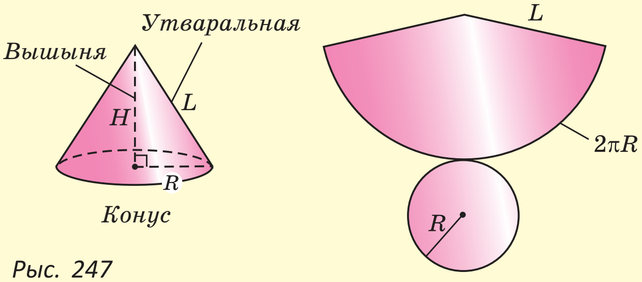
Геаметрыя 3D

Напомнім, што ў 8-м класе мы разгледзелі два целы вярчэння: цыліндр і конус. На рысунках 246 і 247 паказаны гэтыя целы і развёрткі іх паверхні на плоскасць.

Выканайце заданні 1 і 2, звязаныя з гэтымі прасторавымі фігурамі.



Рыс. 246

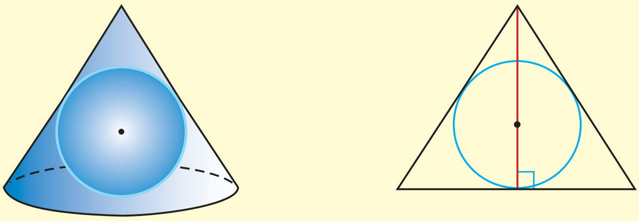


Рыс. 247

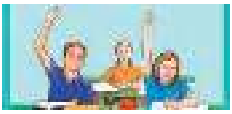
Заданне 1. Знайдзіце плошчу паверхні цыліндра, вышыня якога роўна 10 см, а радыус асновы — 4 см. Значэнне π вазьміце роўным 3.

Заданне 2. Знайдзіце плошчу паверхні конуса, вышыня якога роўна 4 см, а радыус асновы — 3 см. Значэнне π вазьміце роўным 3.

Заданне 3. Шар называецца ўпісаным у конус, калі ён датыкаецца да асновы конуса ў яго цэнтры і да бакавой паверхні па некаторай акружнасці (рыс. 248). Цэнтр шара пры гэтым ляжыць на вышыні конуса. Калі правесці плоскасць праз вышыню конуса, то ў сячэнні конуса атрымаецца раўнабедраны трохвугольнік, а ў сячэнні ўпісанага шара — яго вялікі круг, упісаны ў названы раўнабедраны трохвугольнік. Знайдзіце радыус шара, упісанага ў конус з радыусам асновы, роўным 6 см, і вышынёй, роўнай 4 см.



Рыс. 248



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Формулу даўжыні акружнасці.
2. Формулу плошчы круга.
3. Алгарытм знаходжання даўжыні дугі.
4. Алгарытм знаходжання плошчы сектара.
5. Алгарытм знаходжання плошчы сегмента.

Умеем

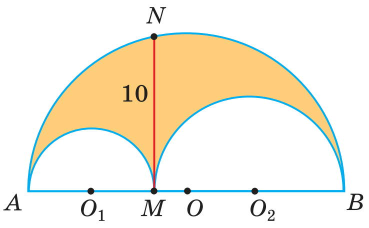
1. Знаходзіць даўжыню акружнасці па яе радыусе.
2. Знаходзіць плошчу круга па яго радыусе.
3. Вызначаць даўжыню дугі акружнасці па радыусе і градуснай меры дугі.
4. Вызначаць плошчу сектара па яго радыусе і вугле.
5. Вызначаць плошчу сегмента па радыусе акружнасці і градуснай меры дугі сегмента.
6. Выводзіць формулу даўжыні акружнасці.
7. Выводзіць формулу плошчы круга.

§ 20*. Крэатыўная геаметрыя

1. Сярпкі Гіпакрата

Сярпкамі Гіпакрата называюць серпападобныя фігуры, абмежаваныя дугамі дзвюх акружнасцей.

Задача 1. *На адрэзках AB, AM і MB пабудаваны паўкругі з цэнтрамі ў пунктах O, O_1 і O_2. $NM \perp AB$, $NM = 10$ (рыс. 249). Знайсці плошчу зафарбаванай часткі вялікага паўкруга.*



Рыс. 249

Рашэнне. Плошча зафарбаванай фігуры роўна рознасці плошчаў паўкруга з дыяметрам $AB = 2R$ і двух паўкругоў з дыяметрамі $AM = 2R_1$ і $MB = 2R_2$, г. зн.

$$S_{ANBM} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot R_1^2}{2} + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left((2R)^2 - \left((2R_1)^2 + (2R_2)^2\right)\right) =$$

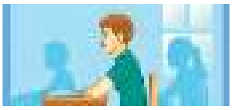
$$= \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - \left(AM^2 + MB^2\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left((AM + MB)^2 - \left(AM^2 + MB^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot 2AM \cdot MB = \frac{\pi}{4} \cdot AM \cdot MB.$$

Паколькі $\angle ANB = 90°$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр AB, то NM — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ANB, праведзеная да гіпатэнузы. А вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, гэта сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $MN^2 = AM \cdot MB$. Такім чынам, $S_{ANBM} = \frac{\pi}{4} \cdot MN^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 25\pi$.

Адказ: 25π.

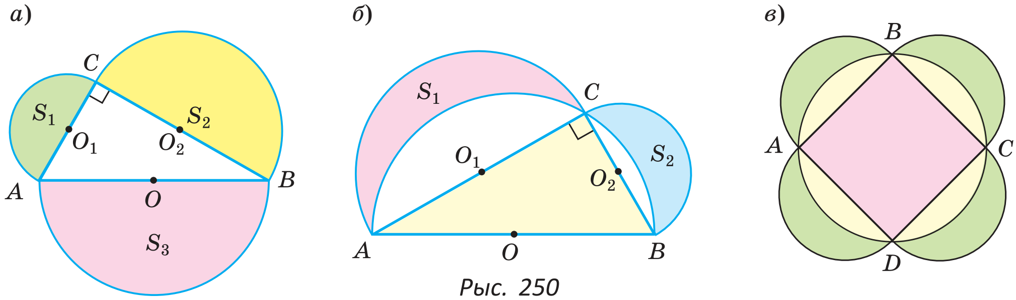
Пры дапамозе **Інтэрнэту** высвятліце, ці адзін і той жа чалавек сфармуляваў клятву Гіпакрата і даследаваў гіпакратавы сярпкі.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

304. На старанах прамавугольнага трохвугольніка ABC як на дыяметрах пабудаваны паўкругі (рыс. 250, *а*). Дакажыце, што $S_1 + S_2 = S_3$.

305. На старанах прамавугольнага трохвугольніка ABC як на дыяметрах пабудаваны паўкругі (рыс. 250, *б*). Знайдзіце суму плошчаў сярпкоў Гіпакрата $S_1 + S_2$, калі $AC = 12$, $BC = 5$.



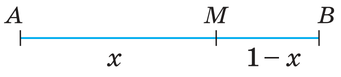
Рыс. 250

306. Каля квадрата $ABCD$ апісаны круг, а на яго старанах пабудаваны паўкругі як на дыяметрах (рыс. 250, *в*). Дакажыце, што сума плошчаў зялёных сярпкоў роўна плошчы квадрата.

2. Залатое сячэнне

«Залатое сячэнне», або «боская прапорцыя», — так называюць матэматыкі дзяленне адрэзка некаторым пунктам на часткі так, што большы з атрыманых адрэзкаў з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным (сярэднім геаметрычным) паміж меншым адрэзкам і цэлым. Інакш кажучы, большы адрэзак павінен так адносіцца да меншага, як цэлы адрэзак адносіцца да большага. Калі на адрэзку AB адзначаны пункт M і $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$, то адрэзак AM — сярэдняе прапарцыянальнае адрэзкаў AB і MB. Таму пункт M дзеліць адрэзак AB у адносіне залатога сячэння.

Няхай $AB = 1$, $AM = x$, $MB = 1 - x$ (рыс. 251).



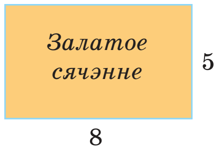
Рыс. 251

Тады $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, адкуль $x^2 + x - 1 = 0$. Улічыўшы, што $x > 0$, атрымаем $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx$ $\approx 0{,}618033989...$

Такім чынам, большы адрэзак AM складае прыблізна 62 %, а меншы адрэзак MB — прыблізна 38 % усяго адрэзка AB.

Лік $\Phi = \frac{1}{x} \approx 1{,}618033989...$ — лічыцца адносінай залатога сячэння. Ён прыкладна роўны адносіне 8 : 5 (рыс. 252).

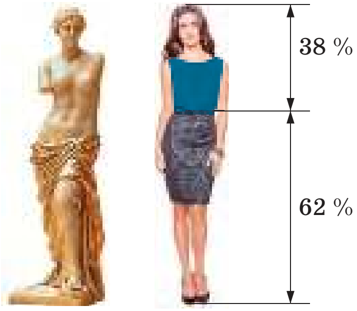
Залатое сячэнне валодае пэўнай гармоніяй, якую чалавек знаходзіць прыгожай. Многія мастацкія, музычныя, паэтычныя творы, шэдэўры архітэктуры маюць у сваёй структуры залатое сячэнне. Доследным шляхам вызначана, што аптымальным чалавеку здаецца прамавугольнік, даўжыня і шырыня якога знаходзяцца ў адносіне залатога сячэння. Фізіёлагі тлумачаць гэта тым, што поле зроку чалавека, г. зн. тая частка навакольнага свету, якую бачыць чалавек, уяўляе сабой



Рыс. 252

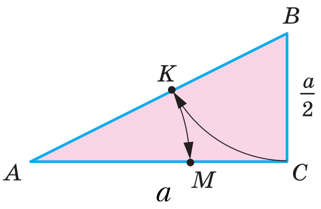
прамавугольнік са старанамі, якія знаходзяцца ў адносіне залатога сячэння.

Вядома, напрыклад, што ў знакамітай скульптуры Венеры Мілоскай (рыс. 253) — эталоне жаночай прыгажосці — талія дзеліць фігуру ў адносіне залатога сячэння.



Рыс. 253

Характэрны адзін *гістарычны факт*. Калі інфармацыя аб Венеры Мілоскай і залатым сячэнні была апублікавана ў адным з папулярных часопісаў пачатку XX ст., то ў крамах паблізу жаночых гімназій зніклі кравецкія метры. Іх раскупілі дзяўчыны-гімназісткі, каб праверыць, наколькі іх фігура блізкая да ідэалу і якой вышыні абцас трэба насіць, каб да яго наблізіцца.



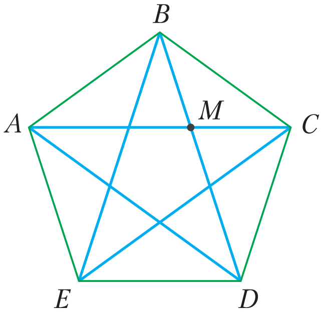
Рыс. 254

Пакажам спосаб дзялення адрэзка ў адносіне залатога сячэння пры дапамозе цыркуля і лінейкі. Няхай дадзены адрэзак, роўны a. Пабудуем прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $AC = a$ і $BC = \frac{a}{2}$ (рыс. 254). На гіпатэнузе AB адкладзём адрэзак BK, роўны адрэзку BC. Затым на катэце AC адкладзём адрэзак AM, роўны адрэзку AK. Пункт M дзеліць адрэзак AC у адносіне залатога сячэння, г. зн. $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Пераканайцеся ў гэтым самастойна.

3. Пабудова правільнага пяцівугольніка

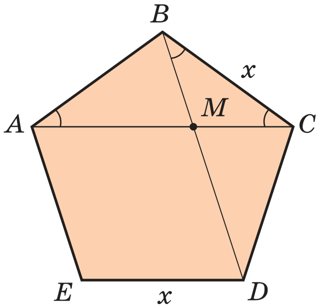
З даўніх часоў пабудове правільных многавугольнікаў пры дапамозе цыркуля і лінейкі матэматыкі надавалі вялікую ўвагу. Старажытныя грэкі ўмелі будаваць правільныя трохвугольнікі, чатырохвугольнікі, пяцівугольнікі, а таксама правільныя многавугольнікі, якія атрымліваюцца падваеннем колькасці іх старон: 6-вугольнікі, 8-вугольнікі, 10-вугольнікі і г. д. Далей справа зайшла ў тупік: яны не маглі знайсці спосаб пабудовы правільных 7-вугольнікаў, 9-вугольнікаў, 11-вугольнікаў. І толькі праз 2000 гадоў выдатны нямецкі матэматык XVII в. Карл Гаўс рашыў гэту матэматычную праблему. Будучы 19-гадовым юнаком, ён даказаў, што можна пабудаваць правільны 17-вугольнік, а вось 7-вугольнік, 9-вугольнік, 11-вугольнік, 13-вугольнік цыркулем і лінейкай пабудаваць нельга. Задача аб пабудове правільнага 17-вугольніка была яго першым навуковым адкрыццём. Нягледзячы на выдатныя дасягненні Гаўса ў вобласці матэматыкі, гэтай першай сваёй рэшанай праблеме ён надаваў такое значэнне, што ў канцы жыцця завяшчаў намаляваць на магільным камяні правільны 17-вугольнік.

Разгледзім правільны пяцівугольнік. Калі ў ім правесці ўсе дыяганалі (рыс. 255), то атрымаецца зорка (зорчаты пяцівугольнік). Зорка была сімвалам школы Піфагора. Паказальна тое, што пункты перасячэння дыяганалей пяцівугольніка дзеляць іх у адносіне залатога сячэння: $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Дакажам гэта.



Рыс. 255

Паколькі $\triangle ABC$ і $\triangle BCD$ — роўныя раўнабедраныя трохвугольнікі (рыс. 256), то $\angle BAC = \angle ACB = \angle DBC$. Паколькі $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE$ (дакажыце самастойна), то $AMDE$ — паралелаграм, таму $AM = ED = x$. Але $BC = ED = x$ як стораны пяцівугольніка. З падобнасці трохвугольнікаў ABC і BMC (па двух вуглах) вынікае $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$, або $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{MC}$. Такім чынам, пункт M дзеліць адрэзак AC у адносіне залатога сячэння.



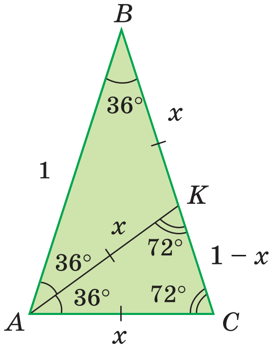
Рыс. 256

Разгледзім задачу аб пабудове правільнага пяцівугольніка пры дапамозе цыркуля і лінейкі. Для пабудовы правільнага пяцівугольніка можна ўзяць адвольны адрэзак d, роўны дыяганалі правільнага пяцівугольніка, і падзяліць яго ў адносіне залатога сячэння. Атрымаўшы адрэзак x, роўны старане правільнага пяцівугольніка, можна лёгка пабудаваць правільны пяцівугольнік. Працягніце пабудову самі.

Задача аб пабудове правільнага пяцівугольніка раўназначна пабудове вуглоў, роўных 36°, 72°, 108°, а таксама пабудове раўнабедранага трохвугольніка, бісектрыса вугла пры аснове якога разбівае дадзены трохвугольнік на два раўнабедраныя. Няхай у трохвугольніку ABC (рыс. 257) $\angle B = 36°$, AK — бісектрыса і $AB = BC = 1$. Абазначым $AC = AK = KB = x$, $KC = 1 - x$. З уласцівасці бісектрысы вынікае $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, адкуль $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Такім чынам, пункт K дзеліць адрэзак BC у адносіне залатога сячэння. З трохвугольніка ABC па тэарэме косінусаў

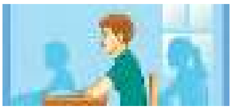
$$\cos 36° = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{2 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$



Рыс. 257

Адзначым, што старана AC трохвугольніка ABC з'яўляецца старанoй правільнага дзесяцівугольніка, упісанага ў акружнасць радыусам, роўным AB.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

307. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце:

а) правільны пяцівугольнік па дадзенай яго старане a;
б) правільны пяцівугольнік, упісаны ў дадзеную акружнасць.

308. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудуйце правільны дзесяцівугольнік з дадзенай старанoй b.

309. Знайдзіце дакладнае значэнне $\cos 72°$, выкарыстаўшы рысунак 257.

Цікава ведаць. **Карл Фрыдрых Гаўс** — адзін з выдатных матэматыкаў свету, яго называлі «каралём матэматыкаў».

Сын печніка, які нарадзіўся ў Германіі, ён праявіў здольнасці да матэматыкі ў раннім дзяцінстве. Пасля заканчэння школы Гаўс паступіў у Гётынгенгскі ўніверсітэт на аддзяленне філалогіі і хацеў стаць паэтам. Але пазней Гаўс захапіўся адной матэматычнай задачай і выбраў сваёй прафесіяй матэматыку.

ТЭМЫ РЭФЕРАТАЎ

1. Квадратура круга.
2. Залатое сячэнне.
3. Карл Гаўс і яго дасягненні.
4. Задача Дыдоны.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя, 9» можна знайсці на сайце: http://e-vedy.adu.by, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 9 кл.».

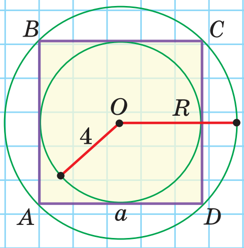
ЗАПАМІНАЕМ

1. Для квадрата са стараной a справядліва: $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.
2. Для правільнага трохвугольніка са стараной a справядліва:
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$
3. Для правільнага шасцівугольніка са стараной a справядліва:
$$R = a, \; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$
4. Даўжыня акружнасці знаходзіцца па формуле $C = 2\pi R$.
5. Плошча круга знаходзіцца па формуле $S = \pi R^2$.
6. Даўжыня дугі, якая змяшчае $n°$, знаходзіцца па формуле $l_{\text{дугі}} = \frac{\pi R}{180°} \cdot n°$.
7. Плошча сектара з вуглом, роўным $n°$, знаходзіцца па формуле $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$.

ПРАВЯРАЕМ СЯБЕ

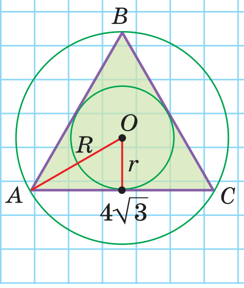
Тэст 1

$ABCD$ — квадрат. Знайдзіце a і R.



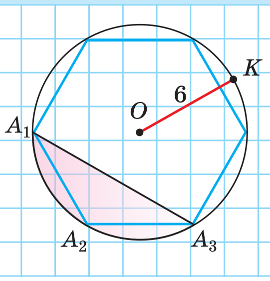
Тэст 2

$\triangle ABC$ правільны. Знайдзіце R і r.



Тэст 3

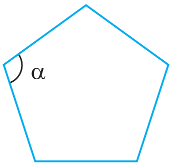
Дадзены правільны шасцівугольнік, радыус яго апісанай акружнасці $OK = 6$. Знайдзіце плошчу сегмента $A_1A_2A_3$.



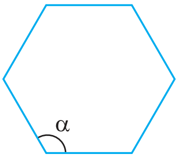
Падрыхтоўка да кантрольнай работы № 4

1. Знайдзіце вугал α правільнага n-вугольніка.

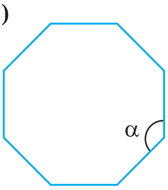
а)



б)

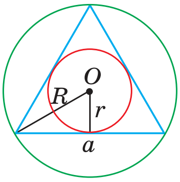


в)

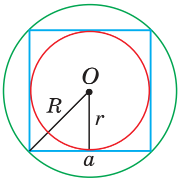


2. Знайдзіце пазначаныя элементы правільных многавугольнікаў.

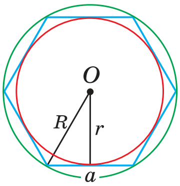
а) $a = 4\sqrt{3}$. R — ? r — ?



б) $r = 6$. a — ? R — ?

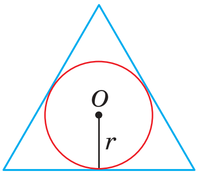


в) $R = 2\sqrt{3}$. a — ? r — ?

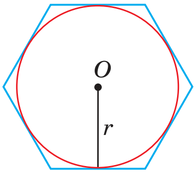


3. Знайдзіце пазначаную велічыню для правільнага многавугольніка.

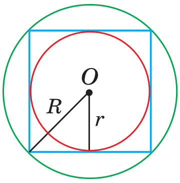
а) $S = 16\sqrt{3}$. r — ?



б) $r = 2\sqrt{3}$. S_6 — ?

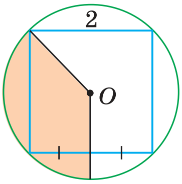


в) $R + r = 2 + \sqrt{2}$. S_4 — ?

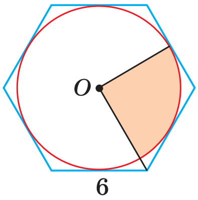


4. Дадзены правільны n-вугольнік. Знайдзіце плошчу і перыметр зафарбаванай фігуры, ведаючы старану n-вугольніка.

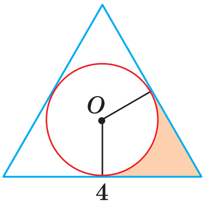
а)



б)

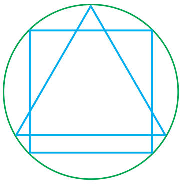


в)

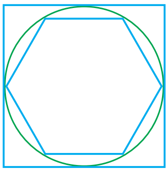


5*. Знайдзіце адносіну плошчаў правільных многавугольнікаў.

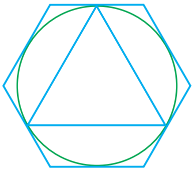
а) $S_3 : S_4$ — ?



б) $S_4 : S_6$ — ?



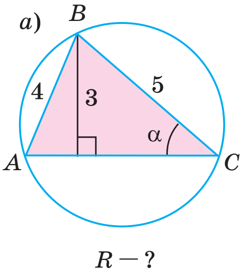
в) $S_3 : S_6$ — ?



Паўтарэнне главы III

1. Тэарэма сінусаў

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad S = \frac{abc}{4R}$$



Задача. Знайсці:

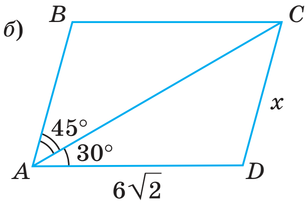
а) радыус R апісанай акружнасці $\triangle ABC$;

б) старану x паралелаграма $ABCD$.

Рашэнне.

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{4}{\sin\alpha} = 2R$, $\frac{4}{\frac{3}{5}} = 2R$, $R = 3\frac{1}{3}$;

б) $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, $x = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6.$



Адказ: а) $3\frac{1}{3}$; б) 6.

2. Тэарэма косінусаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

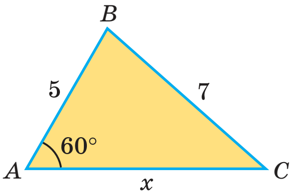
Задача. Знайсці старану x трохвугольніка ABC.

Рашэнне.

$7^2 = 5^2 + x^2 - 2\cdot 5\cdot x\cdot\cos 60^\circ$, $49 = 25 + x^2 - 10\cdot x\cdot\frac{1}{2}$,

$x^2 - 5x - 24 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 8$.

Адказ: 8.



3. Уласцівасць дыяганалей паралелаграма

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

4. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Задача. Знайсці плошчу трохвугольніка ABC.

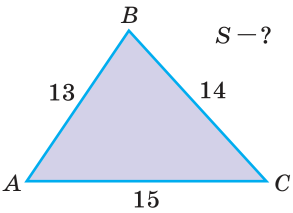
Рашэнне.

$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$, $p - a = 21 - 13 = 8$,

$p - b = 21 - 14 = 7$, $p - c = 21 - 15 = 6$,

$S = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \sqrt{3\cdot 7\cdot 8\cdot 7\cdot 2\cdot 3} = 3\cdot 7\cdot 4 = 84.$

Адказ: 84.



Паўтарэнне главы IV

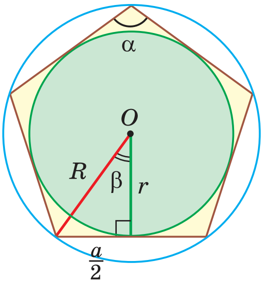
1. Правільны *n*-вугольнік

Усе стораны і ўсе вуглы роўныя.

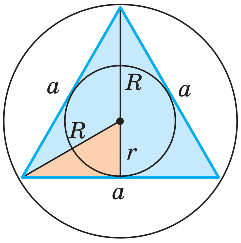
Можна апісаць і можна ўпісаць акружнасць, іх цэнтры супадаюць.

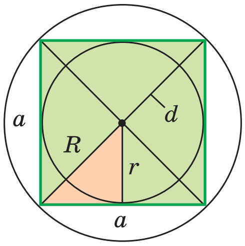
$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$ — унутраны вугал.

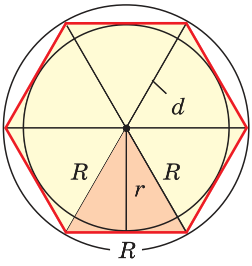
$$R = \frac{a}{2} : \sin\beta = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}, \qquad r = \frac{a}{2} : \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$



2. Правільны трохвугольнік, чатырохвугольнік, шасцівугольнік





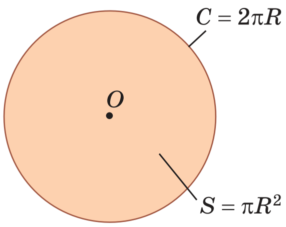


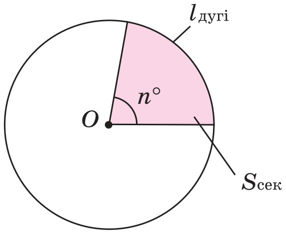
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$d = a\sqrt{2}, \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$$
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{a}{2}$$

$$a = R, \quad S = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$d = 2R, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

3. Даўжыня акружнасці і плошча круга





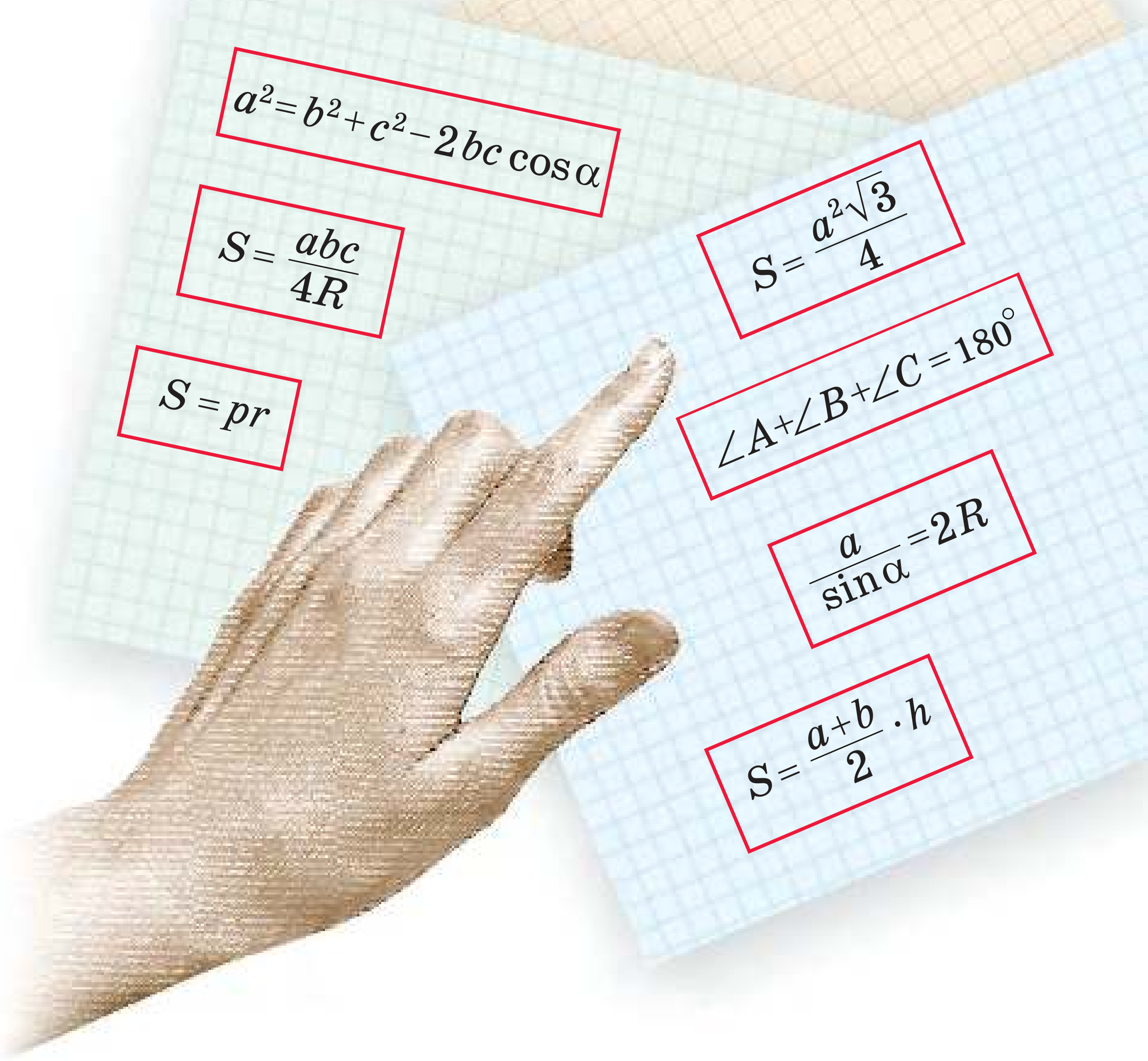
4. Даўжыня дугі

$$\frac{l_{\text{дугі}}}{2\pi R} = \frac{n°}{360°}$$

5. Плошча сектара

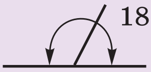
$$\frac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2} = \frac{n°}{360°}$$

Паўтарэнне геаметрыі 7– 9 класаў

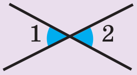


клас

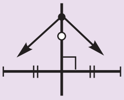
1 Сумежныя



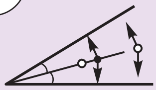
2 Вертыкальныя



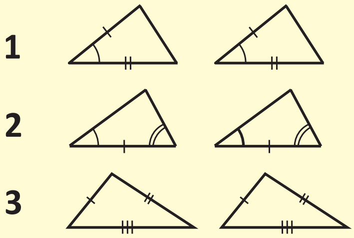
3 Пасярэдні перпендыкуляр

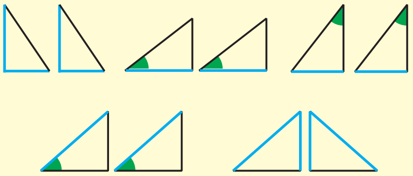


4 Бісектрыса



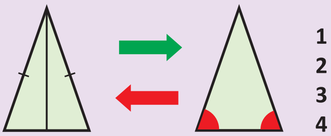
5 Прыметы роўнасці трохвугольнікаў



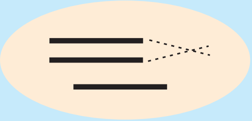


6 Раўнабедраны

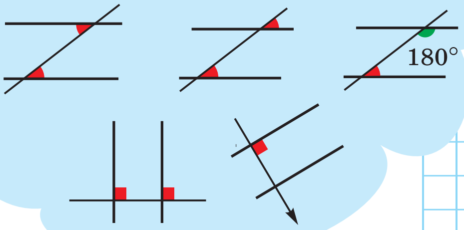
Уласцівасці Прыметы



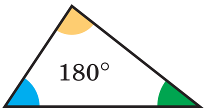
7 Паралельныя прамыя



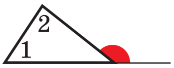
Прыметы ўласцівасці



8 Сума вуглоў трохвугольніка



Знешні вугал роўны ∠1+∠2

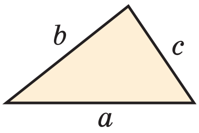


9 Няроўнасць трохвугольніка

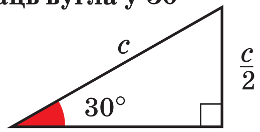
$a < b + c$

$b < a + c$

$c < a + b$

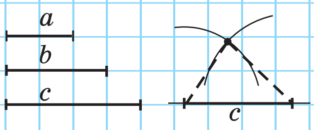


10 Катэт, які ляжыць супраць вугла ў 30°

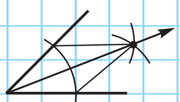


11 Задачы на пабудову

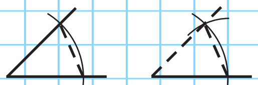
Трохвугольніка



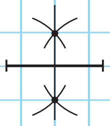
Бісектрысы



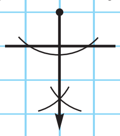
Вугла, роўнага дадзенаму



Сярэдзіны адрэзка



Перпендыкуляра



Дапоўніце базу ведаў па 7-м класе, прамовіўшы ўголас прапушчаныя фрагменты

1. Сума сумежных вуглоў роўна … .

2. Вертыкальныя вуглы … .

3. Любы пункт пасярэдняга перпендыкуляра да адрэзка роўнааддалены ад канцоў … .

4. Любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон … .

5. Прыметы роўнасці трохвугольнікаў:

1) па дзвюх старанах і … ;
2) па старане і двух … вуглах;
3) па трох … .

Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў:

1) па дзвюх … ;
2) па катэце і прылеглым … ;
3) па катэце і процілеглым … ;
4) па гіпатэнузе і … вугле;
5) па катэце і … .

6. У раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове … , а бісектрыса, праведзеная з вяршыні да асновы, з’яўляецца яго … і … .

7. Калі дзве прамыя перасечаны трэцяй і накрыж леглыя вуглы роўныя, або адпаведныя вуглы роўныя, або сума аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то прамыя … . І наадварот, калі …, то … .

8. На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя трэцяй, … .

9. Прамая, перпендыкулярная адной з паралельных прамых, … і другой прамой.

10. Сума вуглоў трохвугольніка роўна … .

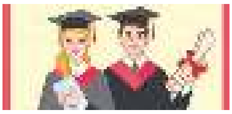
11. Знешні вугал трохвугольніка — гэта вугал, сумежны з яго … .

12. Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух … вуглоў, не … з ім.

13. Няроўнасць трохвугольніка: любая старана трохвугольніка меншая за суму … .

14. Катэт прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палавіне … .

15. У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы … , а супраць большага вугла ляжыць … .



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

16. Бісектрысы сумежных вуглоў узаемна ... .

17. Любы пункт плоскасці, роўнааддалены ад канцоў адрэзка, ляжыць на ... .

18. Геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад канцоў адрэзка, — гэта ... .

19. Геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад старон вугла (якія знаходзяцца ўнутры вугла), — гэта ... .

20. Знешні вугал трохвугольніка большы за любы ... вугал трохвугольніка, не сумежны з ім.

21. Пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ... .

22. Калі ў трохвугольніка вышыня з’яўляецца бісектрысай, або вышыня з’яўляецца медыянай, або медыяна з’яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік ... .

23. Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ... .

24. Катэт прамавугольнага трохвугольніка меншы за ... .

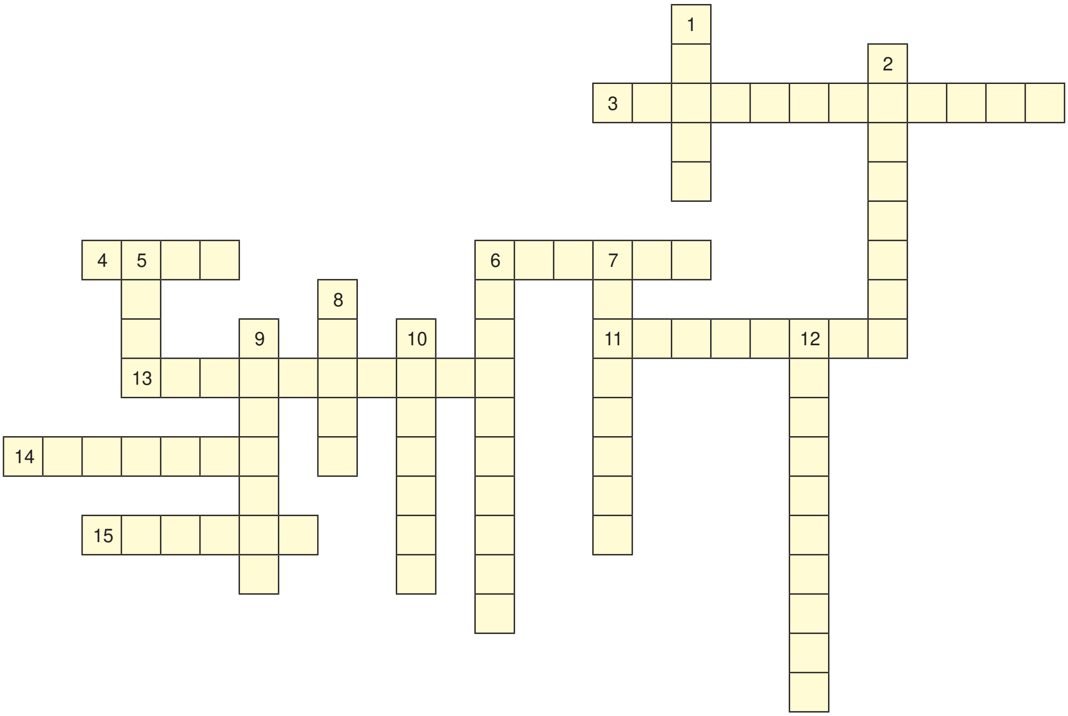
25. Для перпендыкуляра і дзвюх нахіленых, праведзеных з аднаго пункта да дадзенай прамой, і праекцый нахіленых на гэту прамую справядліва: «Перпендыкуляр меншы за нахіленую. Праекцыя нахіленай меншая за саму ... . Большай ... адпавядае большая ..., роўным ... — роўныя ... ».

26. У прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне ... . Калі медыяна трохвугольніка роўна палавіне стараны, да якой яна праведзена, то гэты трохвугольнік — ... .

27. Асноўныя задачы на пабудову пры дапамозе цыркуля і лінейкі:

1) Пабудова трохвугольніка па трох старанах.
2) Пабудова бісектрысы вугла.
3) Пабудова вугла, роўнага дадзенаму.
4) Дзяленне адрэзка папалам.
5) Пабудова прамой, перпендыкулярнай дадзенай.

Ваш выдатны красворд



Па гарызанталі:

3. Чатырохвугольнік, процілеглыя стораны якога паралельныя.

4. Частка плоскасці, абмежаваная акружнасцю.

6. Адзінка вымярэння вуглоў.

11. Чатырохвугольнік, дзве стараны якога паралельныя, а дзве іншыя — не.

13. Прамень, які выходзіць з вяршыні вугла і дзеліць яго папалам.

14. Вугал з вяршыняй на акружнасці, стораны якога перасякаюць акружнасць.

15. Перпендыкуляр, праведзены з вяршыні трохвугольніка да процілеглай стараны трохвугольніка або да яе прадаўжэння.

Па вертыкалі:

1. Адрэзак, які злучае два пункты акружнасці.

2. Два трохвугольнікі, вуглы якіх адпаведна роўныя, а адпаведныя стороны прапарцыянальныя.

5. Паралелаграм, у якога дыяганалі перпендыкулярныя.

6. Старана прамавугольнага трохвугольніка, якая ляжыць супраць яго прамога вугла.

7. Прамая, якая мае толькі адзін агульны пункт з акружнасцю.

8. Старана прамавугольнага трохвугольніка, якая ляжыць супраць яго вострага вугла.

9. Адрэзак, які злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай процілеглай стараны.

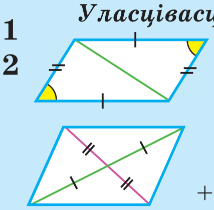
10. Хорда акружнасці, якая праходзіць праз яе цэнтр.

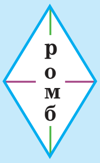
12. Вугал з вяршыняй у цэнтры акружнасці.

Сума вуглоў многавугольніка 180°$(n-2)$

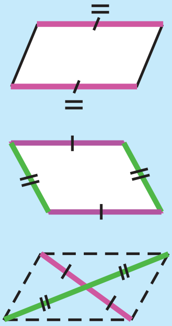
Паралелаграм

Уласцівасці



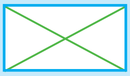


Прыметы



+2. дыяганалі: $\perp$ і біс.

прамавугольнік

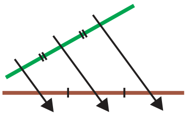


+1. дыяганалі роўныя

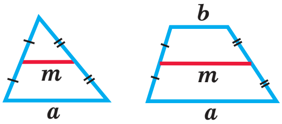
квадрат

клас

Тэарэма Фалеса



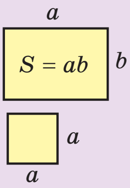
СЯРЭДНЯЯ ЛІНІЯ



$m=\dfrac{a}{2}$ $m=\dfrac{a+b}{2}$

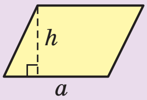
МЕДЫЯНЫ 2 : 1

Плошчы

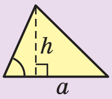


$S=ab$

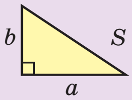
$S=a^2$



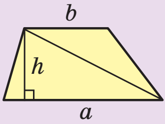
$S=ah$



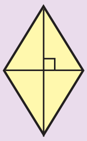
$S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ah$



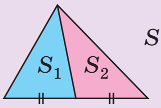
$S=\dfrac{ab}{2}$



$S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h$



$S=\dfrac{d_1d_2}{2}$



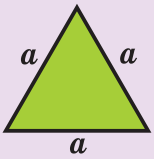
$S_1=S_2$

Медыяна ...
на два роўнавялікія

Піфагор

$c^2=a^2+b^2$

адваротная



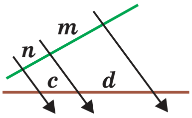
$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Плошчы падобных трохвугольнікаў

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=k^2$$

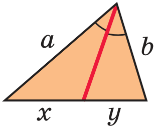
Падобнасць

прымета
прымета
прымета



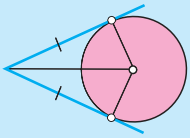
$\dfrac{n}{m}=\dfrac{c}{d}$

Уласцівасць бісектрысы вугла трохвугольніка

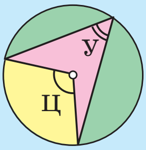


$\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}$

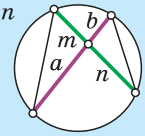
Датычная

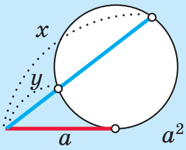


У $=\dfrac{1}{2}$ Ц



$ab=mn$





$a^2=xy$

Дапоўніце базу ведаў па 8-м класе, прамовіўшы ўголас прапушчаныя фрагменты

1. Сума ўнутраных вуглоў n-вугольніка роўна ... .

2. Уласцівасці паралелаграма.

У паралелаграме:
1) сума суседніх вуглоў роўна ... ;
2) дыяганаль дзеліць яго на ... ;
3)—4) процілеглыя стораны ... і процілеглыя вуглы ... ;
5) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца ... .

3. Прыметы паралелаграма.

Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі ў яго:
1) дзве стараны ... і ... ;
2) процілеглыя стораны ... ;
3) дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца ... .

4. Дыяганалі прамавугольніка ... .

5. Прыметы прамавугольніка:

1) калі ў паралелаграма дыяганалі ..., то гэта прамавугольнік;
2) калі ў паралелаграма адзін вугал прамы, то гэта ... ;
3) калі ў чатырохвугольніка ўсе вуглы прамыя, то гэта ... .

6. Дыяганалі ромба ўзаемна ... і ляжаць на бісектрысах яго вуглоў.

7. Прыметы ромба:

1) калі ў паралелаграма дыяганалі ..., то гэта ромб;
2) калі ў паралелаграма дыяганаль ляжыць на бісекрысе яго вугла, то гэта ... .

8. Тэарэма Фалеса: калі на адной старане вугла адмераць роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану, то на другой старане вугла адкладуцца ... .

9. Сярэдняя лінія трохвугольніка ... аснове і роўна ... .

10. Сярэдняя лінія трапецыі ... асновам і роўна іх ... .

11. Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ... і дзеляцца гэтым пунктам у адносіне 2 : 1, лічачы ад вяршыні.

12. Плошча квадрата $S = a^2$; прамавугольніка $S = ab$; паралелаграма $S = ah$; трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ah$; ... трохвугольніка $S = \frac{ab}{2}$; трапецыі $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; ромба $S = \frac{d_1 d_2}{2}$, ... трохвугольніка $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

13. Тэарэма Піфагора: сума квадратаў катэтаў роўна квадрату ... : $a^2 + b^2 = c^2$.

14. Адваротная тэарэма Піфагора: калі сума квадратаў дзвюх старон трохвугольніка роўна квадрату трэцяй стараны, то гэты трохвугольнік ... .

15. Медыяна дзеліць трохвугольнік на два роўнавялікія ... .

16. Адносіна плошчаў падобных трохвугольнікаў роўна адносіне квадратаў адпаведных старон і роўна квадрату каэфіцыента ... .

17. Трохвугольнікі называюцца падобнымі, калі ў іх адпаведныя ... роўныя, а ... прапарцыянальныя.

18. Тры прыметы падобнасці трохвугольнікаў.

Трохвугольнікі падобныя, калі:
1) два ... аднаго трохвугольніка адпаведна роўны двум ... другога трохвугольніка;
2) дзве ... аднаго трохвугольніка адпаведна прапарцыянальны дзвюм ... другога трохвугольніка, а вуглы паміж імі роўныя;
3) тры ... аднаго трохвугольніка адпаведна прапарцыянальны тром ... другога трохвугольніка.

19. Бісектрыса вугла трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, ... прылеглым старанам.

20. Тэарэма Фалеса абагульненая: паралельныя прамыя адсякаюць на старанах вугла ... адрэзкі.

21. Датычная ... радыусу, праведзенаму ў пункт ... .

22. Упісаны вугал роўны ... адпаведнага цэнтральнага вугла.

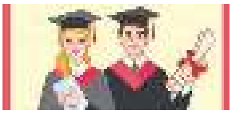
23. Упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу, ...

24. Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, — ... .

25. Вугал паміж перасякальнымі хордамі роўны ... градусных мер дуг, адна з якіх змешчана ўнутры дадзенага вугла, а другая — унутры яму вертыкальнага.

26. Вугал паміж сякучымі, якія выходзяць з пункта па-за акружнасцю, роўны ... градусных мер дуг, змешчаных унутры вугла.

27. Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд ... .



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

28. Вугал паміж хордай і датычнай, якія маюць агульны пункт на акружнасці, роўны ... градуснай меры дугі, змешчанай унутры вугла.

29. Для датычнай і сякучай, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, квадрат адрэзка датычнай роўны здабытку большага адрэзка сякучай на яго … частку.

30. Сума знешніх вуглоў выпуклага многавугольніка, узятых па адным пры кожнай вяршыні, роўна … .

31. Бісектрыса вугла паралелаграма адсякае ад яго раўнабедраны … .

32. Бісектрысы суседніх вуглоў паралелаграма ўзаемна … .

33. Бісектрысы процілеглых вуглоў паралелаграма … .

34. Вугал паміж вышынямі паралелаграма, праведзенымі з адной вяршыні, роўны вуглу пры суседняй … .

35. Сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі … .

36. Плошча трапецыі роўна здабытку сярэдняй лініі на …, г. зн. $S_{\text{тр}} = mh$.

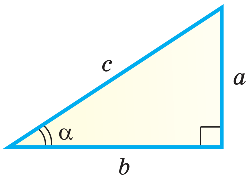
37. Дыяганалі трапецыі дзеляць яе на чатыры трохвугольнікі; трохвугольнікі, прылеглыя да бакавых старон …, а прылеглыя да асноў — … .

38. Вышыня раўнабедранай трапецыі, праведзеная з вяршыні меншай асновы, дзеліць большую аснову на часткі, роўныя паўсуме і … асноў.

39. Сярэдзіны асноў трапецыі, пункт перасячэння яе дыяганалей і пункт перасячэння прадаўжэнняў бакавых старон трапецыі ляжаць на адной … .

40. Плошчы трохвугольнікаў з агульнай вышынёй адносяцца як адпаведныя … .

9 клас



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

$\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

	30°	60°	45°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
$\text{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

Асноўная трыганаметрычная тоеснасць

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

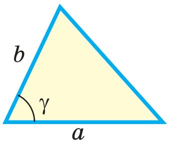
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

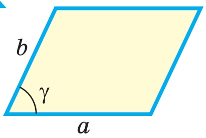
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin 150° = \sin 30°$

$\cos 150° = -\cos 30°$



$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$



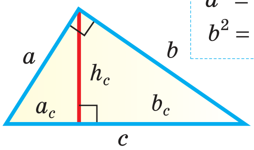
$S_{\text{п}} = ab\sin\gamma$

сярэдняе геаметрычнае

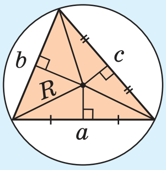
$h_c^2 = a_c \cdot b_c$

$a^2 = c \cdot a_c$

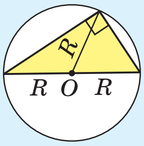
$b^2 = c \cdot b_c$



Апісаная

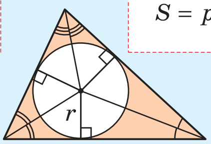


$S = \frac{abc}{4R}$

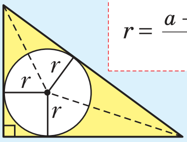


$R = \frac{c}{2}$

Упісаная

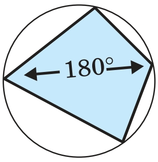


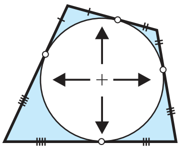
$S = pr$



$r = \frac{a+b-c}{2}$

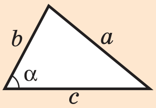
Уласцівасці і прыметы



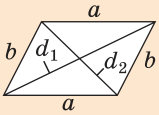


Тэарэма косінусаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



1. $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
2. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$



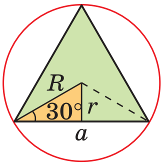
3. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$
4. $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Формула Герона

Тэарэма сінусаў

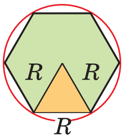
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Правільныя



$a = R\sqrt{3}$

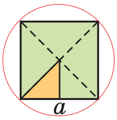
$r = \frac{R}{2}$



$a = R$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$



$r = \frac{a}{2}$

$C = 2\pi R$
даўжыня акружнасці

$S = \pi R^2$
плошча круга

Дапоўніце базу ведаў па 9-м класе, прамовіўшы ўголас прапушчаныя фрагменты

1. Сінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна процілеглага катэта да гіпатэнузы, косінусам — адносіна прылеглага катэта да гіпатэнузы, тангенсам — адносіна процілеглага катэта да прылеглага, катангенсам — адносіна прылеглага катэта да … .

2. $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = …$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$;

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60° = …$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = … .$

3. Формулы для знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = …$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = … .$

4. Сінус тупога вугла роўны сінусу сумежнага з ім вострага вугла, косінус тупога вугла роўны косінусу сумежнага з ім вострага вугла, узятага са знакам … .

5. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = … .$

6. Формулы, якія выражаюць тангенс і катангенс вугла:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{…}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{…}{\sin\alpha}.$$

7. Плошчу трохвугольніка і плошчу паралелаграма можна знайсці па формулах:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\,…, \qquad S_{\text{пар}} = ab\,… .$$

8. Вышыня — ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж … катэтаў на гіпатэнузу:

$$h_c = \sqrt{a_c b_c}\,.$$

Катэт — ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй катэта на …:

$$a = \sqrt{c \cdot a_c}\,, \qquad b = \sqrt{…}\,.$$

9. Цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць у пункце перасячэння …, праведзеных да яго старон.

10. Цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць у пункце перасячэння яго ... .

11. Плошчу трохвугольніка (апісанага многавугольніка) можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе r — радыус ... акружнасці, p — паўперыметр.

12. Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на ..., а радыус роўны палавіне ... .

13. Радыус акружнасці, упісанай у ... трохвугольнік, знаходзіцца па формуле

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

14. У чатырохвугольніка, упісанага ў акружнасць, сума яго процілеглых вуглоў роўна ... . І наадварот, калі ... .

15. У чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, сумы процілеглых ... роўныя паміж сабой. І наадварот, калі ... .

16. Тэарэма сінусаў. Стораны трохвугольніка прапарцыянальны ... . Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу апісанай акружнасці трохвугольніка:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

17. Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на ... паміж імі:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

18. Плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле ... :

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(b - c)}.$$

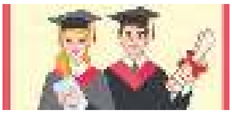
19. У правільным (роўнастароннім) трохвугольніку старана a, радыус R апісанай акружнасці, радыус r упісанай акружнасці, вышыня h і плошча S звязаны формуламі:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \dots, \quad a = R\sqrt{3}, \quad r = \frac{1}{2}R.$$

20. У правільным ... старана a роўна радыусу R апісанай акружнасці.

21. Даўжыня акружнасці радыуса R знаходзіцца па формуле $C = \dots$.

22. Плошча круга радыуса R знаходзіцца па формуле $S = \dots$.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

23. У правільным трохвугольніку старана a, радыус R апісанай акружнасці, радыус r упісанай акружнасці звязаны формуламі:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\dots}.$$

24. Плошчу ... можна знайсці па формуле

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

25. Косінус вугла ... са старанамі a, b і c можна знайсці па формуле

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

26. Сума квадратаў дыяганалей ... роўна суме квадратаў усіх яго старон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Адказы

Глава I

4. д) 1; е) 1.

7. а) $\alpha = 58°$, $\beta = 32°$; б) $\alpha = 38°$, $\beta = 52°$; в) $\alpha = 23°$, $\beta = 67°$.

8. а) $\sin A = \frac{4}{5}$; б) $\cos C = \frac{3}{5}$; в) $\operatorname{tg} \angle CBH = \frac{3}{4}$;
г) $AK = 9{,}6$ см; $\sin \angle ABK = 0{,}96$.

9. $\frac{5}{13}$.

12. $\frac{1}{2}$ і $60°$.

13. а) 7,5; б) 1,5; в) 5.

14. 32 $см^2$.

15. 20 $см^2$.

16. 3,75.

17*. $2 - \frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$.

19*. Указанні. а) Карыстайцеся ўласцівасцю: сінус і косінус вострага вугла меншыя за 1; б) карыстайцеся азначэннямі $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$ і няроўнасцю трохвугольніка.

20*. а) 192 $см^2$; б) 75 $см^2$.

21*. а) Указанне. $\cos A = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{CB}$; б) 8; в) 36.

22. а) $\angle B = 90° - \alpha$; б) $BC = c\sin\alpha$; в) $AC = c\cos\alpha$.

23. а) $BC = \frac{4}{\operatorname{tg}\beta}$ або $BC = 4\operatorname{ctg}\beta$; б) $AB = \frac{4}{\sin\beta}$ або $AB = 4\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}$;
в) $S = \frac{8}{\operatorname{tg}\beta}$ або $S = 8\operatorname{ctg}\beta$.

24. а) 6,4; б) 13,5; в) 9,4.

25. а) $AC = 6$; $BC = 8$; б) $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$; в) $AB = 6$, $AC = 2\sqrt{5}$;
г) $BC = 3$, $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

26. а) $x = 6\sqrt{3}$, $S = 36\sqrt{3}$; б) $x = 8$, $S = 32$; в) $x = 3\sqrt{2}$, $S = 18$;
г) $x = 2\sqrt{3}$, $S = 3\sqrt{3}$.

27. 90 $см^2$.

28. 14 $см^2$.

29. 144 $см^2$.

30*. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

31*. а) $S = a^2\sin\alpha\cos\alpha$; б) $S = \dfrac{a^2 - b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

32*. Вугал $ABC = 90°$. Указанне. Паколькі $\triangle ABM$ раўнабедраны (дакажыце), то $AH = HM = x$. Тады $MC = AM = 2x$. Да $\triangle HBC$ прымяніце ўласцівасць бісектрысы трохвугольніка і знайдзіце $\sin C$, затым $\angle C$, $\angle HBC$.

33*. $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $h_c = c\sin\alpha\cos\alpha$, $b_c = c\cos^2\alpha$, $a_c = c\sin^2\alpha$.

35. а) $\frac{3}{4}$; б) $2\sqrt{2}$.

37. а) 0,8; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; б) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$.

38. 8 см.

39*. а) $\alpha > \beta$. Указанне. Разгледзьце прамавугольныя трохвугольнікі з агульным катэтам, роўным 1; б) $\alpha < \beta$. Указанне. Разгледзьце прамавугольныя трохвугольнікі з агульнай гіпатэнузай, роўнай 5. Або выкарыстайце вынік *ключавой задачы 2* (с. 28).

40*. $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$. Указанне. У прамавугольным трохвугольніку $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Параўнайце $\frac{a}{c}$ і $\frac{a}{b}$, улічыўшы, што c — гіпатэнуза, a і b — катэты.

43*. $\frac{3}{5}$. Указанне. Выкарыстайце формулу $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (гл. папярэднюю задачу) або разгледзьце прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 і 4.

46. а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) –0,8; в) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

47. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

48. а) 6 см і 30 см^2; б) 4 см і 24 см^2.

49. а) 0,9848; б) –0,9962; в) –2,1445; г) –1,1918.

50*. а) 0,3; б) $1\frac{1}{3}$.

51*. а) 1; б) 1; в) –1.

54. а) 10; б) 8; в) $75\sqrt{3}$.

55. а) 39 см^2; б) 80 см^2.

56. а) 16,8 см^2; б) 55 см^2.

57. а) 26 см; б) 32 см.

58. а) 18 см^2; б) 8 см.

61*. а) 12 см; б) 36 см^2.

62*. а) $\frac{ab}{2}$; б) $\frac{d_1d_2}{2}$.

64. а) 15; б) 2; в) 8.

65. а) 10; б) 10; в) 7.

66. 16 см.

67. 6.

68. 4 см.

69. 7,2 $см^2$.

70*. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

71*. 60°.

73. 24.

74. 48.

75. Указанне. $\frac{S_{ABO}}{S_{DCO}} = \frac{BO \cdot AO}{CO \cdot DO} = \frac{BO}{DO} \cdot \frac{AO}{CO}$. Далей карыстайцеся тым, што $\triangle BOC \sim \triangle DOA$.

76. а) Указанне. $\frac{S_{ABC}}{S_{AMK}} = \frac{9 \cdot (12+8)}{(9+6) \cdot 12}$.

78. 27.

79. 7,8.

80. а) $\frac{KO}{OB} = \frac{1}{5}$; б) $\frac{MO}{OC} = 1$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}} = \frac{1}{5}$.

81. 10.

82. $\frac{1}{16}$.

Глава II

86. а) 5; б) 24; в) $2\sqrt{5}$.

87. а) 7; б) 6; в) 8.

88. а) 7,2 см; б) 25 см.

89. 32 $см^2$.

90. а) 6; б) 12; в) 8.

91. а) 125°; б) 28°; в) 90°.

92. а) 1,5 см; б) $3\frac{1}{3}$ см.

93. а) 4 см; б) 2 см. Указанне. Выкарыстайце *ключавую задачу 3* (с. 62).

94. а) 8 см і 4 см; б) $3\sqrt{3}$ $см^2$.

96. а) 8 см; б) $\left(8\sqrt{3}-12\right)$ см.

97. а) 18 $см^2$; б) 3 см. Указанне. Выкарыстайце формулу $S = pr$.

98. 2,5 см.

99. а) 3 см; б) 192 $см^2$.

100. а) 4 см; б) 12,5 см. Указанне. Выкарыстайце для задання а) формулу $S = pr$, для задання б) формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$.

101. а) 55°; б) 116°.

103*. а) 12 см. Указанне. Правядзіце дыяметр BK і разгледзьце $\triangle BCK$; б) 10 см. Указанне. Гл. п. а) або выкарыстайце формулу $R = \frac{ab}{2h_c}$.

104*. а) 10; б) 2.

105*. 6.

106*. 8. Указанне. Знайдзіце каэфіцыент падобнасці трохвугольнікаў MBK і ABC, для чаго правядзіце вышыню BH, якая перасякае адрэзак MK у пункце N, і знайдзіце адносіну $\frac{BN}{BH}$.

109*. 60°.

110. а) 6; б) 2,5; в) 4.

111. а) 9; б) 5; в) 8,5.

112. а) 10 см; б) 15 м; в) 25 дм; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ км.

113. а) 24 см^2; б) 6 см.

114. а) 1 см; б) 2 дм; в) 3 см; г) $\left(4 - 2\sqrt{2}\right)$ м.

115. а) 3; б) 2; в) $2\sqrt{3} - 2$; г) 5.

116. $6\sqrt{2}$ см.

117. 8 см і 15 см. Указанне. Гл. *ключавую задачу 1* (с. 70).

118. 60 см і 120 см^2.

119*. а) 10 см; б) 2 см.

120*. 30 см.

121*. $2\sqrt{5}$ см.

122*. 5 см.

123*. а) 12 см^2; б) Указанне. З *ключавой задачы 2* (с. 70—71) $S = (r + c)r$. З другога боку, катэты трохвугольніка роўны $m + r$, $n + r$ і $S = \frac{(m+r)(n+r)}{2}$. Адсюль $S = mn$.

125. а) 95°; б) 100°; в) 125°.

126. а) 80°; б) 108°; в) 104°; г) 80°.

127. а) 130°; б) 30°.

128. а) 31°; б) 115°.

129. а) 136°; б) 26 см.

131. 8 см. Указанне. Выкарыстайце ўласцівасць: здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя паміж сабой.

132. а) 48 см^2; б) 240 см^2.

133. а) 32 см^2; б) 16 см. Указанне. У $\triangle BOC$ правядзіце вышыню OH.

134. а) 7; б) 8; в) 11.

135. а) 24 см; б) 8 см.

136. а) 20 $см^2$; б) 6 см.

137. 45 $см^2$. Указанне. Выкарыстайце формулу $S = pr$.

138. а) 10 см і 15 см; б) 80 см.

139. 6 см.

140. 124°.

141. а) 72 см; б) 12 см.

142. 15 см. Указанне. Знайдзіце дыяметр упісанай акружнасці, вышыню $\triangle MBN$, праведзеную да MN, і выкарыстайце падобнасць трохвугольнікаў MBN і ABC.

143. 25 см. Указанне. Правядзіце вышыні BH і CK, знайдзіце даўжыні адрэзкаў AK, KD, CK, CD. Дакажыце, што $\triangle ACD$ — прамавугольны.

144*. а) 6 см; 10 см; 12 см; б) 588 $см^2$.

145*. 10 см. Указанне. Разгледзьце дзве паралельныя хорды даўжынёй 6 см і 8 см з адлегласцю 7 см паміж імі. З цэнтра апісанай акружнасці правядзіце перпендыкуляры да гэтых хорд.

146*. $2\sqrt{6}$ см. Указанне. Паколькі $AB + CD = BC + AD$, то трапецыя апісаная, цэнтр O ўпісанай акружнасці знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс і $r = \frac{S}{p}$. Далей разгледзьце $\triangle AOB$.

148*. 60°.

149. 3 : 5.

150. 28.

151. 6.

152. а) 20 $см^2$; б) 156 $см^2$.

153. 2 см.

155. 3 см.

157. а) 138°; б) 40°.

158. 24.

159. а) 65°; б) 52°.

161. 70°.

162. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

166. а) 1; б) $5\sqrt{2}$.

167. 5 см.

169. б) 5.

170. $2\sqrt{5}$.

Глава III

173. $b = 4\sqrt{2}$; $a = 2\sqrt{6}$; $\beta = 45°$.

174. а) 10,4; б) 8,9; в) 7,3.

175. а) 55°; б) 46°; в) 44°.

176. а) 4,9; б) 21,7.

177. а) 26°; б) 24°.

178. 12 см і 16 см.

179. а) 105°; б) 8; в) 6.

180. 30 см.

181. а) 12; б) 5; в) $2\sqrt{3}$.

182. а) 9 см; б) 6 см; в) 45°.

183. 16 см.

184. а) 6. Указанне. Знайдзіце $\sin A$ і выкарыстайце тое, што $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, або гл. заўвагу да *ключавой задачы 3* (с. 102); б) 7,8; в) $3\frac{1}{3}$.

185. а) 6 см; б) 8 см. Указанне. в) Выкарыстайце формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

186. а) 6,25 см; б) 5 см. Указанне. Выкарыстайце формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

187. $b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

188. $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

189. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ см.

190. а) 8 см; б) $10\frac{5}{6}$ см. Указанне. Можна знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ACD.

192*. а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

194*. Указанне. З $\triangle ABM$ і $\triangle CBM$ выразіце $\sin\angle ABM$ і $\sin\angle CBM$ адпаведна і дакажыце, што $\angle ABM > \angle CBM$.

195*. Указанне. $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $\sin\alpha \leqslant 1$, $2R\sin\alpha \leqslant 2R$, $a \leqslant 2R$. Таксама можна выкарыстаць тое, што дыяметр — найбольшая хорда.

196. а) 7; б) 14.

197. а) 7,8 см; б) 4,6 см.

198. $2\sqrt{5}$ см.

199. $3\sqrt{2}$ см.

200. а) $2\sqrt{19}$ см; б) $\sqrt{21}$ см.

201. 32 см.

202. $2\sqrt{19}$ см.

203. а) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см; б) $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Указанне. Выразіце невядомыя стораны трохвугольніка праз x і прымяніце тэарэму косінусаў.

204. 1 см. Указанне. Прыміце невядомую старану за x і прымяніце тэарэму косінусаў да $\triangle ABC$.

205. а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{37}$.

206. а) 60°; б) 120°.

207. а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{5}$.

208. а) Востравугольны; б) прамавугольны; в) тупавугольны.

209. а) $6\sqrt{3}$; б) 16.

210. а) $\sqrt{14}$ см; б) 4 см.

211. а) 8 см і 14 см; б) 16 см і 18 см.

212. а) $\sqrt{10}$ см; б) $\sqrt{7{,}5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ см.

213. 36 см. Указанне. Прымяніце ўласцівасць датычных да акружнасці, праведзеных з аднаго пункта, і тэарэму косінусаў да $\triangle ABC$.

214. 7 см.

215. а) 6 см. Указанне. Правядзіце адрэзак CK, паралельны BD $(K \in AD)$, і разгледзьце $\triangle ACK$; б) 25 см.

216*. 18 см.

217*. $\sqrt{7}$.

218*. $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$.

220*. Тупавугольным. Указанне. Паколькі $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, то $ah_a = bh_b$, $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$, г. зн. стораны трохвугольніка адваротна прапарцыянальны вышыням: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$, $a = 20x$, $b = 15x$, $c = 12x$.

223. а) 42 см^2; б) $8\sqrt{6}$ м^2.

224. а) 96 см^2; б) 72 см^2.

225. а) 12 см; б) 12 см.

226. а) 72 см^2; б) 84 см^2.

227. 24 см^2 і 8,125 см.

228. а) $c \approx 2{,}5$, $\alpha \approx 53°$, $\beta \approx 97°$; б) $c \approx 1{,}5$, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 107°$; в) $\alpha \approx 70°$, $b \approx 7{,}4$, $c \approx 6{,}5$; г) $\alpha \approx 48°$, $a \approx 7{,}6$, $c \approx 5{,}4$; д) $\alpha \approx 41°$, $\beta \approx 56°$, $\gamma \approx 83°$; е) $\alpha \approx 108°$, $\beta \approx 50°$, $\gamma \approx 22°$.

229. $24\sqrt{5}$ см^2.

230*. а) 2 см; б) 12,5 см.

231*. 6. Указанне. Злучыце цэнтр акружнасці з процілеглай вяршыняй. Знайдзіце суму плошчаў атрыманых пры гэтым трохвугольнікаў $\left(\frac{1}{2}\cdot 13\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 15\cdot r\right)$ і плошчу дадзенага трохвугольніка па формуле Герона.

232*. 7 см, 15 см, 20 см. Указанне. Гл. *ключавую задачу 4* да § 15 (с. 124).

234. 8 см^2.

235. 42.

237. $\sqrt{43}$.

239. $b=\dfrac{2m_a\sin\gamma_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)},\quad c=\dfrac{2m_a\sin\beta_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)}$.

240. а) $a=\dfrac{P\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$; б) $a=\sqrt{\dfrac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$.

241. а) 6; б) 6.

244. а) $d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$; $d_2=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$;

$\sin\varphi=\dfrac{2ab\sin\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

245. Указанне. Разгледзьце трохвугольнік са старанамі a і b і вугламі 60° і 120°, выкарыстайце тэарэму косінусаў.

Глава IV

246. 60 см.

247. 135°.

248. а) 108°; б) 144°; в) 160°.

249. 12.

250. 14 см.

251. 80 см.

252. $36\sqrt{3}$ см^2.

253*. а) 108°, 36°, 36°; б) 36°, 72°, 72°.

254*. 45°.

255*. а) 75°; б) 0°.

257. а) 4 см; б) $4\sqrt{2}$ см.

258. $R=5$ см, $r=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ см.

259. а) 9,7 см; б) 44,8 см.

260. $\beta = 36°$; $R = \frac{10}{\sin 36°}$; $r = \frac{10}{\operatorname{tg} 36°}$.

261. а) $a = 2R\sin 20°$; б) $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}10°} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}10°$.

262. 108 см^2.

263*. г) 22,5°; 67,5°; 90°. д) Указанне. Правядзіце дыяганалі прамавугольніка $A_1A_2A_5A_6$ і высветліце, якую частку плошчы прамавугольніка і якую частку плошчы васьмівугольніка займае плошча трохвугольніка A_1OA_2, дзе O — цэнтр многавугольніка.

266. а) 9 см; б) 4 см.

267. а) $24\sqrt{3}$ см^2; б) 72 см.

268. 180 см^2.

269. а) 4 см і $2\sqrt{3}$ см.

271*. а) $12\sqrt{3} - 18$; б) $3 + \sqrt{3}$.

272*. а) $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; б) $3\sqrt{3}r^2$.

275. а) 62,8 см; б) 9,42 дм; в) 0,314 м; г) 21,98 км.

276. а) 9,6 см; б) 47,8 мм; в) 1 дм; г) 0,2 м.

277. а) 150 см; б) 100 см; в) 200 см; г) 40 см.

278. а) 15,3 см; б) 5,7 см.

279. а) 86°; б) 19°.

280. 57°.

281. 2,8 см.

282. 30°.

283. а) На 6,28 см; б) у 4 разы.

285. а) 78,5 см^2; б) 314 м^2; в) 19,625 дм^2; г) 3,14 км^2.

286. а) 1,1 см; б) 10 дм.

287. 80 см.

288. а) 3,14 см^2; б) 13,72 см.

289. а) 39π см^2; б) 16π см^2.

290. 2 : 1.

291. а) $\frac{Q}{12}$; б) $\frac{Q}{6}$; в) $\frac{Q}{3}$; г) $\frac{3Q}{4}$.

292. а) 80°; б) 70 см^2; в) 270 см^2.

293. 40π см^2.

294. а) 1 : 4; б) 3 : 4.

295 а) $\frac{2\pi}{3}$ см^2; б) $\frac{3\pi}{2}$ м^2.

296. а) 12; б) 32π.

297*. 59 %.

298*. а) $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; б) $\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\right)R^2$.

299*. а) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)R^2$; б) $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)R^2$.

300*. а) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$; б) 8. Указанне. Злучыце канцы радыусаў і правядзіце бісектрысу вугла сектара, памяняйце жоўтыя і чырвоныя сегменты месцамі.

301*. 6 $см^2$.

302*. $R^2\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

303*. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

305. 30.

309. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

ЗМЕСТ

Глава I. Суадносіны ў прамавугольным трохвугольніку

Глава II. Упісаныя і апісаныя акружнасці

Глава III. Тэарэма сінусаў, тэарэма косінусаў

Глава IV. Правільныя многавугольнікі

Вучэбнае выданне

Казакоў Валерый Уладзіміравіч

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 9 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева.* Рэдактар *Н. М. Алганава.* Мастак *А. А. Жданоўская.* Мастацкія рэдактары *В. М. Карповіч, А. А. Праваловіч.* Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко.* Карэктары *В. С. Бабеня, В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, Г. В. Алешка.*

Падпісана да друку 27.06.2019. Фармат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 15,6 + 0,33 форз. Ул.-выд. арк. 13,52 + 0,48 форз.
Тыраж 16 000 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета» Міністэрства
інфармацыі Рэспублікі Беларусь. Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

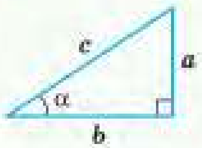
ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

(Назва і нумар установы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Суадносіны ў прамавугольным трохвугольніку

Востры вугал



$\sin\alpha = \dfrac{a\,(\text{проціл. к.})}{c}$

$\cos\alpha = \dfrac{b\,(\text{прылег. к.})}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\,(\text{проціл. к.})}{b\,(\text{прылег. к.})}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

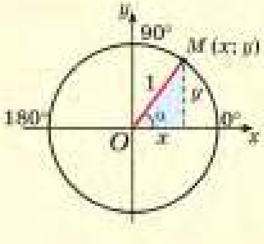
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Асноўная трыганаметрычная тоеснасць

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Тупы вугал



$\sin\alpha = y \quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$

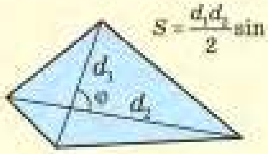
$\cos\alpha = x \quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$\sin 150° = \sin 30° = \dfrac{1}{2} \qquad \cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$S_\triangle = \dfrac{1}{2} ab\sin\alpha$

$S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha$



$S = \dfrac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi$

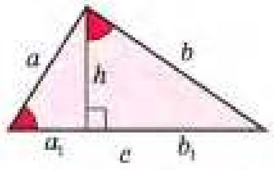
Задача

Дадзена: b, α. Знайсці: x.

Рашэнне.

1. $\cos\alpha = \dfrac{b}{x}$
2. $b = x\cdot\cos\alpha$
3. $x = \dfrac{b}{\cos\alpha}$

Сярэдняе геаметрычнае



$\dfrac{a_1}{h} = \dfrac{h}{b_1}$ (з левага і правага трохвугольніка) $h^2 = a_1 b_1$

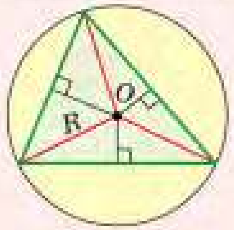
$\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{a}{c}$ (з левага і вялікага трохвугольніка) $a^2 = ca_1$

$\dfrac{b_1}{b} = \dfrac{b}{c}$ (з правага і вялікага трохвугольніка) $b^2 = cb_1$

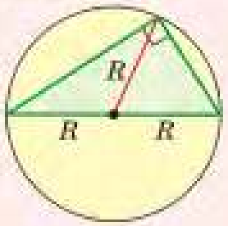
1. sin α, cos α, tg α, ctg α вострага вугла.
2. **Значэнні тр. функцый для вуглоў 30°, 45°, 60°.**
3. Рашэнне прамавугольнага трохвугольніка.
4. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць.
5. Выражэнне tg α і ctg α праз sin α і cos α.
6. sin α, cos α, tg α, ctg α для 0° ≤ α ≤ 180°.
7. Змяненне sin α, cos α, tg α, ctg α.
8. Формулы для вуглоў 180°– α.
9. Значэнні тр. функцый для вуглоў 120°, 135°, 150°.
10. **Формула плошчы трохвугольніка.**
11. Формула плошчы паралелаграма.
12. Формула плошчы выпуклага чатырохвугольніка.
13. **Сярэдняе геаметрычнае ў прамавугольным трохвугольніку.**

Апісаная і ўпісаная акружнасці

① **Апісаная — пасярэдніх ⊥-аў**

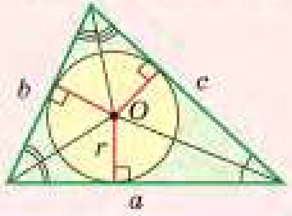


② **Прамавугольны**



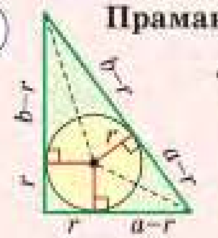
$R = \dfrac{c}{2}$

③ **Упісаная — бісектрыс**



④ $S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr = pr$

⑤ **Прамавугольны**

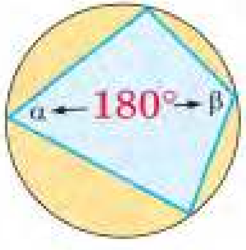


$c = (a - r) + (b - r)$

$r = \dfrac{a + b - c}{2}$

⑥ **Упісаныя**

уласцівасць

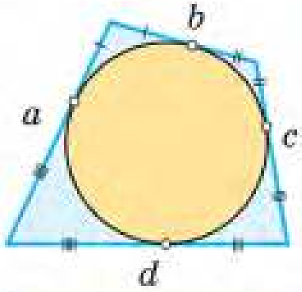


прымета ⑦

ЧАТЫРОХВУГОЛЬНІКІ

⑧ **Апісаныя**

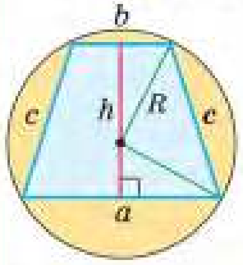
уласцівасць



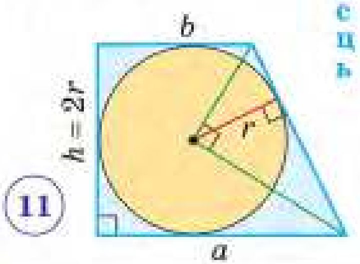
прымета ⑨

$$a + c = b + d$$

⑩ **Упісаная трапецыя — раўнабедраная трапецыя**



⑪



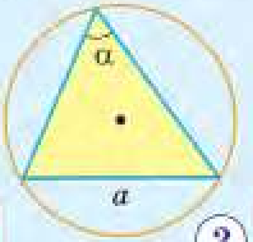
1. Акружнасць, апісаная каля трохвугольніка.
2. Акружнасць, апісаная каля прамавугольнага трохвугольніка.
3. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік.
4. Формула плошчы $S = pr$.
5. Акружнасць, упісаная ў прамавугольны трохвугольнік.
6. Уласцівасць упісанага 4-ка.
7. Прымета ўпісанага 4-ка.
8. Уласцівасць апісанага 4-ка.
9. Прымета апісанага 4-ка.
10. Уласцівасць упісанай трапецыі.
11. Уласцівасць апісанай трапецыі.

Тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў

① Тэарэма сінусаў

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Стораны тр-ка прапарцыянальны ...



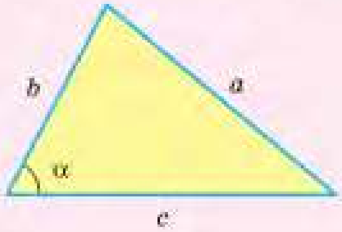
$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

② $$R=\frac{abc}{4S}$$

③ Тэарэма косінусаў

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Квадрат любой стараны тр-ка роўны ...

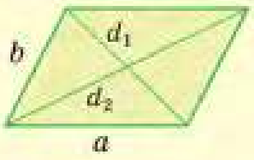


④ **Знаходжанне косінуса вугла па трох старанах**

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

⑤
$b^2+c^2>a^2$ вугал α востры
$b^2+c^2=a^2$ вугал α прамы
$b^2+c^2<a^2$ вугал α тупы

⑥ **Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна ...**



$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$$

⑦ **Формула медыяны**

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

Формула Герона

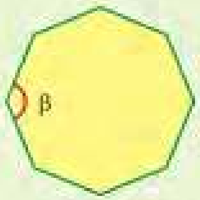
⑧ $$S_\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. **Тэарэма сінусаў.**
2. Формула знаходжання R праз S.
3. **Тэарэма косінусаў.**
4. Знаходжанне косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Вызначэнне віду трохвугольніка па трох старанах.
6. Тэарэма аб суме квадратаў дыяганалей паралелаграма.
7. Формула медыяны трохвугольніка.
8. Формула Герона.

Правільныя многавугольнікі

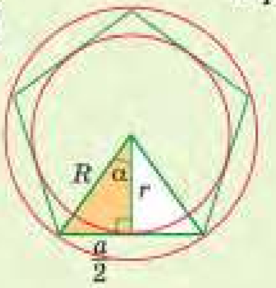
Можна апісаць і ўпісаць акружнасці з агульным цэнтрам

①



$$\beta=\frac{180°(n-2)}{n}$$

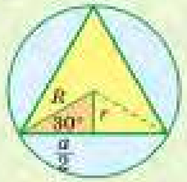
②



$$\alpha=\frac{180°}{n}$$

$$\frac{a}{2}=R\sin\alpha \qquad \frac{a}{2}=r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

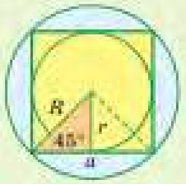
③



$$a=R\sqrt{3}$$

$$r=\frac{R}{2}$$

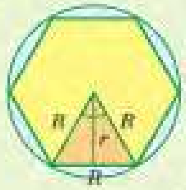
④



$$a=R\sqrt{2}$$

$$r=\frac{a}{2}$$

⑤



$$a=R$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

⑥ **Даўжыня акружнасці**

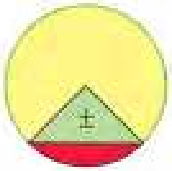
$$C=2\pi R$$

⑦ **Плошча круга**

$$S=\pi R^2$$

⑧ $$\frac{l_{дугі}}{C}=\frac{n°}{360°}=\frac{S_{сек}}{S_{круга}}$$

⑨



$\pi\approx 3{,}14159$ ...

Это я знаю и помню прекрасно ...

1. Правільны многавугольнік, яго ўнутраны вугал.
2. Апісаная і ўпісаная акружнасці. Формулы, якія звязваюць a і R, r.
3. **Правільны трохвугольнік.**
4. Правільны чатырохвугольнік.
5. Правільны шасцівугольнік.
6. Формула даўжыні акружнасці.
7. Формула плошчы круга.
8. **Даўжыня дугі. Плошча сектара.**
9. Плошча сегмента.