

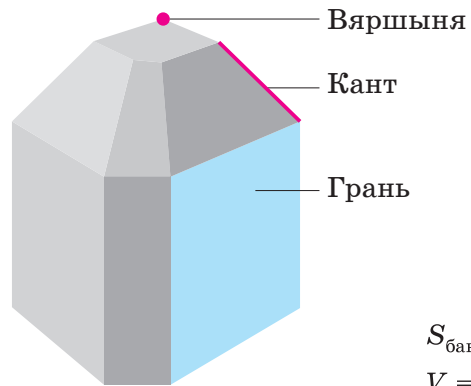


ГЕАМЕТРЫЯ

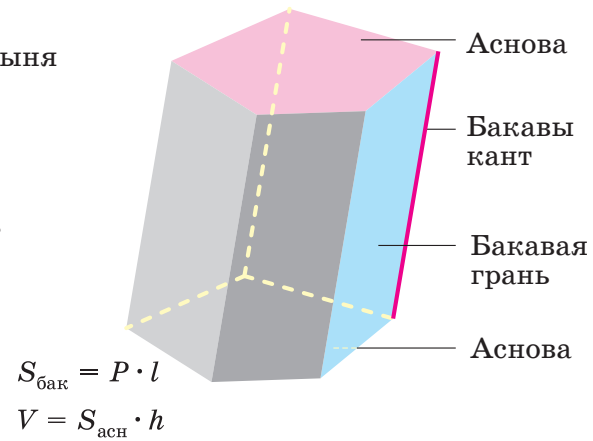


11

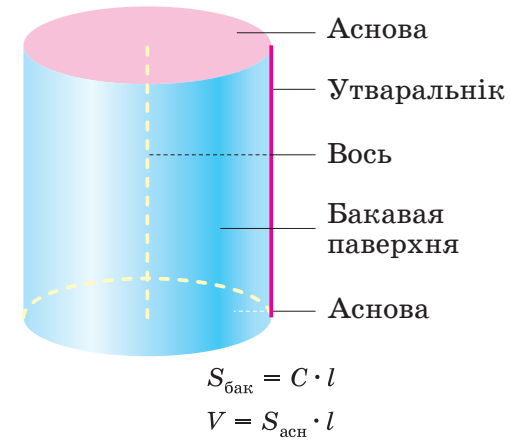
МНАГАГРАННІК



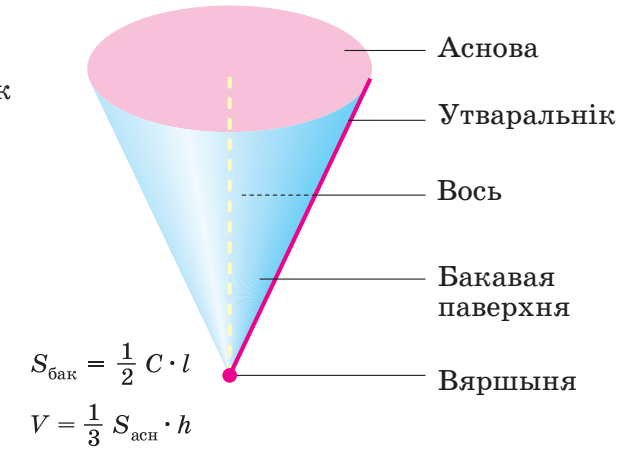
ПРЫЗМА



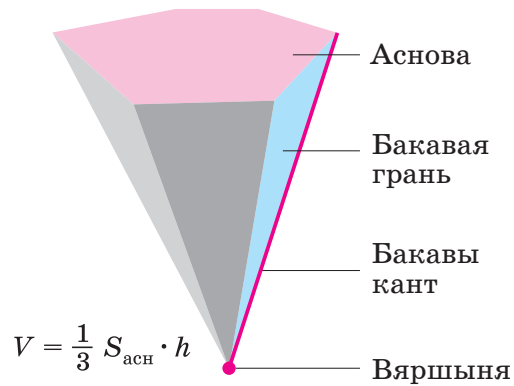
ЦЫЛІНДР



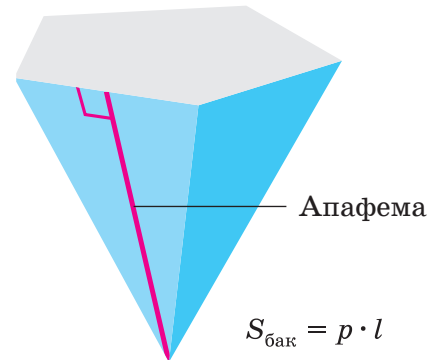
КОНУС



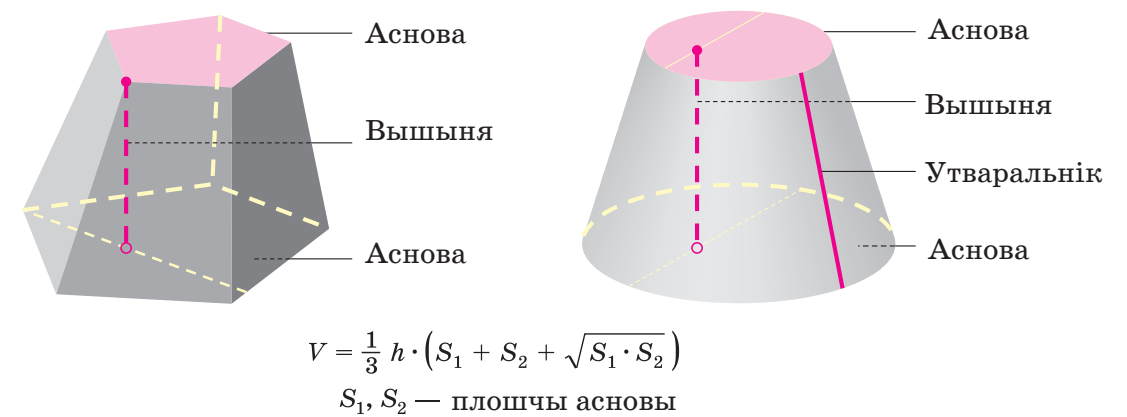
ПІРАМІДА



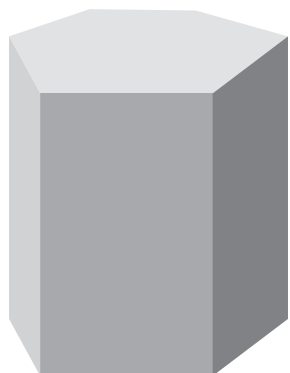
ПРАВІЛЬНАЯ ПІРАМІДА



УСЕЧАНАЯ ПІРАМІДА І ЎСЕЧАНЫ КОНУС



ПРАВІЛЬНАЯ ПРЫЗМА



ПРАМАЯ ПРЫЗМА

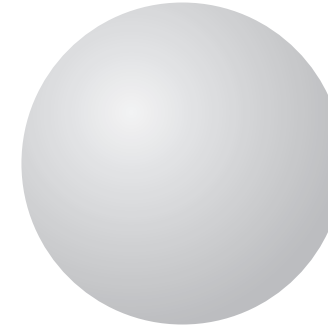


$$S_{\text{бак}} = P \cdot l$$

$$V = S_{\text{асн}} \cdot l$$

Аснова — правільны многавугольнік

СФЕРА І ШАР



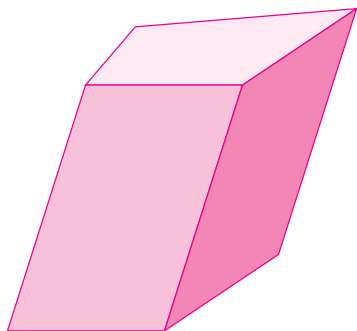
$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

- * P — перыметр перпендыкулярнага сячэння;
- p — паўперыметр асновы;
- C — даўжыня акружнасці асновы;
- l — бакавы кант прызмы, апафема піраміды, утваральнік цыліндра, апафема конуса

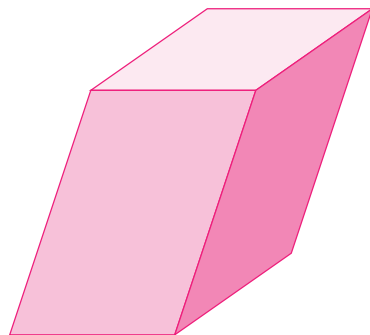
ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

ЧАТЫРОХВУГОЛЬНАЯ ПРЫЗМА

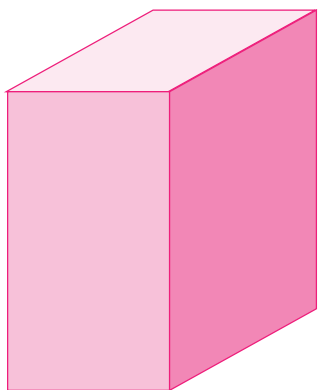


*Аснова —
паралелаграм*

ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

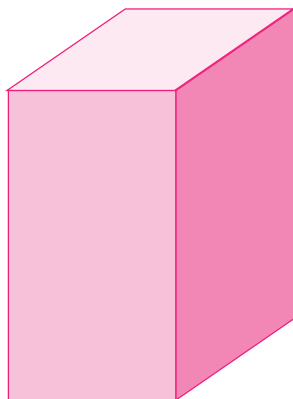


ПРАМЫ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД



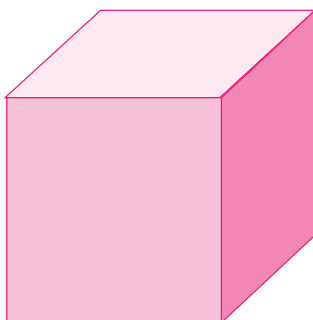
*Аснова —
прамавугольнік*

ПРАМАВУГОЛЬНЫ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

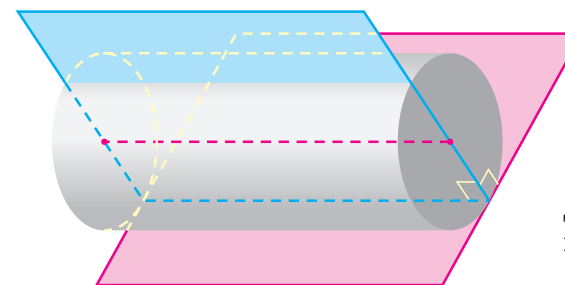


$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 d — дыяганаль
 a, b, c — вымярэнні

КУБ

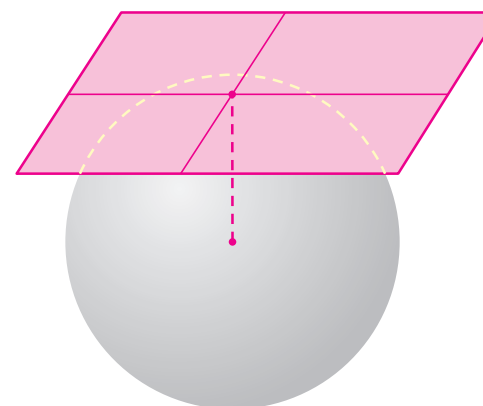
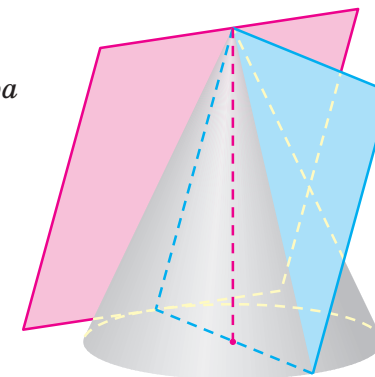


Усе канты роўныя



Датычная плоскасць
цыліндра, конуса, шара

*Плоскасць датыкаецца да цыліндра
(конуса) па пэўным утваральніку
тады і толькі тады, калі яна
перпендыкулярная плоскасці, якая
праходзіць праз гэты ўтваральнік
і вось цыліндра (конуса)*



*Плоскасць датыкаецца да шара
тады і толькі тады, калі яна
перпендыкулярная радыусу,
праведзенаму ў пункт дотыку*

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

*Данушчана Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

Мінск
«Беларуская Энцыклапедыя імя Петруся Броўкі»
2020

Правообладатель Белорусская Энциклопедия имени Петруся Бровки

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
Г27

Аўтары:

Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі, І. У. Гарбунова, А. Я. Цыбулька

Рэцэнзенты:

кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі
Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
(кандыдат фізіка-матэматычных навук,
старшы выкладчык *Г. А. Кукрак*);

настаўнік матэматыкі вышэйшай кваліфікацыйнай катэгорыі
дзяржаўнай установы адукацыі «Гімназія № 25 г. Мінска»
С. А. Скарукіна

ISBN 978-985-11-1241-4

© Латоцін Л. А., Чабатарэўскі Б. Д.,
Гарбунова І. У., Цыбулька А. Я., 2020
© Афармленне. Рэспубліканскае ўнітарнае
прадпрыемства “Выдавецтва «Беларуская
Энцыклапедыя імя Петруся Броўкі”, 2020

Змест

Ад аўтараў	4
Раздзел 1. Прызма і цыліндр	5
§ 1. Прызма	6
§ 2. Цыліндр	22
Раздзел 2. Піраміда і конус	37
§ 3. Піраміда	38
§ 4. Конус	57
Раздзел 3. Сфера і шар	75
§ 5. Сфера	76
§ 6. Шар	89
§ 7. Правільныя мнагаграннікі	108
Раздзел 4. Паўтарэнне	118
§ 8. Геаметрычныя фігуры і іх уласцівасці	119
§ 9. Геаметрычныя велічыні	156
§ 10. Каардынаты і вектары	189
§ 11. Геаметрычныя пабудаванні	200
Адказы	220

Шаноўныя сябры!

Гэты вучэбны дапаможнік забяспечыць вывучэнне праграмнага матэрыялу выпускнога класа і паўтарэнне геаметрычнай часткі курса матэматыкі.

Прапанаваны вучэбны дапаможнік арганізаваны гэтак, як і дапаможнік для 10 класа. Кожны параграф пачынаецца з абмеркавання таго кола пытанняў, што абазначаны ў назве параграфа. Найбольш важнае вылучана спецыяльнымі шрыфтамі. Новыя паняцці вылучаюцца **тлустым шрыфтам**. Важныя сцверджанні, што выражаны ў **тэарэмах** і **выніках** з іх, вылучаны колерам, іншыя важныя факты вылучаюцца **тлустым курсівам**. Паняцці і факты, на якія варта звярнуць увагу, але неабавязкова запамінаць, — *курсівам*. Сэнсавыя блокі ў параграфе пазначаны літарамі. Напрыклад: **А), Б), В), Г), Д)**.

Пасля тлумачальнага тэксту ідуць кантрольныя пытанні, пазначаныя знакам **?**. Яны прызначаны для праверкі таго, як вы засвоілі змест тлумачальнага тэксту. Калі на тое ці іншае пытанне вы не змаглі адказаць, трэба вярнуцца да тлумачальнага тэксту і з яго дапамогай паспрабаваць адказаць на гэтае пытанне зноў.

Нумары практыкаванняў, што ідуць пасля кантрольных пытанняў, адрозніваюцца колерам і шрыфтам. Колер нумара, як правіла, адпавядае таму сэнсаваму блоку, які пазначаны літарай адпаведнага колеру.

Жадаем вам поспехаў!

Аўтары

Умоўныя абазначэнні:

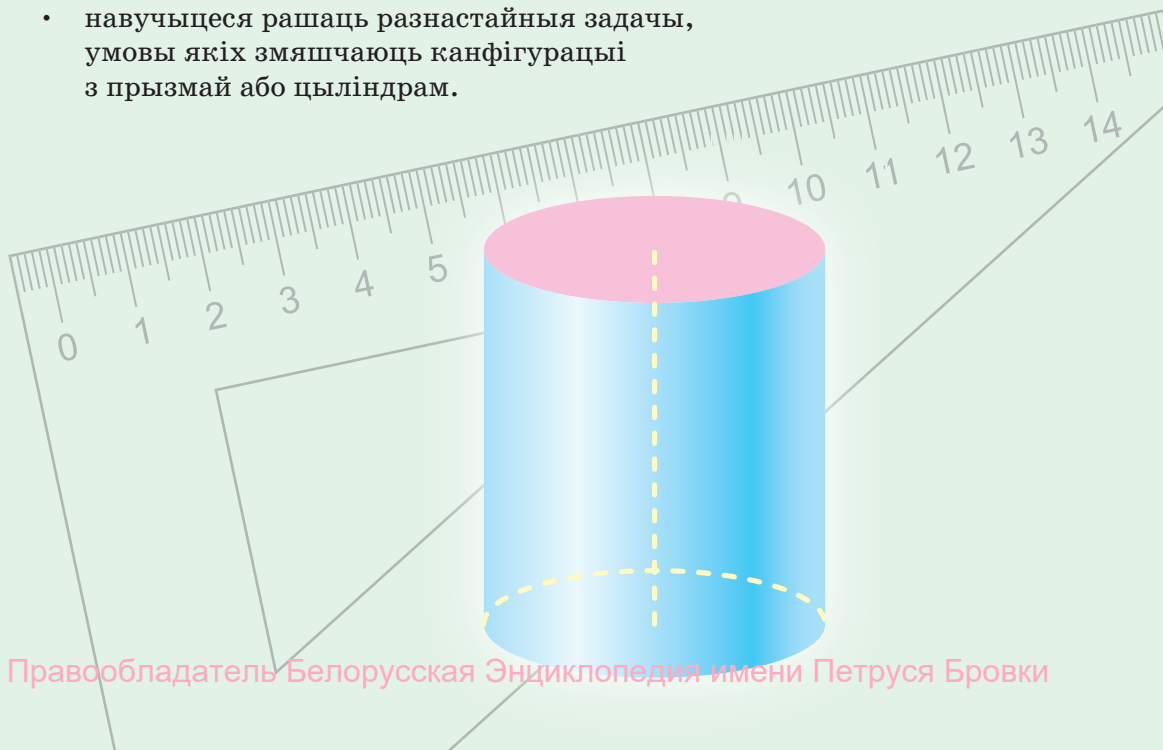
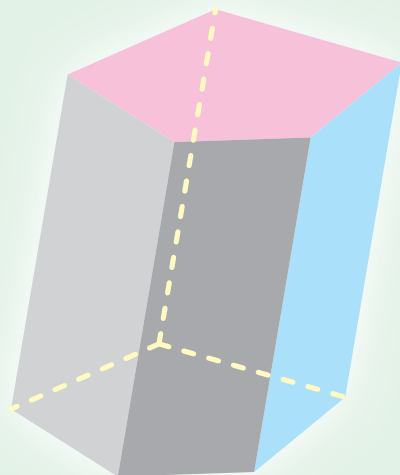
-  — дадатковы матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў;
-  — асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязным апісаннем паслядоўнасці дзеянняў;
-  — пытанні і заданні;
-  — заданні для работы ў класе і дома;
-  — вучэбны матэрыял павышанага ўзроўню;
-  — заданні павышанай складанасці.

Раздзел 1

Прызма і цыліндр

У гэтым раздзеле вы:

- даведаецеся, якое цела называюць прызмай і якое — цыліндрам;
- даведаецеся, чым прызма і цыліндр падобныя і чым яны адрозніваюцца;
- пазнаёміцеся з асобнымі відамі прызмаў і цыліндраў;
- пазнаёміцеся з канфігурацыямі — прызмай, умежанай у цыліндр, і цыліндрам, умежаным у прызму;
- пазнаёміцеся з датычнай прамой і датычнай плоскасцю цыліндра;
- навучыцеся знаходзіць плошчы паверхняў прызмаў і цыліндраў і іх аб'ёмы;
- навучыцеся знаходзіць па вядомых характарыстыках прызмы ці цыліндра іх іншыя характарыстыкі;
- навучыцеся рашаць разнастайныя задачы, умовы якіх змяшчаюць канфігурацыі з прызмай або цыліндрам.



§ 1. Призма

А) Раней ви ўжо знаёміліся з **призмой**, мноаграннікам, дзве грані якога — роўныя n -вугольнікі, а астатнія n граняў — паралелаграмы.

Роўныя грані-многовугольнікі прызмы ляжаць у паралельных плоскасцях і называюцца **асновамі** прызмы, а астатнія грані-паралелаграмы — **бакавымі гранямі**. Канты бакавых граняў, якія не належаць асновам, называюцца **бакавымі кантамі**. Адрэзак, які злучае дзве вяршыні, не прыналежаў адной грані, называецца **дыяганаллю** прызмы (рыс. 1). Плоскасць, якая праходзіць праз два бакавыя канты прызмы, што не належаць адной грані, называецца **дыяганальнай плоскасцю**, а сячэнне прызмы дыяганальнай плоскасцю — **дыяганальным сячэннем**. На рыс. 2 паказаны два дыяганальныя сячэнні прызмы.

Прызмы раздзяляюць на *трохвугольныя*, *чатырхвугольныя*, *пяцівугольныя* і г. д. у залежнасці ад колькасці старон іх асноў. Призма, паказаная на рыс. 1, шасцівугольная, а на рыс. 2 — дзевяцівугольная.

Адрозніваюць *прамыя* і *нахіленыя* прызмы ў залежнасці ад таго, перпендыкулярныя ці не перпендыкулярныя бакавыя канты прызмы яе асновам. Звычайна пры выяўленні прамой прызмы яе бакавыя канты праводзяць вертыкальна.

Праямая прызма, асновамі якой з'яўляюцца правільныя многовугольнікі, называецца **правільнай призмой**. У прамой прызмы ўсе бакавыя грані — прамавугольнікі, а ў правільнай — роўныя прамавугольнікі.

Перпендыкуляр, праведзены з якога-небудзь пункта адной асновы прызмы да плоскасці другой асновы, называецца **вышыняй прызмы**. На рыс. 3 паказаны дзве вышыні DD_2 і HH_1 прызмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. У прамой прызмы яе вышыня роўная бакавому канту.

Асобным відам прызмы з'яўляецца *паралелепіпед* — прызма, асновай якой з'яўляецца паралелаграм. Паралелепіпед, як і прызма, можа быць прамым або нахіленым.

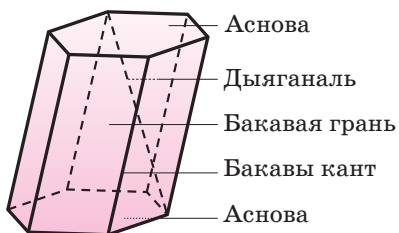


Рис. 1

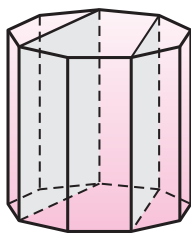


Рис. 2

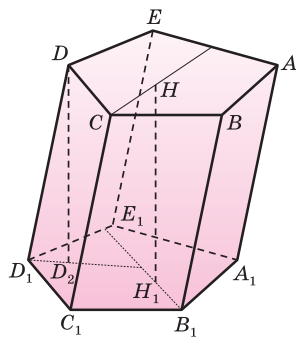


Рис. 3

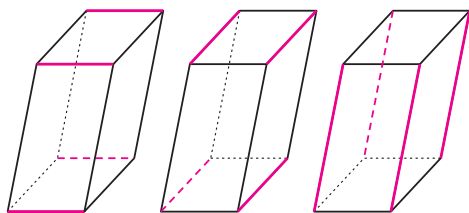


Рис. 4

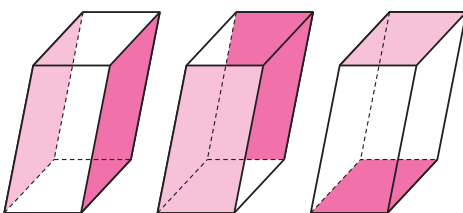


Рис. 5

Прамы паралелепіпед, асновамі якога з'яўляюцца прамавугольнікі, называецца *прамавугольным паралелепіпедом*. Прамавугольны паралелепіпед, у якога тры канты, што збягаюцца ў адной вяршыні, роўныя адзін аднаму, называецца *кубам*.

У паралелепіпеда ўсе грані — паралелаграмы, з якіх у прамога паралелепіпеда прамавугольнікамі з'яўляюцца бакавыя грані, а ў прамавугольнага паралелепіпеда — усе грані.

12 кантаў паралелепіпеда падзяляюцца на тры чацвёркі роўных кантаў (рис. 4), яго 6 граняў — на тры пары роўных граняў (рис. 5), а чатыры дыяганалі перасякаюцца ў адным пункце, які з'яўляецца цэнтрам сіметрыі паралелепіпеда (рис. 6). Прамы паралелепіпед у дадатак мае вось сіметрыі (рис. 7) і плоскасць сіметрыі (рис. 8). Прамавугольны паралелепіпед мае тры восі сіметрыі (рис. 9) і тры плоскасці сіметрыі (рис. 10).

Канты прамавугольнага паралелепіпеда, якія выходзяць з адной вяршыні, называюць *вымярэннямі прамавугольнага паралелепіпеда*. Квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў (рис. 11), і ўсе яго дыяганалі роўныя адна адной.

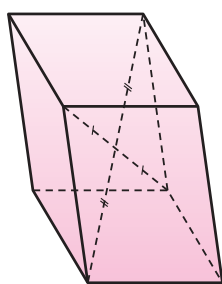


Рис. 6

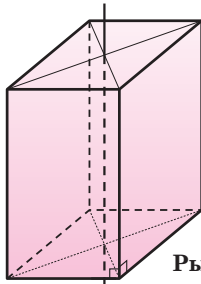


Рис. 7

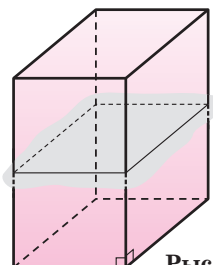


Рис. 8

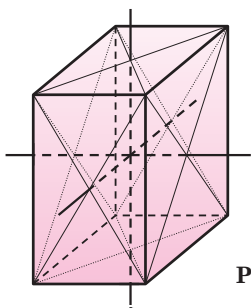


Рис. 9

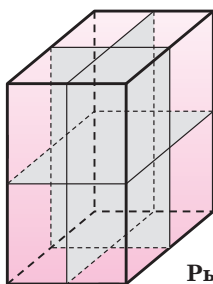


Рис. 10

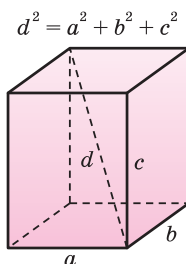


Рис. 11

Прыклад 1. Знайдзем дыяганаль правільнай чатырохвугольнай прызмы, у якой плошча асновы роўная 36 см^2 , а вышыня — 7 см .

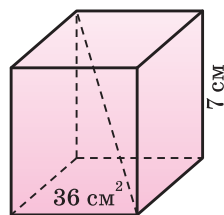
Рашэнне. Асновай правільнай чатырохвугольнай прызмы з’яўляецца квадрат (рыс. 12), плошча якога роўная 36 см^2 , тады старана асновы роўная 6 см .

Значыць, квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны $36 + 36 + 49$, г. зн. 121 см , тады дыяганаль роўная 11 см .

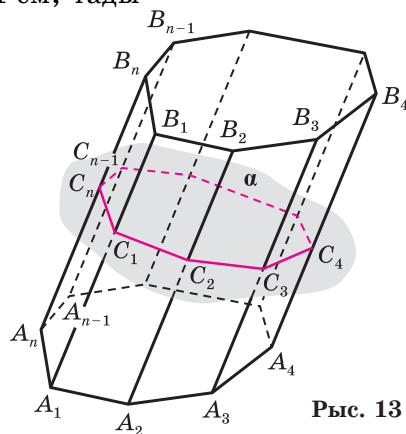
Адказ: 11 см .

Б) Бакавыя грані складаюць *бакавую паверхню прызмы*, а бакавыя грані разам з асновамі — *поўную паверхню прызмы*.

Пры рашэнні задач бывае карысным так званае *перпендыкулярнае сячэнне* прызмы, пад якім разумеюць многавугольнік, плоскасць якога перпендыкулярная прамым, што змяшчаюць бакавыя канты прызмы, а вяршыні знаходзяцца на гэтых прамых.



Рыс. 12



Рыс. 13

Тэарэма 1. Плошча бакавой паверхні прызмы роўная здабытку перыметра яе перпендыкулярнага сячэння і даўжыні бакавога канта:

$$S_{\text{бак}} = P \cdot l.$$

Доказ. Няхай ёсць прызма $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рыс. 13). Правядзём перпендыкулярнае сячэнне $C_1C_2C_3...C_{n-1}C_n$. Яго стораны перпендыкулярныя старанам паралелаграмаў, што складаюць бакавую паверхню прызмы. Таму для плошчы бакавой паверхні $S_{\text{бак}}$ атрымаем:

$$\begin{aligned} S_{\text{бак}} &= S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_2B_2B_3A_3} + \dots + S_{A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n} + S_{A_nB_nB_1A_1} = \\ &= A_1B_1 \cdot C_1C_2 + A_2B_2 \cdot C_2C_3 + \dots + A_{n-1}B_{n-1} \cdot C_{n-1}C_n + A_nB_n \cdot C_nC_1 \stackrel{(1)}{=} \\ &= (C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n + C_nC_1) \cdot A_1B_1 \stackrel{(2)}{=} P \cdot l. \end{aligned}$$

Пры пераходзе (1) мы ўлічылі тое, што ўсе бакавыя канты прызмы роўныя адзін аднаму, пры пераходзе (2) — тое, што сума $C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n + C_nC_1$ выражае перыметр P перпендыкулярнага сячэння прызмы, а адрэзак A_1B_1 — даўжыню l бакавога канта.

Прыклад 2. Адлегласці паміж бакавымі кантамі нахіленай трохвугольнай прызмы роўныя 3 см , 4 см і 5 см , а плошча яе бакавой паверхні — 132 см^2 . Знайдзем даўжыню бакавога канта.

Рашэнне. Паколькі стораны трохвугольніка, што з’яўляецца перпендыкулярным сячэннем прызмы (рыс. 14), перпендыкулярныя прамым,

на якіх ляжаць бакавыя канты, то іх даўжыні роўныя 3 см, 4 см і 5 см. Значыць, перыметр перпендыкулярнага сячэння — 12 см.

Улічыўшы, што плошча $S_{\text{бак}}$ бакавой паверхні прызмы, перыметр P яе перпендыкулярнага сячэння і даўжыня l бакавога канта звязаныя роўнасцю $S_{\text{бак}} = P \cdot l$, знаходзім, што $l = 132 : 12 = 11$ (см).

Адказ: 11 см.

Вынік 1. Плошча бакавой паверхні прамой прызмы роўная здабытку перыметра яе асновы і вышыні.

Сапраўды, перпендыкулярнае сячэнне прамой прызмы роўнае яе аснове, а бакавы кант з'яўляецца вышынёй.

В) Важнай характарыстыкай плоскай фігуры з'яўляецца яе плошча. Падобнай характарыстыкай цела з'яўляецца яго аб'ём. Будзем лічыць, што целы, якія мы вывучаем, маюць аб'ём.

За адзінку аб'ёму прымаюць аб'ём куба з кантамі 1.

На практыцы карыстаюцца рознымі адзінкамі аб'ёму, як метрычнымі — кубічны міліметр, кубічны сантыметр, кубічны дэцыметр, кубічны метр, кубічны кіламетр, так і неметрычнымі — галон, барэль, бушаль, кварта.

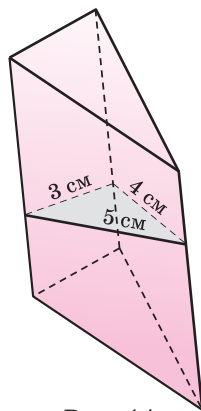
Для аб'ёму цела праўдзяцца яго асноўныя ўласцівасці:

- *роўныя целы маюць роўныя аб'ёмы;*
- *калі цела раздзелена на часткі, якія маюць аб'ём, то аб'ём цела роўны суме аб'ёмаў гэтых частак.*

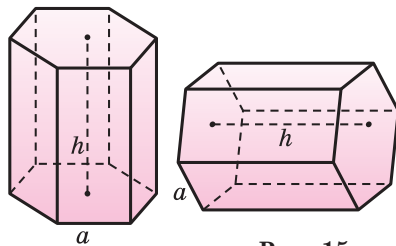
Пры гэтым роўнымі фігурамі называюцца фігуры, якія сумяшчаюцца адна з адной. Пры гэтым роўнымі фігурамі называюцца фігуры, якія пераўтвараюцца адна ў адну пэўным рухам. Напрыклад, роўнымі з'яўляюцца дзве шасцівугольныя правільныя прызмы, у якіх адпаведна роўныя стораны асноў і вышыні (рыс. 15), або два цыліндры з адпаведна роўнымі радыусамі асноў і ўтваральнікамі (рыс. 16).

Цела, паказанае на рыс. 17, можна раздзяліць на цыліндр і конус, і яго аб'ём роўны суме аб'ёмаў гэтых цыліндра і конуса.

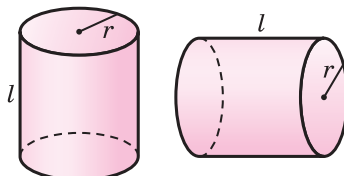
Два целы з роўнымі аб'ёмамі называюць **роўнавялікімі цэламі**. Роўныя целы з'яўляюцца роўнавялікімі, але не наадварот.



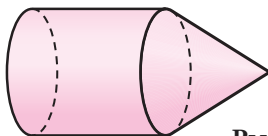
Рыс. 14



Рыс. 15



Рыс. 16



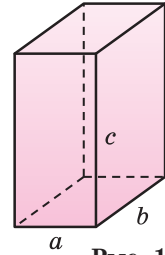
Рыс. 17

Вы ведаеце, што аб'ём V прамавугольнага паралелепіеда роўны здабытку трох яго вымярэнняў a, b, c (рыс. 18):

$$V = abc.$$

Улічыўшы, што ў формуле $V = abc$ здабытак ab выражае плошчу S асновы прамавугольнага паралелепіеда, а лік c — яго вышыню h , атрымаем, што аб'ём V прамавугольнага паралелепіеда роўны здабытку плошчы яго асновы і вышыні.

$$V = abc = S_{\text{асн}} \cdot h$$



Рыс. 18

Прыклад 3. Плошчы трох граняў прамавугольнага паралелепіеда з агульнай вяршыняй роўныя S_1, S_2, S_3 .

а) Знайдзем аб'ём гэтага паралелепіеда, улічыўшы, што $S_1 = 12 \text{ дм}^2, S_2 = 24 \text{ дм}^2, S_3 = 36 \text{ дм}^2$.

б) Выразім аб'ём паралелепіеда праз S_1, S_2, S_3 .

Рашэнне. Няхай вымярэнні паралелепіеда роўныя x, y, z (рыс. 19).

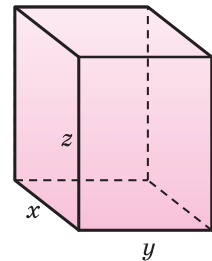
а) Паколькі, з улікам умовы, $xy = 12, xz = 24, yz = 36$, то $xy \cdot xz \cdot yz = 12 \cdot 24 \cdot 36$, або $(xyz)^2 = 12^2 \cdot 2 \cdot 6^2$, адкуль:

$$xyz = 12 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 72\sqrt{2}.$$

б) Паколькі $xy = S_1, xz = S_2, yz = S_3$, то $xy \cdot xz \cdot yz = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$.

$$\text{Адсюль } xyz = \sqrt{S_1 S_2 S_3}.$$

$$\text{Адказ: а) } 72\sqrt{2} \text{ дм}^3; \text{ б) } \sqrt{S_1 S_2 S_3}.$$

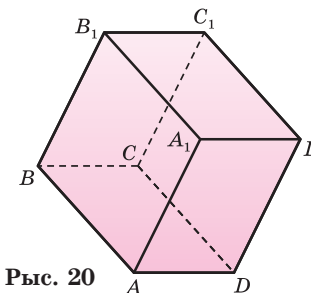


Рыс. 19

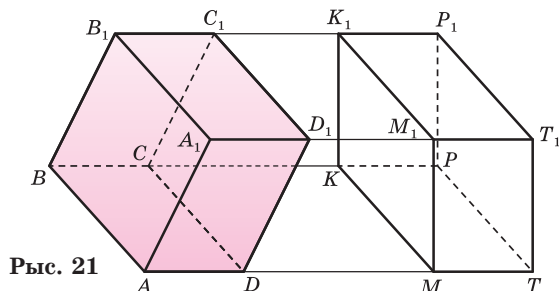
Тэарэма 2. Аб'ём адвольнага паралелепіеда роўны здабытку плошчы яго асновы і вышыні:

$$V = S_{\text{асн}} \cdot h.$$

Доказ. Няхай ёсць адвольны паралелепіед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 20). На прамой AD выберам пункты M і T так, што $AD = MT$, і праз пункты M і T правядзём плоскасці, перпендыкулярныя AD . Яны перасякаюць прамыя $BC, B_1 C_1, A_1 D_1$ адпаведна ў пунктах K і P, K_1 і P_1, M_1 і T_1 (рыс. 21). Мнагграннікі $DD_1 C_1 C T T_1 P_1 P$ і $AA_1 B_1 B M M_1 K_1 K$ роўныя, бо другі сумяшчаецца з першым зрухам уздоўж прамой MD . А паколькі



Рыс. 20



Рыс. 21

абодва гэтыя мнагаграннікі маюць агульную частку — мнагаграннік $DD_1C_1CMM_1K_1K$, то іх астатнія часткі — паралелепіпеды $ABCD A_1B_1C_1D_1$ і $MKPTM_1K_1P_1T_1$ — маюць таксама роўныя аб'ёмы. У паралелепіпедаў $ABCD A_1B_1C_1D_1$ і $MKPTM_1K_1P_1T_1$ іх вышыні роўныя, бо кожная з іх роўная адлегласці паміж паралельнымі плоскасцямі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Роўныя таксама і плошчы асноў гэтых паралелепіпедаў, бо ў паралелаграмаў $ABCD$ і $MKPT$ роўныя асновы AD і MT і роўныя вышыні як адлегласці паміж паралельнымі прамымі AD і BC .

Атрымліваецца, што адвольны паралелепіпед роўнавялікі з паралелепіпедам, у якога тая самая вышыня, а асновай з'яўляецца прамавугольнік, роўнавялікі аснове зыходнага паралелепіпеда.

Цяпер можна гэтаксама паралелепіпед $MKPTM_1K_1P_1T_1$ замяніць роўнавялікім паралелепіпедам $UVXYU_1V_1X_1Y_1$ (рыс. 22), які з'яўляецца прамавугольным, мае тую самую вышыню, што і зыходны паралелепіпед, аснову, роўную $MKPT$ і, значыць, роўнавялікую $ABCD$.

Значыць, $V_{ABCD A_1B_1C_1D_1} = V_{UVXYU_1V_1X_1Y_1} = S_{UVXY} \cdot UU_1 = S_{ABCD} \cdot UU_1$.

Множнік S_{ABCD} ёсць плошча асновы паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$, а множнік UU_1 выражае яго вышыню, бо UU_1 ёсць перпендыкуляр, узведзены з пункта U плоскасці $ABCD$ да плоскасці другой асновы $A_1B_1C_1D_1$. Значыць, аб'ём адвольнага паралелепіпеда роўны здабытку плошчы яго асновы і вышыні.

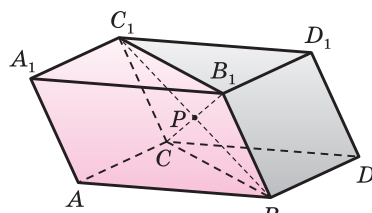


Рис. 24

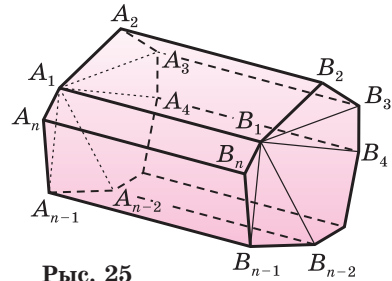
Тэарэма 3. Аб'ём прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы і вышыні:

$$V = S_{\text{асн}} \cdot h.$$

Доказ. Разгледзім спачатку трохвугольную прызму $ABCA_1B_1C_1$ (рыс. 23). Дапоўнім яе да паралелепіпеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ (рыс. 24). Пункт P перасячэння дыяганалёў дыяганальнага сячэння BCC_1B_1 гэтага паралелепіпеда ёсць яго цэнтр сіметрыі. Гэта азначае, што дабудаваная прызма $BCDB_1C_1D_1$ сіметрычная дадзенай прызме $ABCA_1B_1C_1$ адносна

цэнтра P , а таму гэтыя прызмы роўныя адна адной. Значыць, аб'ём паралелепіпеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ роўны падвоенаму аб'ёму дадзенай прызмы.

Аб'ём паралелепіпеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ роўны здабытку плошчы яго асновы $ABDC$ і вышыні. Але плошча яго асновы $ABDC$ роўная падвоенай плошчы асновы ABC дадзенай прызмы, а вышыня паралелепіпеда роўная вышыні прызмы. Адсюль вынікае, што аб'ём прызмы $ABCA_1B_1C_1$ роўны плошчы яе асновы ABC і вышыні.



Рыс. 25

Цяпер разгледзім адвольную прызму $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рыс. 25). Дыяганальнымі сячэннямі, што праходзяць праз вяршыню A_1 , разаб'ём яе на трохвугольныя прызмачасткі $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, $A_1A_3A_4B_1B_3B_4$, ..., $A_1A_{n-2}A_{n-1}B_1B_{n-2}B_{n-1}$, $A_1A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_n$, якія маюць адну і тую вышыню, роўную вышыні h дадзенай прызмы. Аб'ём дадзенай прызмы роўны суме аб'ёмаў прызмачастак. Па ўжо даказаным для аб'ёму V дадзенай прызмы атрымаем:

$$V = S_{A_1A_2A_3} \cdot h + S_{A_1A_3A_4} \cdot h + \dots + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} \cdot h + S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot h = \\ = (S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \dots + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} + S_{A_1A_{n-1}A_n}) \cdot h.$$

Улічыўшы, што сума ў дужках выяўляе плошчу S асновы дадзенай прызмы, атрымаем:

$$V = S \cdot h.$$

Вынік 2. Аб'ём прамой прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы і бакавога канта.

Вынік 3. Аб'ём прызмы роўны здабытку плошчы яе перпендыкулярнага сячэння і бакавога канта.

Гэтае сцверджанне можна даказаць спачатку для трохвугольнай прызмы, а потым і для адвольнай прызмы, калі выкарыстаць яе перпендыкулярнае сячэнне.



1. Які мнагаграннік называецца прызмай?
2. Якія грані прызмы называюць яе асновамі; бакавымі гранямі і якія канты прызмы называюць бакавымі кантамі?
3. Які адрэзак называюць дыяганаллю прызмы; вышынёй прызмы?
4. Якая плоскасць называецца дыяганальнай плоскасцю прызмы і які многавугольнік называюць дыяганальным сячэннем прызмы?
5. Якая прызма называецца прамой прызмай; нахіленай прызмай?
6. Якая прамая прызма называецца правільнай?

7. Якая прызма называецца паралелепіедам?
8. Які паралелепіпед называецца прамым? Які прамы паралелепіпед называецца прамавугольным? Які прамавугольны паралелепіпед называецца кубам?
9. Сфармулюйце ўласцівасці кантаў паралелепіпеда; граняў паралелепіпеда; дыяганалей паралелепіпеда; дыяганалей прамавугольнага паралелепіпеда.
10. Якія канты прамавугольнага паралелепіпеда называюцца яго вымярэннямі?
11. Як звязаны дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда і яго вымярэнні?
12. З чаго складаецца бакавая паверхня прызмы; поўная паверхня прызмы?
13. Як звязаны паміж сабой бакавая паверхня прызмы, перыметр яе перпендыкулярнага сячэння і бакавы кант?
14. Як знайсці бакавую паверхню прамой прызмы?
15. Што прымаюць у якасці адзінкі аб'ёму? Сфармулюйце асноўныя ўласцівасці аб'ёму.
16. Якія фігуры называюць роўнымі; роўнавялікімі? Як звязаны роўнасць і роўнавялікасць фігур?
17. Як знайсці аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, калі вядомы яго вымярэнні?
18. Чаму роўны аб'ём адвольнага паралелепіпеда?
19. Чаму роўны аб'ём прызмы; аб'ём прамой прызмы?



Задача 1. У аснове прамой прызмы $ABCA_1B_1C_1$ ляжыць раўнабедраны трохвугольнік ABC з прамым вуглом C . Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз кант AB пад вуглом 60° да плоскасці асновы, улічыўшы, што бакавы кант прызмы роўны 9 см, а сячэнне праходзіць праз вяршыню C_1 .

Рашэнне. Няхай CH — вышыня трохвугольніка ABC (рыс. 26). Тады, паколькі $CC_1 \perp (ABC)$, то $C_1H \perp AB$ (па тэарэме пра тры перпендыкуляры).

Паколькі трохвугольнік C_1CH прамавугольны, $\angle C_1CH = 90^\circ$, $\angle C_1HC = 60^\circ$ і $CC_1 = 9$ см, то $CH = CC_1 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ (см),

але $C_1H = 2CH = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

Паколькі ў трохвугольніку ABC $\angle ACB = 90^\circ$, $AH = HB = CH$, то $AB = 2CH = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

Тады для плошчы $S_{\text{сяч}}$ сячэння AC_1B атрымліваем:

$$S_{\text{сяч}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot C_1H = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: 54 см^2 .

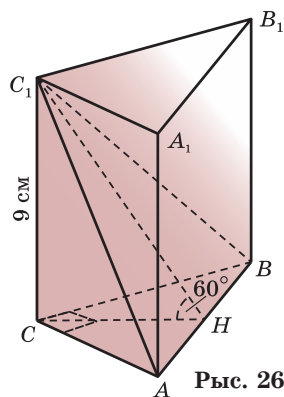


Рис. 26

Задача 2. Асновай нахіленай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ з’яўляецца правільны трохвугольнік. Бакавы кант AA_1 даўжынёй 6 см утварае з прылеглымі старанамі асновы вуглы 45° . Знайдзіце вышыню прызмы.

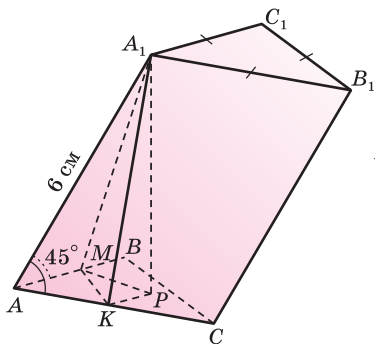


Рис. 27

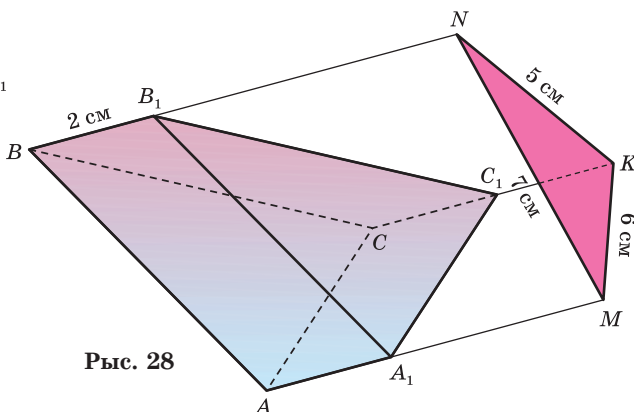


Рис. 28

Рашэнне. Няхай A_1P — вышыня нахіленай прызмы $ABCA_1B_1C_1$, праведзеная з вяршыні A_1 да асновы ABC , а AM і AK — вышыні бакавых граняў (рис. 27).

$\triangle AMA_1 = \triangle AK A_1$ (прамавугольныя, AA_1 — агульная гіпатэнуза, $\angle A_1AM = \angle A_1AK = 45^\circ$), значыць, $AM = AK = AA_1 \cdot \cos 45^\circ = 6\sqrt{2} = MA_1 = KA_1$.

$PM = PK$ — праекцыі роўных нахіленых.

$PM \perp AM$ і $PK \perp AK$ па тэарэме пра тры перпендыкуляры.

$\triangle APM = \triangle APK$ (прамавугольныя, $AM = AK$, $PM = PK$ — катэты). Таму:

$$\angle PAM = \angle PAK = \frac{1}{2} \cdot \angle MAK = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ, AP = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

У трохвугольніку AA_1P :

$$\angle A_1PA = 90^\circ, A_1P = \sqrt{AA_1^2 - AP^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Адказ: $2\sqrt{3}$ см.

Задача 3. Знайдзіце бакавую паверхню і аб’ём нахіленай прызмы з бакавымі кантамі 2 см, улічыўшы, што адлегласці паміж прамымі, што змяшчаюць бакавыя канты, роўныя 5 см, 6 см і 7 см.

Рашэнне. Няхай у нахіленай прызме $ABCA_1B_1C_1$ бакавы кант AA_1 роўны 2 см, а адлегласці паміж прамымі AA_1 і BB_1 , BB_1 і CC_1 , CC_1 і AA_1 адпаведна роўныя 7 см, 5 см, 6 см. Тады перпендыкулярнае сячэнне прызмы — трохвугольнік MNK — мае стораны MN , NK і KM даўжынямі 7 см, 5 см і 6 см адпаведна (рис. 28). Для яго перыметра P_{MNK} і плошчы S_{MNK} знойдзем:

$$P_{MNK} = MN + NK + KM = 7 + 5 + 6 = 18 \text{ (см)};$$

$$S_{MNK} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Цяпер для бакавой паверхні $S_{\text{бак}}$ і аб'ёму V атрымаем:

$$S_{\text{бак}} = P_{MNK} \cdot AA_1 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$V = S_{MNK} \cdot l = 6\sqrt{6} \cdot 2 = 12\sqrt{6} \text{ (см}^3\text{)}.$$

А д к а з: $S_{\text{бак}} = 36 \text{ см}^2$, $V = 12\sqrt{6} \text{ см}^3$.



1. Ці праўда, што ў прамой прызмы:
 - а) усе бакавыя грані — прамавугольнікі;
 - б) яе вышыня роўная бакавому канту?
2. Ці праўда, што сячэнне прызмы плоскасцю, паралельнай аснове, роўнае гэтай аснове?
3. Ці праўда, што ў правільнай прызмы:
 - а) усе бакавыя грані — роўныя адзін аднаму прамавугольнікі;
 - б) двухгранныя вуглы пры бакавых кантах роўныя адзін аднаму;
 - в) любы пункт прамой, што праходзіць праз цэнтры асноў, роўна-адлеглы ад бакавых граняў, а таксама ад бакавых кантаў?
4. Ці праўда, што:
 - а) у паралелепіпеда ўсе грані — паралелаграмы;
 - б) у прамога паралелепіпеда асновы — паралелаграмы, а бакавыя грані — прамавугольнікі;
 - в) у прамавугольнага паралелепіпеда ўсе грані — прамавугольнікі?
5. Ці праўда, што ў паралелепіпеда:
 - а) ёсць тры чацвёркі роўных кантаў;
 - б) ёсць тры пары роўных граняў;
 - в) яго чатыры дыяганалі перасякаюцца ў адным пункце, які з'яўляецца цэнтрам сіметрыі паралелепіпеда?
6. Вывзначце:
 - а) ці можа якая-небудзь бакавая грань нахіленага паралелепіпеда быць прамавугольнікам;
 - б) колькі бакавых граняў нахіленага паралелепіпеда могуць быць прамавугольнікамі.
7. Ці праўда, што ў прамога паралелепіпеда ёсць:
 - а) вось сіметрыі; б) плоскасць сіметрыі?
8. Ці праўда, што ў прамавугольнага паралелепіпеда:
 - а) ёсць тры восі сіметрыі;
 - б) ёсць тры плоскасці сіметрыі;
 - в) квадрат дыяганалі роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў;
 - г) усе чатыры дыяганалі роўныя адна адной;
 - д) з двума роўнымі вымярэннямі ёсць пяць плоскасцей сіметрыі;
 - е) з трыма роўнымі вымярэннямі ёсць дзевяць плоскасцей сіметрыі;
 - ж) з трыма роўнымі вымярэннямі ёсць дзевяць восей сіметрыі?

9. Знайдзіце дыяганаль правільнай чатырохвугольнай прызмы, у якой плошча асновы роўная 121 см^2 , а вышыня — 12 см .
10. Знайдзіце дыяганаль:
 - а) куба, улічыўшы, што дыяганаль яго бакавой грані роўная $6\sqrt{2} \text{ см}$;
 - б) прамавугольнага паралелепіпеда, улічыўшы, што дыяганалі яго граняў роўныя 11 см , 19 см і 20 см .
11. У прамавугольным паралелепіпедзе дыяганаль утварае з плоскасцю асновы вугал 60° . Знайдзіце дыяганаль паралелепіпеда, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля асновы, роўны 3 см .
12. У прамавугольным паралелепіпедзе стораны асновы і бакавы кант адносяцца як $4 : 4 : 7$. Знайдзіце вышыню паралелепіпеда, улічыўшы, што яго дыяганаль роўная 33 см .
13. Стораны асновы прамавугольнага паралелепіпеда роўныя 24 см і 10 см , а яго дыяганаль утварае з плоскасцю асновы вугал 45° . Знайдзіце бакавы кант паралелепіпеда.
14. Бакавы кант прызмы нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° . Знайдзіце вышыню прызмы, улічыўшы, што даўжыня бакавога канта роўная $10\sqrt{3} \text{ см}$.
15. Асновай $ABCD$ нахіленай прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ з'яўляецца квадрат з цэнтрам O і стараной 2 см . Знайдзіце бакавы кант прызмы, улічыўшы, што $A_1O = \sqrt{2} \text{ см}$, а адлегласць паміж плоскасцямі асновы роўная $\sqrt{2} \text{ см}$.
16. У аснове прамоў прызмы ляжыць раўнабедраная трапецыя з асновамі 50 см і 18 см і вышынёй 16 см . Знайдзіце двухгранныя вуглы пры бакавых кантах прызмы.
17. Бакавы кант AA_1 прызмы $ABCA_1B_1C_1$, асновай якой з'яўляецца правільны трохвугольнік ABC , утварае роўныя вуглы са старанамі асновы AC і AB . Дакажыце, што:
 - а) стораны BC і AA_1 перпендыкулярныя;
 - б) чатырохвугольнік CC_1B_1B з'яўляецца прамавугольнікам.
18. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная 32 см , а бакавы кант — 24 см . Знайдзіце плошчу сячэння, якое праходзіць праз старану верхняй асновы і супрацьлеглую вяршыню ніжняй асновы.
19. Бакавы кант правільнай трохвугольнай прызмы роўны 8 см , а старана асновы — 4 см . Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю, што праходзіць праз:
 - а) бакавы кант і сярэдзіну стараны асновы, якая не мае з гэтым кантам агульных пунктаў;
 - б) тры вяршыні прызмы, якія не належаць адной грані.

20. Асновай нахіленай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік ABC , у якім $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см і бакавы кант утварае з плоскасцю асновы вугал 45° . Праекцыяй вяршыні A_1 на плоскасць трохвугольніка ABC з'яўляецца пункт перасячэння яго медыян. Знайдзіце плошчу грані CC_1B_1B .
21. Знайдзіце плошчу паверхні прамавугольнага паралелепіпеда, улічыўшы, што яго вымярэнні роўныя 8 см, 10 см, 11 см.
22. У прамой трохвугольнай прызме з бакавой паверхняй 48 см² усе канты роўныя. Знайдзіце вышыню прызмы.
23. Па старане асновы a і бакавым канце l знайдзіце поўную паверхню правільнай прызмы, асновай якой з'яўляецца:
а) трохвугольнік; б) чатырохвугольнік; в) шасцівугольнік.
24. Бакавы кант нахіленай чатырохвугольнай прызмы роўны 24 см, а перпендыкулярным сячэннем з'яўляецца ромб са стараной 10 см. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.
25. Адлегласці паміж паслядоўнымі бакавымі кантамі нахіленай чатырохвугольнай прызмы роўныя 3 см, 5 см, 2 см, 6 см. Знайдзіце бакавы кант прызмы, улічыўшы, што яе бакавая паверхня роўная 48 см².
26. Дзве бакавыя грані нахіленай трохвугольнай прызмы перпендыкулярныя адна адной, іх агульны кант роўны 72 см і адлеглы ад двух іншых бакавых кантаў на 36 см і 105 см. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.
27. У нахіленай трохвугольнай прызме адлегласці паміж бакавымі кантамі роўныя 15 см, 17 см, 8 см. Знайдзіце бакавы кант прызмы, улічыўшы, што яе бакавая паверхня роўнавялікая перпендыкулярнаму сячэнню.
28. Знайдзіце поўную паверхню прамавугольнага паралелепіпеда, улічыўшы, што:
а) яго дыяганаль роўная 81 см, а вымярэнні адносяцца як $2 : 7 : 26$;
б) дыяганалі яго граняў роўныя 7 см, 8 см і 9 см;
в) яго дыяганаль даўжынёй 12 см складае з адной бакавой гранню вугал 30° , а з другой — вугал 45° ;
г) старана яго асновы даўжынёй a складае з дыяганаллю асновы вугал α , а з дыяганаллю бакавой грані, у якой гэтая старана ляжыць, вугал β ;
д) дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда роўная l і складае з адной бакавой гранню вугал 30° , а з другой — вугал 45° .
29. Знайдзіце бакавую паверхню прамого паралелепіпеда, улічыўшы, што стораны яго асновы роўныя 2 см і 7 см, меншая дыяганаль паралелепіпеда — 8 см і адзін з вуглоў асновы — 60° .

30. Стораны асновы прамога паралелепіпеда роўныя 3 м і 9 м, а яго дыяганалі складаюць з плоскасцю асновы вуглы 45° і 60° . Знайдзіце дыяганалі паралелепіпеда, яго бакавую паверхню.
31. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, у якой асновай з'яўляецца ромб са стараной 10 см і вуглом 60° і:
 а) бакавыя грані — прававугольнікі, меншая дыяганаль складае з асновай вугал 45° ;
 б) усе грані — роўныя ромбы.
- 32*. Дыяганаль прававугольнага паралелепіпеда роўная d і ўтварае з плоскасцю асновы вугал φ , а з меншай бакавой гранню — вугал α . Знайдзіце бакавую паверхню паралелепіпеда.
- 33*. Асновай прамоў прызмы з'яўляецца прававугольны трохвугольнік з вострым вуглом φ . Праз супрацьлеглы яму катэт і супрацьлеглую гэтаму катэту вяршыню другой асновы праведзена сячэнне, якое складае вугал β з плоскасцю асновы. Вызначце, якую частку ад плошчы бакавой паверхні прызмы складае плошча сячэння.
34. Знайдзіце аб'ём прававугольнага паралелепіпеда, стораны асновы якога роўныя a і b , а вышыня — h , улічыўшы, што:
 а) $a = 22$, $b = 24$, $h = 30$;
 б) $a = 9\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$, $h = 30\sqrt{10}$;
 в) $a = 72$, $b = 20\sqrt{3}$, $h = 52$;
 г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0,96$.
35. Знайдзіце масу цагліны памерамі 25 см $\times$ 12 см $\times$ 6,5 см, улічыўшы, што шчыльнасць цэглы роўная 1,9 г/см³.
36. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні правільнай прызмы па звестках, прыведзеных на рыс. 28.
37. Знайдзіце аб'ём прамоў прызмы $ABCA_1B_1C_1$, улічыўшы, што $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 11$ см.
38. Асновай прамоў прызмы з'яўляецца прававугольны трохвугольнік, адзін з катэтаў якога роўны 5 см. Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля асновы прызмы, роўны 6,5 см, а вышыня прызмы — 10 см.
39. Знайдзіце аб'ём прававугольнага паралелепіпеда $PQRTP_1Q_1R_1T_1$, улічыўшы, што $PR_1 = 13$ см, $QT = 12$ см і $QR_1 = 11$ см.
40. Знайдзіце аб'ём прававугольнага паралелепіпеда, дыяганаль якога:
 а) роўная 18 см і складае вугал 30° з плоскасцю адной з бакавых граняў і вугал 45° з бакавым кантам;
 б) складае вугал α з плоскасцю адной з бакавых граняў і вугал β з плоскасцю асновы, а яго вышыня роўная h .

41. Дыяганаль B_1D прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ складае з плоскасцю асновы вугал 45° , а двухгранны вугал A_1B_1BD роўны 60° . Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, улічыўшы, што дыяганаль асновы роўная 12 см.
42. Знайдзіце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда $MNOPM_1N_1O_1P_1$, улічыўшы, што:
- $MO_1 = 1$ м, $\angle O_1MO = 45^\circ$, $\angle O_1MN = 60^\circ$;
 - $MO_1 = 24$ см, $\angle O_1MP_1 = 45^\circ$ і дыяганаль MO_1 складае вугал 30° з плоскасцю адной з бакавых граняў.
43. Знайдзіце аб'ём прамой прызмы $XYZX_1Y_1Z_1$, улічыўшы, што:
- $\angle YXZ = 120^\circ$, $XY = 5$ см, $XZ = 3$ см і найбольшая з плошчаў бакавых граняў роўная 35 см²;
 - $\angle XY_1Z = 60^\circ$, $XY = 4$, $ZY_1 = 12$ і двухгранны вугал з кантам YY_1 прамы.
44. Дакажыце, што:
- роўныя целы з'яўляюцца роўнавялікімі;
 - роўнавялікія целы не абавязкова з'яўляюцца роўнымі.
45. Цела P складаецца з цел M і N , якія маюць адпаведна аб'ёмы V_1 і V_2 . Выразіце аб'ём V цела P праз аб'ёмы V_1 і V_2 , улічыўшы, што:
- целы M і N не маюць агульных унутраных пунктаў;
 - целы M і N маюць агульную частку, аб'ём якой роўны $\frac{1}{3} V_1$.
- 46*. Пяць кантаў прамой прызмы, асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, роўныя a , а астатнія чатыры канты роўныя адзін аднаму. Знайдзіце аб'ём прызмы.
47. Знайдзіце аб'ём прамой прызмы $BCDB_1C_1D_1$, улічыўшы, што $BC = CD$, $\angle BCD = \alpha$, дыяганаль B_1D роўная l і складае з плоскасцю асновы вугал β .
48. Асновай прамой прызмы з'яўляецца паралелаграм. Праз яго старану, роўную a , і супрацьлеглую ёй старану другой асновы праведзена сячэнне, якое складае вугал β з плоскасцю асновы. Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што плошча сячэння роўная Q .
49. Праз старану ніжняй асновы і супрацьлеглую вяршыню верхняй асновы правільнай трохвугольнай прызмы праведзена сячэнне, якое ўтварае з плоскасцю асновы вугал 60° . Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што старана асновы роўная a .
50. Знайдзіце аб'ём правільнай шасцівугольнай прызмы, найбольшая дыяганаль якой роўная 8 см і складае з бакавым кантам вугал 30° .

51. Знайдзіце аб'ём нахіленай прызмы, асновай якой з'яўляецца трохвугольнік са старанамі 10 см, 10 см і 12 см, а бакавы кант, роўны 8 см, складае з плоскасцю асновы вугал 60° .
52. Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём нахіленай трохвугольнай прызмы, у якой:
- адлегласці паміж паралельнымі прамымі, што праходзяць праз бакавыя канты, роўныя 2 см, 3 см і 4 см, а самі канты — 5 см;
 - дзе бакавыя грані роўныя і ўтвараюць вугал 60° , а прамая, якой належыць іх агульны кант даўжынёй a , знаходзіцца на адлегласці a ад плоскасці супрацьлеглай бакавой грані.
53. Асновай прызмы з'яўляецца ўмежаны ў акружнасць з радыусам 4 см раўнабедраны трохвугольнік з вуглом 30° пры аснове. Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што яе вышыня роўная бакавой старане асновы.
54. Асновай прызмы $KLMK_1L_1M_1$ з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік KLM са стараной l . Вяршыня K_1 праектуецца ў цэнтр гэтай асновы, а кант KK_1 складае з плоскасцю асновы вугал φ . Знайдзіце аб'ём прызмы.
55. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, улічыўшы, што:
- яго асновай з'яўляецца прамавугольнік са старанамі a і b , а бакавы кант даўжынёй c складае з сумежнымі старанамі асновы вуглы, роўныя φ ;
 - усе яго грані — роўныя ромбы з дыяганалямі, роўнымі 6 см і 8 см.
56. Знайдзіце аб'ём нахіленай прызмы $ABCA_1B_1C_1$, улічыўшы, што $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, а двухгранны вугал з кантам AB прамы.
57.  Дакажыце, што аб'ём нахіленай прызмы роўны здабытку бакавога канта і плошчы перпендыкулярнага сячэння прызмы.
58. Знайдзіце аб'ём нахіленай трохвугольнай прызмы, улічыўшы, што адлегласці паміж яе бакавымі кантамі роўныя 37 см, 13 см і 30 см, а плошча бакавой паверхні — 480 см^2 .
- 59*.  Плошча бакавой паверхні прызмы роўная $S_{\text{бак}}$, перыметр і плошча перпендыкулярнага сячэння — P і $S_{\text{перп}}$. Выразіце аб'ём гэтай прызмы праз $S_{\text{бак}}$, P і $S_{\text{перп}}$.
60. У трох граняў прамавугольнага паралелепіпеда дыяганалі, што выходзяць з адной вяршыні, роўныя 21 см, 24 см і 27 см. Знайдзіце аб'ём гэтага паралелепіпеда.
61. Стораны асновы прамога паралелепіпеда роўныя 7 см і $3\sqrt{2}$ см, а востры вугал паміж імі — 45° . Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда,

улічыўшы, што яго меншая дыяганаль складае з плоскасцю асновы вугал 45° .

62. Дыяганалі BD_1 і A_1C прамога паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ узаемна перпендыкулярныя і роўныя 6 см і 8 см, а кант AB роўны 3 см. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

63. Аб'ём прамой прызмы, асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, роўны 3 м^3 , а найменшая і найбольшая з плошчаў бакавых граняў — 3 м^2 і $3\sqrt{5} \text{ м}^2$. Знайдзіце даўжыні кантаў прызмы.

64. Дакажыце, што аб'ём трохвугольнай прызмы роўны палавіне здабытку плошчы бакавой грані і адлегласці ад гэтай грані да паралельнага ёй канта.

65. На трох дадзеных паралельных прамых, якія не ляжаць у адной плоскасці, адкладзены тры роўныя адрэзкі AA_1 , BB_1 і CC_1 . Дакажыце, што аб'ём прызмы, бакавымі кантамі якой з'яўляюцца гэтыя адрэзкі, не залежыць ад становішча адрэзкаў на дадзеных прамых.

66. Знайдзіце аб'ём нахіленай трохвугольнай прызмы, плошчы бакавых граняў якой прапарцыянальныя лікам 20, 37 і 51, яе бакавы кант роўны 0,5 дм, а бакавая паверхня — $10,8 \text{ дм}^2$.

67. На рис. 29 паказана дэталі. Знайдзіце плошчу яе паверхні і аб'ём, улічыўшы, што памеры дадзены ў міліметрах.

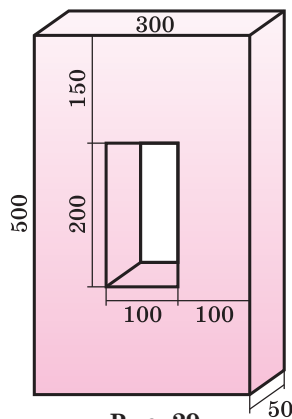


Рис. 29

68. Асновай нахіленай прызмы $IJKI_1J_1K_1$ з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік IJK з катэтамі IJ і IK , адпаведна роўнымі 7 см і 24 см. Вяршыня I_1 роўнаадлеглая ад вяршынь I , J і K . Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што кант II_1 складае з плоскасцю асновы вугал 45° .

69. Роўнастаронні трохвугольнік са стараной $\sqrt{3}$ см з'яўляецца асновай трохвугольнай прызмы, у якой адна з вяршынь верхняй асновы роўнаадлеглая ад усіх старон ніжняй асновы, а бакавы кант складае з плоскасцю асновы вугал 60° . Знайдзіце бакавую паверхню прызмы і яе аб'ём.

- 70*. Асновай прамога паралелепіпеда з'яўляецца ромб з плошчай S_0 (рис. 30). Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда, улічыўшы, што яго дыяганальныя сячэнні маюць плошчы S_1 і S_2 .

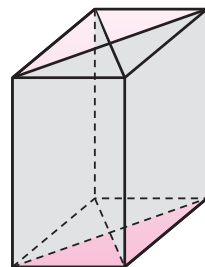
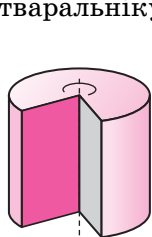


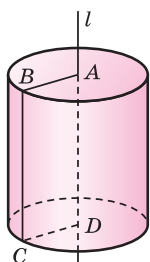
Рис. 30

§ 2. Цыліндр

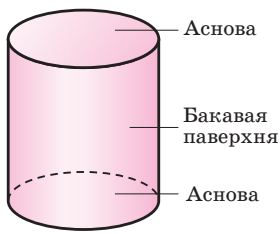
А) Цыліндрам называецца цела, атрыманае вярчэннем прамавугольніка вакол восі, якая праходзіць праз яго старану (рыс. 31). На рыс. 32 паказана ўтварэнне цыліндра пры вярчэнні прамавугольніка $ABCD$ вакол прамой l , якой належыць старана AD . Пры гэтым ломаная $ABCD$ апісвае *паверхню* цыліндра, адрэзак BC — *бакавую паверхню*, а адрэзкі AB і DC — *асновы* цыліндра (рыс. 33). Прамая, якая праходзіць праз цэнтры асноў, называецца *воссю* цыліндра, адрэзак, які злучае акружнасці асноў і перпендыкулярны іх плоскасцям, — *утваральнікам* цыліндра, а перпендыкуляр, апущаны з якога-небудзь пункта адной асновы на другую аснову, — *вышыняй* цыліндра (рыс. 34). Вышыня цыліндра роўная яго ўтваральніку.



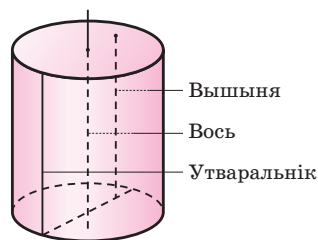
Рыс. 31



Рыс. 32



Рыс. 33



Рыс. 34

Паверхню цыліндра можна разгарнуць на плоскасць, у выніку атрымаецца прамавугольнік, які выяўляе бакавую паверхню цыліндра, і два кругі, якія выяўляюць яго асновы. На рыс. 35 паказаны цыліндр і яго разгортка.

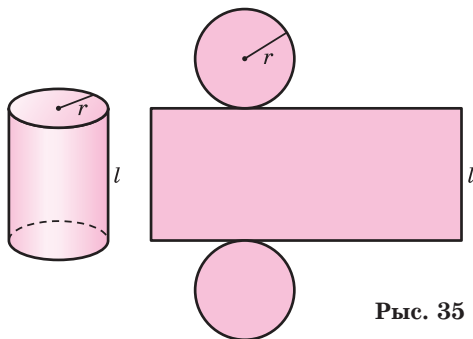
Тэарэма 4. Бакавая паверхня цыліндра роўная здабытку даўжыні акружнасці асновы і вышыні:

$$S_{\text{бак}} = 2\pi rh.$$

Доказ правядзіце самастойна, выкарыстаўшы рыс. 35.

Калі цыліндр перасекчы плоскасцю, паралельнай аснове, то атрымаецца круг, роўны аснове (рыс. 36), а калі плоскасцю, перпендыкулярнай аснове, то прамавугольнік, адна старана якога роўная вышыні цыліндра (рыс. 37). *Восевае сячэнне* цыліндра, г. зн. сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз вось цыліндра, з'яўляецца прамавугольнікам, стараны якога роўныя вышыні цыліндра і дыяметру яго асновы (рыс. 38).

Прыклад 1. Плоскасць, паралельная восі цыліндра, адсякае ад акружнасці асновы дугу ў 60° . Дыяганаль



Рыс. 35

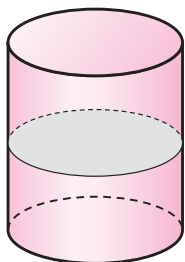


Рис. 36

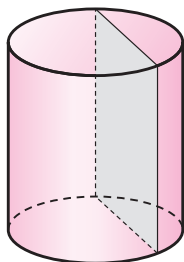


Рис. 37

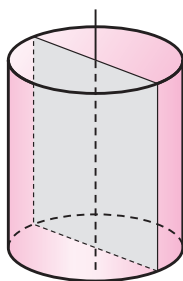


Рис. 38

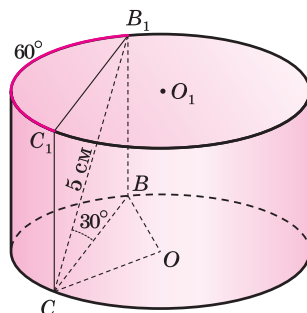


Рис. 39

сячэння роўная 5 см і складае вугал 30° з плоскасцю асновы. Знайдзем поўную паверхню цыліндра.

Р а ш э н н е. Няхай плоскасць, паралельная восі цыліндра, праходзіць праз утваральнікі BB_1 і CC_1 і адсякае ад акружнасці дугу B_1C_1 , роўную 60° (рис. 39).

Паколькі $B_1B \parallel O_1O \parallel CC_1$, то $B_1B \perp (OBC)$, сячэнне BCC_1B_1 з'яўляецца прамавугольнікам і CB — праекцыя дыяганалі B_1C на плоскасць асновы цыліндра. Таму $\angle B_1CB = 30^\circ$, $CB = CB_1 \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (см) і $B_1B = \frac{1}{2} CB_1 = 2,5$ (см).

Вугал BOC — цэнтральны, ён вымяраецца дугой BC , таму $\angle BOC = 60^\circ$ і, значыць, раўнабедраны трохвугольнік BOC з'яўляецца роўнастароннім.

Таму $OB = BC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (см). Тады $S_{\text{асн}} = \pi \cdot OB^2 = \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{75\pi}{4}$ (см²);

$$S_{\text{бак}} = 2\pi \cdot OB \cdot BB_1 = 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\pi\sqrt{3}}{2}$$
 (см²);

$$S_{\text{поўн}} = 2S_{\text{асн}} + S_{\text{бак}} = \frac{25\pi}{2} (3 + \sqrt{3}) \text{ см}^2.$$

Адказ: $\frac{25\pi}{2} (3 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$.



Б) Будзем рухаць плоскасць, якая праходзіць праз вось цыліндра, паралельна самой сабе (рис. 40). Пры гэтым дзве супрацьлеглыя стараны прамавугольніка-сячэння цыліндра, якія з'яўляюцца хордамі асноў, будуць змяншацца, а дзве іншыя стараны, якія з'яўляюцца ўтваральнікамі цыліндра, — збліжацца да моманту, пакуль не супадуць. Атрымаем плоскасць, якая цалкам змяшчае ўтваральнік цыліндра і не мае з ім іншых агульных пунктаў. Такая плоскасць называецца *датычнай плоскасцю цыліндра*. Любая прамая, праведзеная ў датычнай плоскасці цыліндра і адрозная ад утваральніка, мае з цыліндрам адзіны агульны пункт. Такая прамая называецца *датычнай прамой цыліндра*.

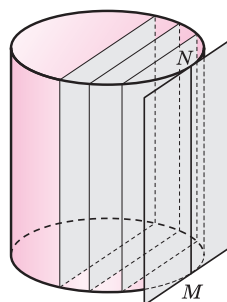


Рис. 40

Тэарэма 5. Калі плоскасць датыкаецца да цыліндра па пэўным ўтваральніку, то да яе перпендыкулярная любая прамая, якая перасякае гэты ўтваральнік, вось цыліндра і перпендыкулярная гэтай восі.



Доказ. Няхай плоскасць α датыкаецца да цыліндра з воссю AB па ўтваральніку MN , прамая l перасякае прамую AB у пункце C , прамую MN у пункце D і $l \perp AB$ (рыс. 41). Дакажам, што прамая l перпендыкулярная плоскасці α .

Праз пункт D правядзём плоскасць β , перпендыкулярную ўтваральніку MN . Яна перасякае цыліндр па крузе з цэнтрам C на прамой AB і плоскасць α — па прамой DE , якая датыкаецца да акружнасці з цэнтрам C . Паколькі $AB \parallel MN$, то $l \perp MN$, а паколькі l праходзіць праз пункт D і перасякае AB , то прамыя l і DC супадаюць. Прамая DE , па ўласцівасці датычнай да акружнасці, перпендыкулярная радыусу CD адпаведнай акружнасці.

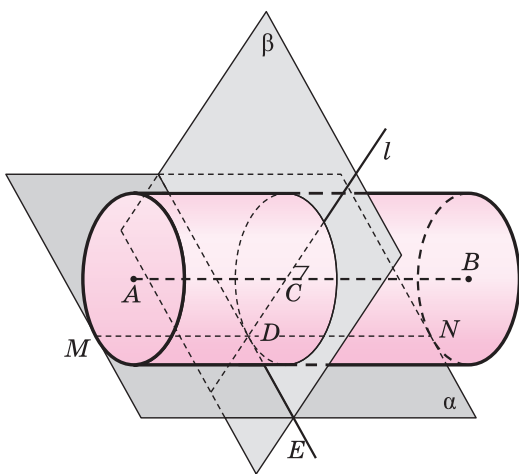
Такім чынам, прамая l перпендыкулярная прамым MN і DE , якія перасякаюцца і ляжаць у плоскасці α , таму, па прымеце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці, прамая l перпендыкулярная α .

Тэарэма 5 выражае ўласцівасць датычнай плоскасці цыліндра.

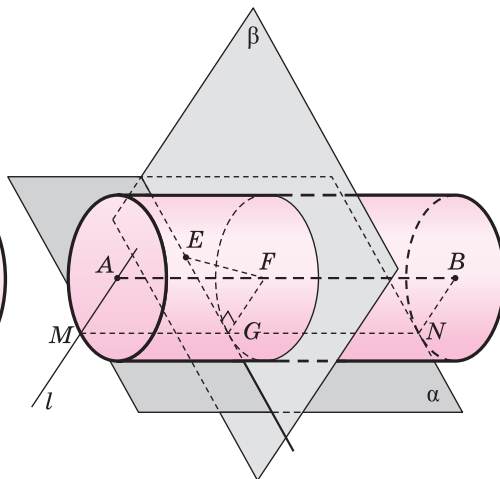
Тэарэма 6. Плоскасць датыкаецца да цыліндра, калі яна праходзіць праз яго ўтваральнік і перпендыкулярная прамой, якая перасякае гэты ўтваральнік, вось цыліндра і перпендыкулярная гэтай восі.



Доказ. Няхай плоскасць α праходзіць праз утваральнік MN цыліндра і перпендыкулярная да прамой l , якая перасякае гэты



Рыс. 41



Рыс. 42

ўтваральнік, вось цыліндра і перпендыкулярная восі AB цыліндра (рыс. 42). Дакажам, што плоскасць α не мае з цыліндрам іншых агульных пунктаў, акрамя пунктаў утваральніка MN .

Няхай E — пункт плоскасці α , які не належыць утваральніку MN . Праз гэты пункт правядзём плоскасць β , перпендыкулярную восі AB . Яна перасячэ цыліндр па крузе з цэнтрам F , утваральнік MN у пэўным пункце G і плоскасць α па прамой GE . Паколькі $FG \parallel l$ і $l \perp \alpha$, то $FG \perp \alpha$, а таму $FG \perp GE$. Улічыўшы, што FE і FG — адпаведна гіпатэнуза і катэт прававугольнага трохвугольніка EFG , атрымаем, што $FE > FG$. Значыць, пункт E не належыць цыліндру з воссю AB .

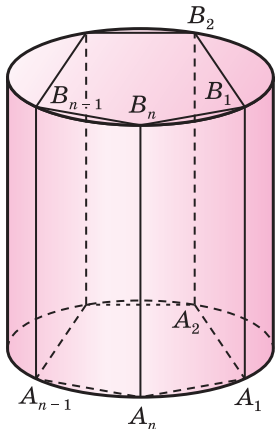
Тэарэма 6 выражае *прымету датычнай плоскасці цыліндра*.

Няхай ёсць цыліндр (рыс. 43). Умежым у адну з асноў цыліндра многавугольнік $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, праз яго вяршыні $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ правядзём утваральнікі $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}, A_nB_n$ і злучым іх іншыя канцы $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$. У выніку атрымаем прызму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$. Яе называюць *прызмай, умежанай у цыліндр*, а сам цыліндр называюць *цыліндрам, апісаным каля прызмы*. Калі цыліндр апісаны каля прызмы, то асновы цыліндра апісаны каля асноў прызмы, а бакавая паверхня цыліндра змяшчае бакавыя канты прызмы.

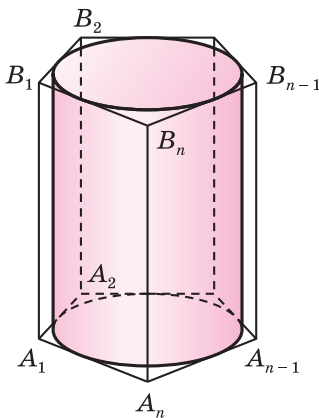
Падобным чынам уводзіцца паняцце *прызмы, апісанай каля цыліндра*, і *цыліндра, умежанага ў прызму* (рыс. 44). Калі прызма апісана каля цыліндра, то яе асновы апісаны каля асноў цыліндра, а бакавыя грані датыкаюцца да бакавой паверхні цыліндра.

Прыклад 2. Стораны асновы прававугольнага паралелепіпеда роўныя 4 см і $2\sqrt{5}$ см. Знойдзем плошчу поўнай паверхні цыліндра, апісанага каля паралелепіпеда, улічыўшы, што яго дыяганальным сячэннем з'яўляецца квадрат.

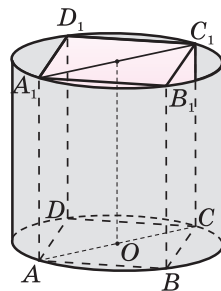
Рашэнне. Няхай $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — прававугольны паралелепіпед, $AB = 4$ см, $BC = 2\sqrt{5}$ см (рыс. 45). Паколькі каля прававугольніка $ABCD$



Рыс. 43



Рыс. 44



Рыс. 45

можна апісаць акружнасць, то каля прамавугольнага паралелепіпеда можна апісаць цыліндр. Цэнтр O асновы цыліндра роўнаадлеглы ад вяршынь A, B, C, D асновы паралелепіпеда і таму супадае з пунктам перасячэння дыяганалей прамавугольніка $ABCD$. Прамавугольнік AA_1C_1C з'яўляецца дыяганальным сячэннем цыліндра. Па ўмове $AA_1 = AC$.

У прамавугольнага трохвугольніка ABC знойдзем дыяметр AC асновы цылінра: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = 6$ (см).

Улічыўшы, што ўтваральнік AA_1 цыліндра роўны дыяметру яго асновы, знаходзім:

$$l = 6 \text{ см}, r = 3 \text{ см і } S_{\text{поўн}} = 2S_{\text{асн}} + S_{\text{бак}} = \\ = 2\pi \cdot r \cdot (r + l) = 2\pi \cdot 3 \cdot (3 + 6) = 54\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: $54\pi \text{ см}^2$.

В)

Тэарэма 7. Аб'ём цыліндра роўны здабытку плошчы яго асновы і ўтваральніка:

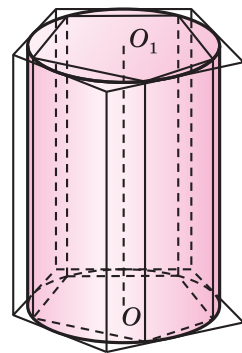
$$V_{\text{ц}} = S_{\text{асн}} \cdot l.$$

Доказ. Няхай ёсць цыліндр з воссю OO_1 (рыс. 46). У яго ўмежым правільную прызму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$ і каля яго апішам правільную прызму $C_1C_2...C_{n-1}C_nD_1D_2...D_{n-1}D_n$. У адпаведнасці з тэарэмай 3, аб'ём першай прызмы роўны здабытку плошчы многавугольніка $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ і вышыні прызмы, якая роўная бакавому канту A_1B_1 , а аб'ём другой — здабытку плошчы многавугольніка $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ і той самай вышыні. Аб'ём самога цыліндра заключаны паміж гэтымі аб'ёмамі.

Будзем колькасць n старон асноў прызмы рабіць усё большай і большай. Тады аб'ём першай прызмы павялічваецца, аб'ём другой — памяншаецца, а рознасць паміж імі імкнецца да нуля, калі колькасць старон n становіцца неабмежавана вялікай. Той лік, да якога набліжаюцца аб'ёмы абедзвюх прызмаў, прымаецца за аб'ём цыліндра.

У апісаным працэсе вышыня H прызмы застаецца роўнай бакавому канту, які роўны ўтваральніку l цыліндра, а плошчы многавугольнікаў $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ і $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ імкнуцца да плошчы S круга, што ляжыць у аснове цыліндра. Значыць, аб'ём V цыліндра роўны здабытку плошчы S асновы і ўтваральніка l цыліндра:

$$V = S \cdot l.$$

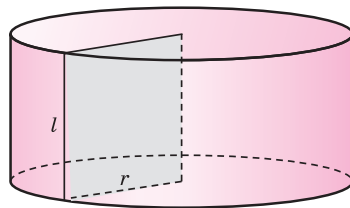


Рыс. 46

Прыклад 3. Цыліндр атрыманы вярчэннем квадрата вакол сваёй стараны, роўнай a . Знойдзем аб'ём цыліндра.

Рашэнне. Паколькі радыус r асновы цыліндра і яго ўтваральнік l (рыс. 47) роўныя старане a квадрата, то $S_{\text{асн}} = \pi \cdot r^2 = \pi a^2$, а $V = S_{\text{асн}} \cdot l = \pi a^3$.

Адказ: πa^3 .



Рыс. 47



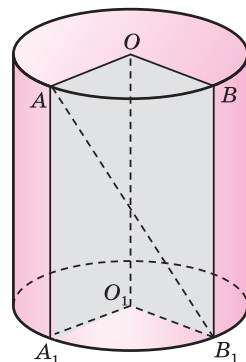
1. Якое цэла называецца цыліндрам?
2. Што называюць паверхняй цыліндра; бакавой паверхняй цыліндра; асновамі цыліндра?
3. Якую прамую называюць воссю цыліндра?
4. Які адрэзак называюць утваральнікам цыліндра; вышынёй цыліндра?
5. Чаму роўная бакавая паверхня цыліндра?
6. Якая фігура атрымліваецца пры перасячэнні цыліндра плоскасцю, паралельнай аснове цыліндра; перпендыкулярнай аснове цыліндра?
7. Якое сячэнне цыліндра называюць восевым сячэннем?
8. Што называюць датычнай плоскасцю цыліндра і чым з'яўляецца лінія дотыку?
9. Якая прамая называецца датычнай прамой цыліндра?
10. Сфармулюйце ўласцівасць датычнай плоскасці цыліндра.
11. Сфармулюйце прымету датычнай плоскасці цыліндра.
12. Калі гавораць, што прызма ўмежана ў цыліндр; цыліндр апісаны каля прызмы?
13. Калі гавораць, што цыліндр умежаны ў прызму; прызма апісана каля цыліндра?
14. Чаму роўны аб'ём цыліндра?



Задача 1. Двухгранны вугал велічынёй 60° , кант якога змяшчае вось цыліндра, перасякае акружнасці яго асноў у пунктах A і B , A_1 і B_1 (рыс. 48). Знайдзіце даўжыню адрэзка AB_1 , улічыўшы, што радыус асновы цыліндра роўны r , а ўтваральнік — l .

Рашэнне. Паколькі $OO_1 \perp (AOB)$, то $\angle AOO_1 = 90^\circ$, $\angle BOO_1 = 90^\circ$, $\angle AOB$ — лінейны вугал дадзенага двухграннага вугла, $\angle AOB = 60^\circ$, таму трохвугольнік AOB — роўнастаронні, г. зн. $OA = OB = AB = r$. Гэтаксама атрымваем, што $\angle A_1O_1O = 90^\circ$, $\angle B_1O_1O = 90^\circ$, $O_1A_1 = O_1B_1 = A_1B_1 = r$. Значыць, чатырохвугольнікі AOO_1A_1 , BOO_1B_1 і ABB_1A_1 — прававугольнікі. Таму $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{r^2 + l^2}$.

Адказ: $\sqrt{r^2 + l^2}$.



Рыс. 48

Задача 2. Знайдзіце аб'ём цыліндра, умежанага ў правільную шасцівугольную призму, кожны кант якой роўны a .

Рашэнне. Вышыня цыліндра, умежанага ў прамую призму, роўная бакавому канту прызмы: $H = a$ (рыс. 49). радыус асновы цыліндра роўны радыусу акружнасці, умежанай у аснову прызмы: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Цяпер знаходзім:

$$V = S_{\text{асн}} \cdot H = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot a = \frac{3\pi a^3}{4}.$$

Адказ: $\frac{3\pi a^3}{4}$.

Задача 3. У цыліндр умежана трохвугольная прызма, асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом 30° (рыс. 50). У гэтую призму ўмежаны цыліндр. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндраў.

Рашэнне. Паколькі ўмежаны ў трохвугольную призму і апісаны каля яе цыліндры маюць роўныя вышыні, то адносіна іх аб'ёмаў роўная адносіне плошчаў асноў цыліндраў, якая роўная квадрату адносіны радыусаў гэтых асноў.

Выразім радыус умежанай у прамавугольны трохвугольнік акружнасці праз радыус апісанай акружнасці. Паколькі $r = \frac{a+b-c}{2}$ і $R = \frac{c}{2}$, дзе a і b — катэты прамавугольнага трохвугольніка, c — яго гіпатэнуза, r і R — радыусы ўмежанай і апісанай акружнасцей, то $c = 2R$, і, улічыўшы, што катэт супраць вугла 30° роўны палавіне гіпатэнузы, атрымліваем:

$$a = R, b = a\sqrt{3}, r = \frac{R + R\sqrt{3} - 2R}{2} = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ і } V_2 : V_1 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

Адказ: $V_2 : V_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.



Задача 4. У аснове прамой прызмы ляжыць раўнабедраная трапецыя з меншай асновай a , бакавой стараной $2a$ і вострым вуглом 60° . Сячэнне, што праходзіць праз розныя асновы трапецый, мае плошчу S . Дакажыце, што ў гэтую призму можна ўмежыць цыліндр і знайсці яго аб'ём.

Рашэнне. Няхай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамая прызма (рыс. 51), $AD \parallel BC$, $BC = a$, $AB = CD = 2a$, $\angle BAD = 60^\circ$, $S_{AB_1 C_1 D} = S$.

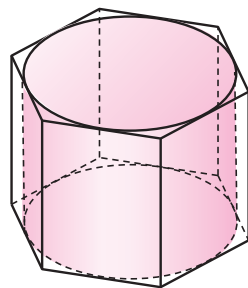


Рис. 49

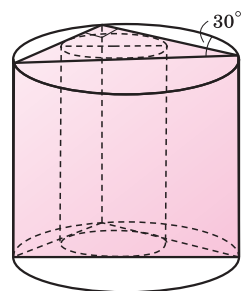
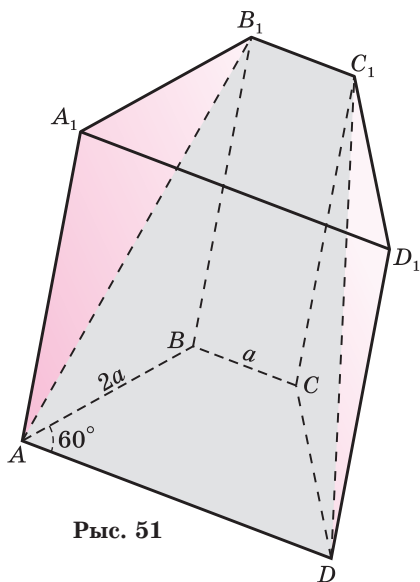
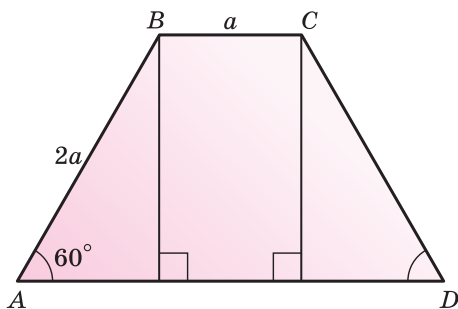


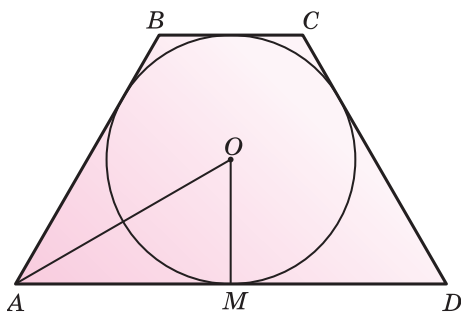
Рис. 50



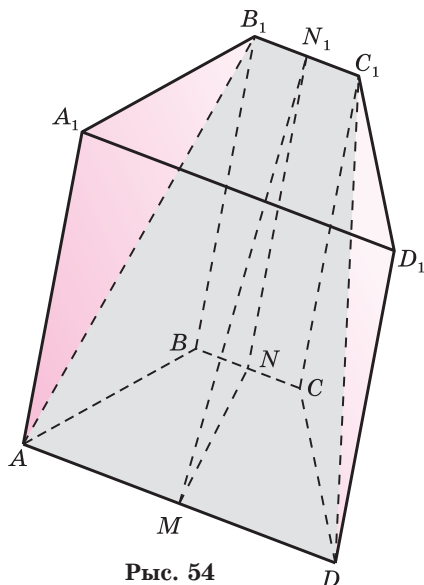
Рыс. 51



Рыс. 52



Рыс. 53



Рыс. 54

Для трапецыі $ABCD$ (рыс. 52) знаходзім:

$$AD = BC + 2AB \cos \angle BAD = a + 2 \cdot 2a \cos 60^\circ = 3a.$$

Паколькі $AB + CD = 4a = AD + BC$, то ў трапецыю $ABCD$ можна ўмежыць акружнасць, а ў прамую прызму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — цыліндр.

Няхай O — цэнтр акружнасці, умежанай у трапецыю $ABCD$, M — пункт дотыку гэтай акружнасці да стараны AD (рыс. 53). Тады M — сярэдзіна AD , AO — бісектрыса вугла BAD ,

$$AM = \frac{1}{2}AD = \frac{3a}{2}, \quad MO = AM \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Паколькі $B_1C_1 \parallel BC \parallel AD$, то сячэнне AB_1C_1D — трапецыя, прычым раўнабедраная з асновамі B_1C_1 і AD , роўнымі a і $3a$ адпаведна. Таму $S = \frac{B_1C_1 + AD}{2} \cdot h = 2ah$, дзе h — вышыня трапецыі AB_1C_1D . Адсюль $h = \frac{S}{2a}$.

Няхай N і N_1 — сярэдзіны кантаў BC і B_1C_1 адпаведна (рыс. 54), тады N_1M — вышыня трапецыі, NN_1 — датычная прамая ўмежанага цыліндра,

$N_1N \perp (ABC)$. Значыць, $\angle N_1NM = 90^\circ$, таму трохвугольнік N_1NM прамавугольны і:

$$N_1N = \sqrt{MN_1^2 - MN^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2a}\right)^2 - (a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$$

Паколькі радыус MO асновы ўмежанага цыліндра роўны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а яго ўтваральнік — $\frac{1}{2a}\sqrt{S^2 - 12a^4}$, то аб'ём цыліндра:

$$V = \pi OM^2 \cdot N_1N = \frac{3\pi a}{8}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$$

Адказ: $\frac{3\pi a}{8}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$



71. Ці праўда, што:

- а) вышыня цыліндра роўная яго ўтваральніку;
- б) сячэнне цыліндра плоскасцю, паралельнай аснове, ёсць круг, роўны аснове;
- в) сячэнне цыліндра плоскасцю, перпендыкулярнай аснове, ёсць прамавугольнік, адна старана якога роўная вышыні цыліндра;
- г) вось цыліндра паралельная яго ўтваральніку;
- д) восевае сячэнне цыліндра з'яўляецца прамавугольнікам, сумежныя стораны якога роўныя вышыні цыліндра і дыяметру асновы;
- е) плоскасць, паралельная аснове цыліндра, адсякае ад яго цэла, якое таксама з'яўляецца цыліндрам?

72. Ці мае цыліндр:

- а) цэнтр сіметрыі;
- б) восі сіметрыі;
- в) плоскасці сіметрыі?

73. Вызначце, якую фігуру ўтвараюць пункты паверхні цыліндра, роўнаадлеглыя ад:

- а) двух пунктаў асновы; б) двух утваральнікаў.

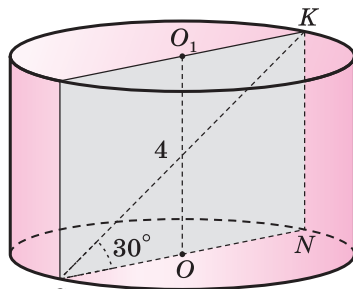
74. Знайдзіце радыус асновы і вышыню цыліндра па звестках, прыведзеных на рысунку 55.

75. Знайдзіце дыяганаль восевага сячэння цыліндра, улічыўшы, што радыус цыліндра і яго вышыня адпаведна роўныя:

- а) 1,5 м і 4 м; б) 10 см і 21 см; в) 22 і 117.

76. Дыяганаль восевага сячэння цыліндра роўная 24 см, а вугал паміж ёй і ўтваральнікам цыліндра — 60° . Знайдзіце:

- а) вышыню цыліндра; б) радыус цыліндра; в) плошчу сячэння.



Рыс. 55

77. Цыліндр атрыманы вярчэннем квадрата са стараной a вакол адной з яго старон. Знайдзіце:
- а) плошчу восевага сячэння цыліндра;
 - б) плошчу бакавой і поўнай паверхні цыліндра.
78. Восевае сячэнне цыліндра — квадрат, дыяганаль якога роўная 40 см. Знайдзіце:
- а) вышыню цыліндра;
 - б) плошчу асновы цыліндра;
 - в) бакавую паверхню цыліндра;
 - г) поўную паверхню цыліндра.
79. Восевыя сячэнні двух цыліндраў роўныя. Ці можна сцвярджаць, што роўныя і вышыні гэтых цыліндраў?
80. Плошча восевага сячэння цыліндра роўная 40 м^2 , а плошча яго асновы — 10 м^2 . Знайдзіце вышыню цыліндра.
81. Вышыня цыліндра роўная 16 см, радыус яго асновы — 10 см. Знайдзіце плошчу сячэння цыліндра плоскасцю, паралельнай яго восі, улічыўшы, што адлегласць паміж гэтымі плоскасцю і воссю роўная 6 см.
82. Цыліндр, вышыня якога роўная 12 см, а радыус асновы — 10 см, перасечаны такой плоскасцю, паралельнай восі цыліндра, што ў сячэнні атрымаўся квадрат. Знайдзіце адлегласць ад восі цыліндра да сечнай плоскасці.
83. Праз утваральнікі AB і CD цыліндра з радыусам асновы r і вышынёй h праведзена сячэнне, якое адсякае ад акружнасці асновы дугу ў 60° . Знайдзіце плошчу гэтага сячэння.
84. Ёсць цыліндр, радыус асновы якога роўны r , а вышыня — h . Пункты A і B на акружнасцях асноў цыліндра выбраны так, што прамая AB знаходзіцца на адлегласці d ад восі цыліндра. Знайдзіце:
- а) h , улічыўшы, што $r = 10 \text{ дм}$, $d = 8 \text{ дм}$, $AB = 13 \text{ дм}$;
 - б) d , улічыўшы, што $h = 12 \text{ см}$, $r = 10 \text{ см}$, $AB = 20 \text{ см}$.
85. Праз адзін утваральнік цыліндра праведзены дзве сечныя плоскасці, з якіх адна праходзіць праз вось цыліндра пад вуглом φ да другой. Знайдзіце адносіну плошчаў сячэнняў цыліндра гэтымі плоскасцямі.
86. Вышыня цыліндра роўная h , а плошча восевага сячэння — S . Знайдзіце плошчу сячэння цыліндра плоскасцю, паралельнай яго восі і адлеглай ад яе на d .
87. Праз утваральнік цыліндра праведзены дзве такія ўзаемна перпендыкулярныя плоскасці, што плошчы атрыманых сячэнняў роўныя S кожная. Знайдзіце плошчу восевага сячэння цыліндра.

88. Знайдзіце плошчу восевага сячэння цыліндра, бакавая паверхня якога роўная S .

89. Знайдзіце радыус асновы цыліндра з поўнай паверхняй $288\pi \text{ см}^2$ і яго вышыню, улічыўшы, што яна на 12 см большая за радыус асновы.

90. Вызначце, колькі квадратных метраў ліставой бляхі пойдзе на выраб трубы даўжынёй 4 м і дыяметрам 25 см, улічыўшы, што на швы неабходна дадаць 2,5 % плошчы яе бакавой паверхні.

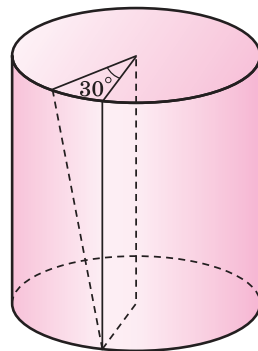


Рис. 56

91. Канцы адрэзка ляжаць на акружнасцях асноў цыліндра, а вугал паміж радыусамі, праведзенымі ў яго канцы, роўны 30° (рис. 56). Знайдзіце вугал паміж гэтым адрэзкам і воссю, улічыўшы, што восевым сячэннем цыліндра з'яўляецца квадрат.

92. Плоскасць, паралельная восі цыліндра з вышынёй 10 дм, перасякае яго па прамавугольніку з плошчай 240 дм^2 . Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, улічыўшы, што адлегласць ад восі цыліндра да плоскасці роўная 9 дм.

93*. На акружнасцях асноў цыліндра, вышыня і радыус асновы якога адпаведна роўныя 20 см і 70 см, выбраны такія пункты A, B, C, D , якія з'яўляюцца вяршынямі квадрата (рис. 57). Знайдзіце яго старану.

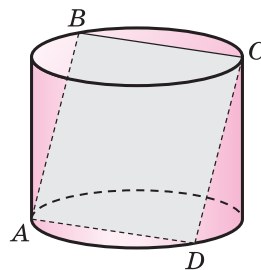


Рис. 57

94. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні цыліндра, у якога вугал паміж дыяганалямі разгорткі бакавой паверхні роўны φ , а сама дыяганаль — d .

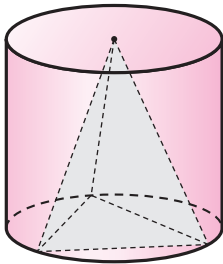
95. Улічыўшы, што адзін цыліндр атрыманы вярчэннем прамавугольніка $ABCD$ вакол прамой AB , другі — вярчэннем таго самага прамавугольніка вакол прамой BC :

а) дакажыце, што бакавыя паверхні гэтых цыліндраў роўныя;

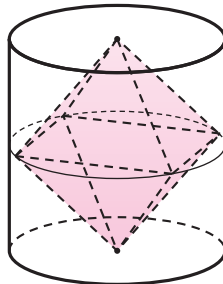
б) знайдзіце адносіну плошчаў поўных паверхняў гэтых цыліндраў, улічыўшы, што $AB = p$, $BC = q$.

96. Пры вярчэнні прамавугольніка вакол няроўных старон, атрымліваюцца цыліндры, поўныя паверхні якіх роўныя S_1 і S_2 . Знайдзіце дыяганаль прамавугольніка.

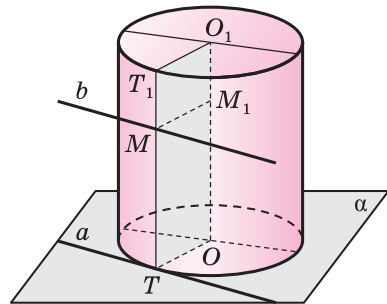
97. Бакавая паверхня цыліндра роўная плошчы круга, апісанага вакол яго восевага сячэння. Знайдзіце адносіну радыуса цыліндра да яго вышыні.



Рыс. 58



Рыс. 59



Рыс. 60

98*. Знайдзіце вышыню і радыус цыліндра, у якога плошча бакавой паверхні найбольшая, улічыўшы, што перыметр восевага сячэння цыліндра роўны $2p$.



99*. Трохвугольная піраміда, усе канты якой роўныя a , і цыліндр размешчаны так, што адна вяршыня піраміды з'яўляецца цэнтрам асновы цыліндра, а тры астатнія ляжаць на акружнасці супрацьлеглай асновы (рыс. 58). Знайдзіце поўную паверхню цыліндра.



100*. Васеміграннік, усе грані якога з'яўляюцца правільнымі трохвугольнікамі, і цыліндр размешчаны так, што дзве вяршыні васемігранніка з'яўляюцца цэнтрамі асноў цыліндра, а астатнія ляжаць на цыліндрычнай паверхні (рыс. 59). Знайдзіце плошчу восевага сячэння цыліндра, улічыўшы, што яго вышыня роўная h .



101. Улічыўшы, што пункт M з'яўляецца пунктам утваральніка TT_1 цыліндра з воссю OO_1 , пункт M_1 — праекцыя пункта M на гэтую вось, прамая a датыкаецца да акружнасці асновы з цэнтрам O , а прамая b датыкаецца да цыліндра ў пункце M (рыс. 60), укажыце, якой можа быць велічыня вугла паміж:



- а) плоскасцю TT_1O і прамой a ; в) прамымі TT_1 і TO ;
- б) плоскасцю TT_1O і прамой b ; г) прамымі TT_1 і MM_1 .

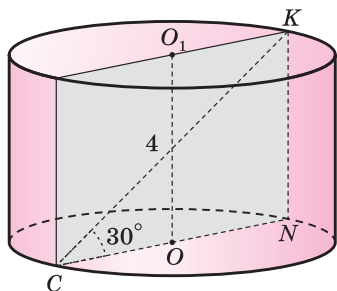
102. Ці праўда, што:



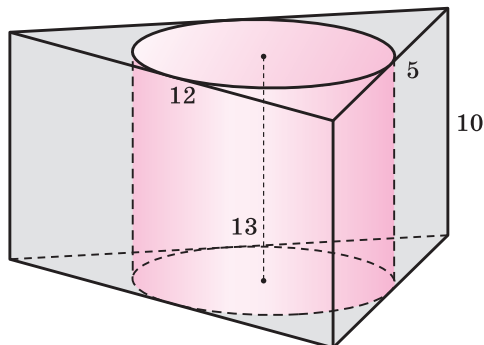
- а) плоскасць, вызначаная воссю цыліндра і ўтваральнікам, па якім другая плоскасць датыкаецца да цыліндра, перпендыкулярная датычнай плоскасці;
- б) плоскасць, што праходзіць праз утваральнік цыліндра і перпендыкулярная плоскасці, вызначанай гэтым утваральнікам і воссю цыліндра, з'яўляецца плоскасцю, датычнай да цыліндра?

103. Дакажыце, што калі плоскасць паралельная восі цыліндра і адлеглая ад яе на радыус цыліндра, то яна змяшчае ўтваральнік цыліндра, і прытым толькі адзін, г. зн. з'яўляецца датычнай да цыліндра плоскасцю.





Рыс. 61



Рыс. 62

104. Асновай прамой прызмы з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з вуглом 30° і катэтам супраць яго, роўным 8 см. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні цыліндра, умежанага ў гэтую прызму, улічыўшы, што яго восевым сячэннем з'яўляецца квадрат.



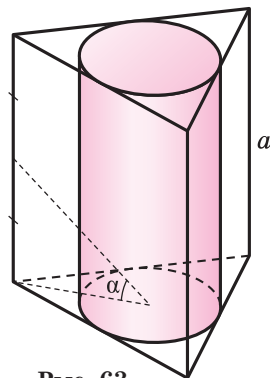
105. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра, умежанага ў прызму, па звестках, прыведзеных на рысунку:
а) 61; б) 62.



106. У цыліндр, радыус асновы і вышыня якога роўныя, умежана правільная шасцівугольная прызма. Знайдзіце вугал паміж дыяганаллю яе бакавой грані і воссю цыліндра.



107. Ёсць правільная трохвугольная прызма з бакавым кантам a . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні цыліндра, умежанага ў гэтую прызму, улічыўшы, што адрэзак, які злучае сярэдзіну бакавога канта з цэнтрам асновы, складае з асновай вугал α (рыс. 63).



Рыс. 63

108. Вызначце, ці можна ўмежыць цыліндр у прамую прызму, калі яе аснова ёсць:



- а) трохвугольнік; в) прамавугольнік;
б) ромб; г) трапецыя.

109. Вызначце, ці можна апісаць цыліндр каля прамой прызмы, калі яе аснова ёсць:



- а) трохвугольнік; в) прамавугольнік;
б) ромб; г) трапецыя.

110. Вызначце, каля якой прамой прызмы можна апісаць цыліндр, калі гэтая прызма:



- а) чатырохвугольная; б) шасцівугольная.

111. Вызначце, у якую прамую прызму можна ўмежыць цыліндр, калі гэтая прызма:



- а) чатырохвугольная; б) шасцівугольная.

112. Дакажыце, што:



а) калі прамая чатырохвугольная прызма ўмежана ў цыліндр, то сума супрацьлеглых двухгранных вуглоў пры бакавых кантах роўна 180° ;
б) калі чатырохвугольная прамая прызма апісана каля цыліндра, то сумы плошчаў супрацьлеглых бакавых граняў роўныя.

113. Улічыўшы, што V , r і h — адпаведна аб'ём, радыус і вышыня цыліндра, знайдзіце:

- а) V , калі $r = 3\sqrt{2}$ см, $h = 6$ см;
б) r , калі $V = 120$ см³, $h = 3,6$ см;
в) h , калі $r = h$, $V = 27\pi$ см³.

114. Знайдзіце аб'ём цыліндра, восевым сячэннем якога з'яўляецца квадрат з дыяганаллю 30 см.

115. Знайдзіце даўжыню алюмініевага проваду дыяметрам 4 мм, улічыўшы, што яго маса роўная 6,8 кг, а шчыльнасць алюмінію — 2,6 г/см³.

116. Вызначце, колькі тон нафты змяшчае цыліндрычная цыстэрна дыяметрам 18 м і вышыняй 7 м, улічыўшы, што шчыльнасць нафты роўная 0,85 г/см³.

117. Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём цыліндра, дыяметр асновы якога роўны 1 м, а вышыня роўная даўжыні акружнасці асновы.

118. Знайдзіце аб'ём цыліндра, у якога плошча асновы роўная Q , а плошча восевага сячэння — S .

119. Знайдзіце масу свінцовай трубы даўжынёй 25 м з таўшчынёй сценак 4 мм і ўнутраным дыяметрам 13 мм, улічыўшы, што шчыльнасць свінцу роўная 11,34 г/см³.

120. Вызначце, у колькі разоў трэба павялічыць:

- а) вышыню цыліндра без змянення яго асновы, каб аб'ём павялічыўся ў n разоў;
б) радыус асновы цыліндра без змянення яго вышыні, каб аб'ём павялічыўся ў n разоў.

121*. Дакажыце, што поўная паверхня цыліндра роўная бакавой паверхні другога цыліндра таго самага радыуса, вышыня якога роўная суме радыуса і вышыні дадзенага цыліндра.



122. У цыліндр умежана прызма, асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з катэтам a і прылеглым да яго вуглом α . Знайдзіце аб'ём цыліндра, улічыўшы, што вышыня прызмы роўная h .



123. Знайдзіце аб'ём цыліндра, улічыўшы, што дыяганаль умежанага ў яго прамавугольнага паралелепіпеда роўная m і складае з асновай вугал α .



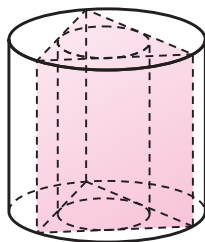
124. У цыліндр умежана правільная трохвугольная прызма, а ў прызму ўмежаны цыліндр (рыс. 64). Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндраў.

125. Знайдзіце аб'ём цыліндра, умежанага ў правільную шасцівугольную прызму, у якой кожны кант роўны a .

126. У цыліндр умежана правільная n -вугольная прызма. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў прызмы і цыліндра, улічыўшы, што:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n — натуральны лік.

127*. Цыліндр умежаны ў прамы паралелепіпед, асновай якога з'яўляецца ромб з меншай дыяганаллю m і большым вуглом α . Сячэнне, праведзенае праз меншую дыяганаль адной асновы і канец большай дыяганалі другой, складае з асновай вугал 45° . Знайдзіце аб'ём цыліндра.



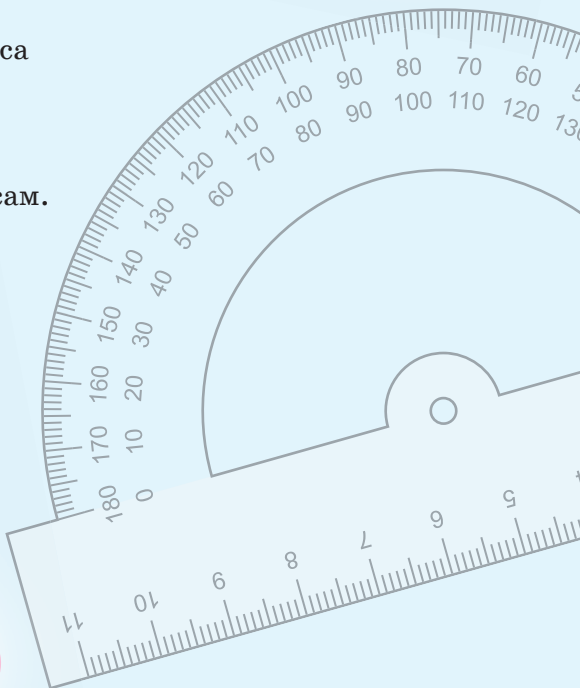
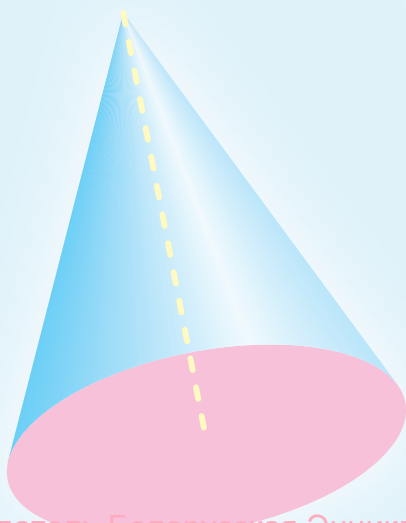
Рыс. 64

Раздзел 2

Піраміда і конус

У гэтым раздзеле вы:

- даведаецеся, якое цела называюць пірамідай і якое — конусам;
- даведаецеся, чым піраміда і конус падобныя і чым яны адрозніваюцца;
- пазнаёміцеся з асобнымі відамі пірамід і конусаў;
- пазнаёміцеся з канфігурацыямі — пірамідай, умежанай у конус, і конусам, умежаным у піраміду;
- пазнаёміцеся з датычнай прамой і датычнай плоскасцю конуса;
- навучыцеся знаходзіць плошчы паверхняў пірамід і конусаў і іх аб'ёмы;
- навучыцеся знаходзіць па вядомых характарыстыках піраміды ці конуса іх іншыя характарыстыкі;
- навучыцеся рашаць разнастайныя задачы, умовы якіх змяшчаюць канфігурацыі з пірамідай або конусам.



§ 3. Піраміда

А) Вы ўжо знаёмыя з пірамідай — мнагаграннікам, адна грань якога з'яўляецца многавугольнікам, а астатнія грані-трохвугольнікі маюць агульную вяршыню.

Трохвугольныя грані піраміды, якія маюць агульную вяршыню, называюць **бакавымі гранямі**, а гэтую агульную вяршыню — **вяршыняй** піраміды. Канты бакавых граняў, якія збягаюцца ў вяршыні піраміды, называюць **бакавымі кантамі** піраміды. Многавугольнік, якому не належыць вяршыня піраміды, называюць **асновай** піраміды (рыс. 65).

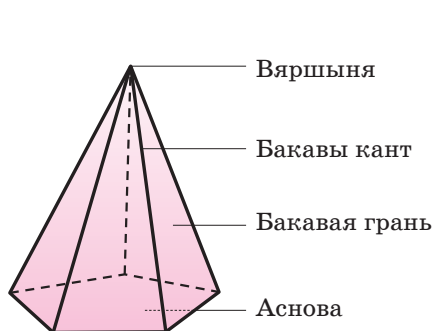
Піраміды раздзяляюць на *трохвугольныя*, *чатырохвугольныя*, *пяцівугольныя* і г. д. у залежнасці ад колькасці старон іх асноў. Піраміда, паказаная на рыс. 65, — *пяцівугольная*, а на рыс. 66 — *васьмівугольная*. Трохвугольную піраміду называюць яшчэ *тэтраэдрам*. У тэтраэдра ўсе грані з'яўляюцца трохвугольнікамі (рыс. 67).

Перпендыкуляр, праведзены з вяршыні піраміды да плоскасці яе асновы, называецца *вышыняй* піраміды. На рыс. 66 паказана вышыня SO піраміды $SABCDEFGH$. Аснова вышыні можа і не належаць аснове піраміды (рыс. 68).

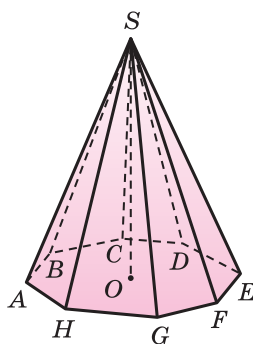
Плоскасць, што праходзіць праз два бакавыя канты піраміды, якія не належаць адной грані, называецца *дыяганальнай плоскасцю*, а сячэнне піраміды дыяганальнай плоскасцю — *дыяганальным сячэннем*. На рыс. 69 паказана дыяганальнае сячэнне шасцівугольнай піраміды.

Піраміда, асновай якой з'яўляецца правільны многавугольнік, а аснова вышыні супадае з цэнтрам гэтага многавугольніка, называецца **правільнай пірамідай** (рыс. 70).

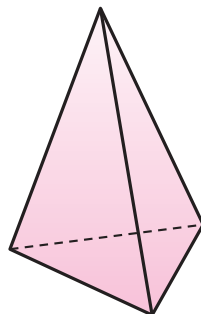
Вышыня бакавой грані правільнай піраміды, праведзеная з яе вяршыні, называецца **апафемай** піраміды.



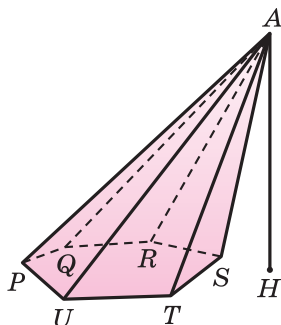
Рыс. 65



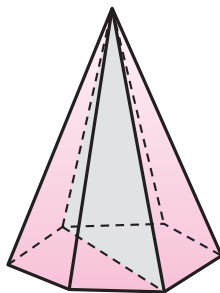
Рыс. 66



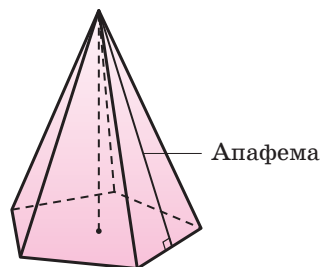
Рыс. 67



Рыс. 68



Рыс. 69



Рыс. 70

Адзначым, што ў *правільнай піраміды*:

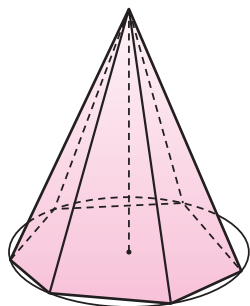
- бакавыя канты роўныя;
- бакавыя грані роўныя;
- апафемы роўныя;
- двухгранныя вуглы пры аснове роўныя;
- двухгранныя вуглы пры бакавых кантах роўныя;
- кожны пункт вышыні роўнаадлеглы ад вяршынь асновы;
- кожны пункт вышыні роўнаадлеглы ад кантаў асновы;
- кожны пункт вышыні роўнаадлеглы ад бакавых граняў.

Адзначым таксама, што калі ў *піраміды* роўныя ўсе:

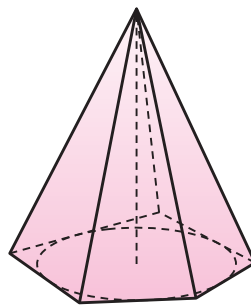
- бакавыя канты, то каля яе асновы можна апісаць акружнасць і цэнтр гэтай акружнасці супадае з асновай вышыні піраміды (рыс. 71);
- двухгранныя вуглы пры аснове, то ў гэтую аснову можна ўмежыць акружнасць і цэнтр гэтай акружнасці супадае з асновай вышыні піраміды (рыс. 72).

Бакавыя грані складаюць бакавую паверхню піраміды, а бакавыя грані разам з асновай — поўную паверхню піраміды.

Вы ведаеце, што бакавая паверхня *правільнай піраміды* роўная здабытку паўперыметра яе асновы і апафемы.



Рыс. 71



Рыс. 72

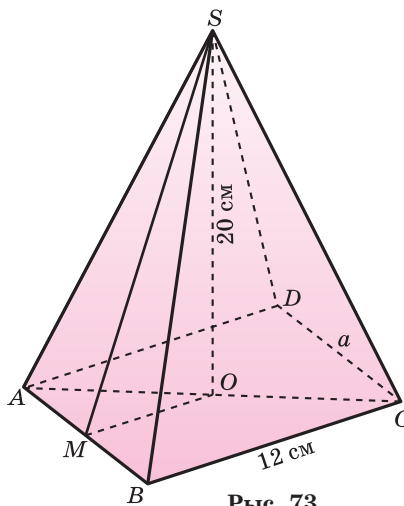


Рис. 73

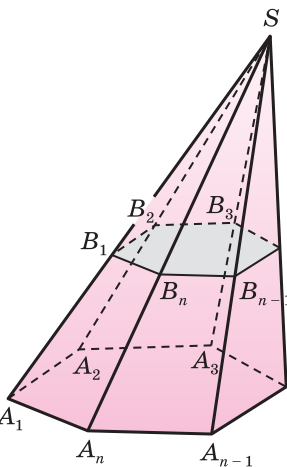


Рис. 74

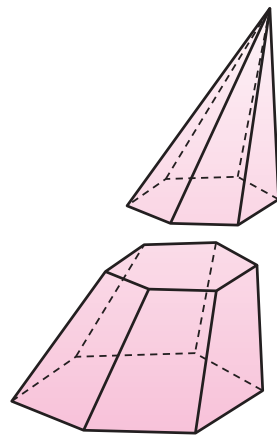


Рис. 75

Прыклад 1. Знойдзем плошчу поўнай паверхні правільнай чатырохвугольнай піраміды з кантамі асновы 12 см і вышыняй 20 см.

Р а ш э н н е. У аснове правільнай чатырохвугольнай піраміды ляжыць квадрат. Таму $S_{\text{асн}} = a^2 = 144 \text{ см}^2$.

Вышыня SO піраміды $SABCD$ праходзіць праз цэнтр O квадрата асновы, апофема — праз сярэдзіну M канта асновы (рыс. 73). У прамавугольным трохвугольніку SOM катэт OM роўны палавіне канта асновы — $OM = 6 \text{ см}$, другі катэт SO — вядомая вышыня. Па тэарэме Піфагора можна знайсці гіпатэнузу: $SM = \sqrt{6^2 + 20^2} = 2\sqrt{109} \text{ (см)}$.

Цяпер паслядоўна знаходзім:

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 6 \cdot 2\sqrt{109} = 12\sqrt{109} \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{\text{бак}} = 4 \cdot S_{SAB} = 48\sqrt{109} \text{ см}^2, \quad S_{\text{поўн}} = S_{\text{асн}} + S_{\text{бак}} = 144 + 48\sqrt{109} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: $144 + 48\sqrt{109} \text{ см}^2$.

Б)

Тэарэма 1. Калі піраміду перасекчы плоскасцю, паралельнай аснове, то:

- а) бакавыя канты і вышыня раздзяляюцца на прапарцыянальныя часткі;
- б) у сячэнні атрымаецца многавугольнік, падобны да асновы;
- в) плошчы сячэння і асновы адносяцца як квадраты іх адлегласцей ад вяршыні піраміды.

Выкарыстаўшы рыс. 74, дакажыце гэтую тэарэму самастойна.

Сечная плоскасць, паралельная аснове піраміды, раздзяляе яе на дзве часткі (рыс. 75). Адна з гэтых частак таксама з'яўляецца пірамідай, а другая — мнагаграннікам, які называецца **ўсечанай пірамідай**.

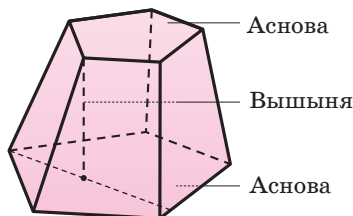


Рис. 76

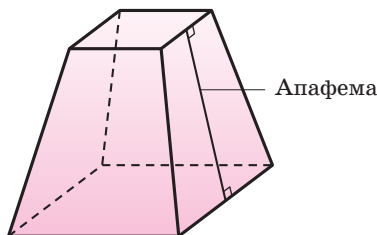


Рис. 77

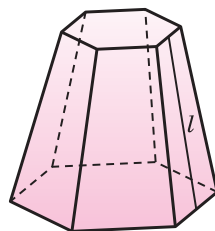


Рис. 78

Паралельныя грані ўсечанай піраміды называюцца яе **асновамі** (рис. 76). Асновы ўсечанай піраміды — падобныя многавугольнікі, стораны якіх папарна паралельныя, таму яе бакавыя грані — трапецыі.

Вышынёй усечанай піраміды называецца перпендыкуляр, праведзены з якога-небудзь пункта адной асновы піраміды да плоскасці другой асновы.

Усечаная піраміда называецца *правільнай*, калі яна ёсць частка правільнай піраміды. Вышыня бакавой грані правільнай усечанай піраміды называецца *апафемай* усечанай піраміды. На рысунку 77 паказаны чатырохвугольная правільная ўсечаная піраміда і адна з яе апафем.

Тэарэма 2. Бакавая паверхня правільнай усечанай піраміды роўная здабытку паўсумы перыметраў яе асноў і апафемы:

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2)l.$$

Доказ. Няхай ёсць правільная n -вугольная ўсечаная піраміда (рис. 78). Няхай P_1 і P_2 — адпаведна перыметры ніжняй і верхняй асноў і l — апафема піраміды.

Бакавая паверхня дадзенай піраміды складзена з n роўных адна адной трапецый. Няхай a і b — асновы адной з гэтых трапецый, тады яе плошча роўная $\frac{1}{2}(a+b)l$. Улічыўшы, што бакавая паверхня піраміды складаецца з n такіх трапецый, атрымаем, што:

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2}(a+b)ln = \frac{1}{2}(an+bn)l = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Прыклад 2. У правільнай трохвугольнай усечанай пірамідзе канты асноў роўныя $6\sqrt{3}$ і $2\sqrt{3}$, бакавы кант нахілены пад вуглом 60° да плоскасці асновы. Знайдзем поўную паверхню гэтай піраміды.

Р а ш э н н е. Знайдзем плошчы асноў:

$$S_1 = \frac{(6\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}, \quad S_2 = \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

Для вызначэння бакавой паверхні неабходна ведаць апафему ўсечанай піраміды.

Праз паралельныя медыяны AM і A_1M_1 асноў піраміды правядзём сячэнне (рис. 79). Яно змяшчае вышыню OO_1 піраміды, якая злучае цэнтры

асноў усечанай піраміды, і вышыню MM_1 бакавой грані (апафему). Кант AA_1 праектуецца на прамую AM . Таму ў трапецыі AA_1M_1M вугал A_1AM роўны 60° . Далей знаходзім:

$$AM = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9; \quad A_1M_1 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3; \quad AO = \frac{2}{3} \cdot AM = 6;$$

$$OM = AM - AO = 9 - 6 = 3; \quad A_1O_1 = \frac{2}{3} \cdot A_1M_1 = 2;$$

$$O_1M_1 = A_1M_1 - A_1O_1 = 3 - 2 = 1.$$

Няхай A_1K і M_1P — вышыні трапецыі AA_1M_1M . Тады:

$$AK = AO - OK = AO - O_1A_1 = 6 - 2 = 4,$$

$$MP = MO - OP = AO - O_1A_1 = 3 - 1 = 2.$$

З прамавугольнага трохвугольніка AKA_1 знаходзім

$$A_1K = AK \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} = OO_1 = M_1P.$$

З прамавугольнага трохвугольніка PMM_1 знаходзім:

$$MM_1 = \sqrt{PM^2 + PM_1^2} = \sqrt{4 + 48} = 2\sqrt{13}.$$

Цяпер:

$$S_{\text{бак}} = 3 \cdot \frac{6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39}, \quad S_{\text{поўн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бак}} = 30\sqrt{3} + 24\sqrt{39}.$$

$$\text{Адказ: } 30\sqrt{3} + 24\sqrt{39}.$$

В) Устаноўім формулу для вылічэння аб'ёму піраміды.

Целы, якія маюць роўныя аб'ёмы, называюцца *роўнавялікімі*.

Тэарэма 3. Трохвугольныя піраміды з роўнавялікімі асновамі і роўнымі вышынямі роўнавялікія.

Доказ. Няхай ёсць дзве трохвугольныя піраміды з роўнавялікімі асновамі і роўнымі вышынямі (рыс. 80). Раздзелім вышыні адной і другой пірамід на n доляў і праз пункты дзялення правядзём плоскасці, паралельныя асновам. Па тэарэме 1в, плошчы адпаведных сячэнняў пірамід роўныя. Кожная з пірамід раздзяляецца на n частак-пластоў. Для першай піраміды ў кожнай частцы пабудуем, як паказана на рысунку 80, прызму, якая змяшчаецца ў гэтай частцы, а для кожнай часткі другой піраміды — прызму, якая змяшчае гэтую частку.

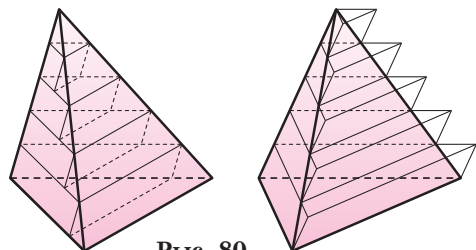


Рис. 80

Няхай V_1 і V_2 — аб'ёмы першай і другой пірамід, а Q_1 і Q_2 — супольныя аб'ёмы прызмаў, пабудаваных для гэтых пірамід. Пры лічэнні ад асноў пірамід прызма ў k -й частцы першай піраміды роўнавялікая прызме для $(k+1)$ -й часткі другой піраміды, бо ў гэтых прызмаў роўнавялікія асновы і роўныя вышыні. Таму аб'ём Q_2 большы за аб'ём Q_1 на аб'ём першай пабудаванай прызмы, у якой асновай з'яўляецца аснова другой піраміды, а вышыня роўная $\frac{h}{n}$, дзе h — вышыня піраміды (гл. рыс. 80), г. зн.

$Q_2 = Q_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, дзе S — плошча асновы піраміды. Цяпер улічым, што

$V_2 < Q_2$ і $V_1 > Q_1$. Будзем мець $V_2 < Q_1 + S \cdot \frac{h}{n} < V_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, і таму:

$$V_2 - V_1 < S \cdot \frac{h}{n} \quad (1).$$

Такія самыя разважанні можна правесці, калі першую і другую піраміды памяняць ролямі. У выніку атрымаем няроўнасць:

$$V_1 - V_2 < S \cdot \frac{h}{n} \quad (2).$$

Калі $V_1 \neq V_2$, то няроўнасці (1) і (2) не могуць праўдзіцца адначасова пры любым значэнні n .

Напрыклад, калі дапусціць, што $V_2 > V_1$ і $V_2 - V_1 = a > 0$, то пры $n > \frac{Sh}{a}$ няроўнасць (1) не будзе праўдзівай. А калі дапусціць, што $V_1 > V_2$ і $V_1 - V_2 = b > 0$,

то няроўнасць (2) не будзе праўдзівай пры $n > \frac{Sh}{b}$.

Атрымалі, што няроўнасці (1) і (2) праўдзяцца толькі пры $V_1 = V_2$.

Тэарэма 4. Аб'ём піраміды роўны трэцяй долі здабытку плошчы яе асновы і вышыні:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{асн}} \cdot H.$$

Доказ. Няхай ёсць трохвугольная піраміда $QABC$ (рыс. 81). Дабудуем яе да прызмы $ABCE$ з асновай ABC (рыс. 82). Плоскасцю QAB аддзелім ад прызмы дадзеную пірамідку, атрымаецца чатырохвугольная піраміда $QBDEA$. Дыяганальнае плоскасць QDA раздзяляе пірамідку $QBDEA$ на дзве піраміды $QDAB$ і $QDAE$ (рыс. 83), у якіх адна і тая вышыня, праведзеная з вяршыні Q , і роўныя асновы ABD і AED .

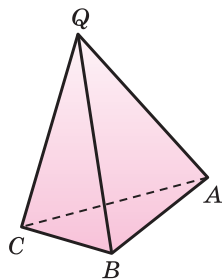


Рис. 81

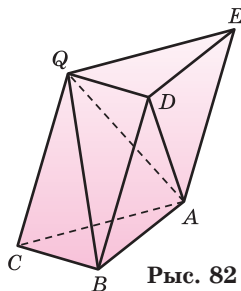


Рис. 82

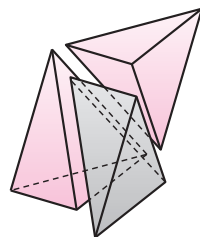


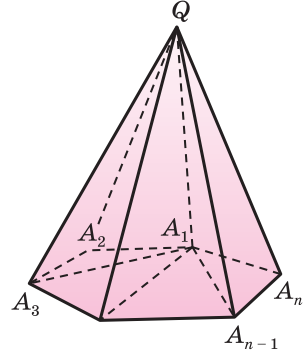
Рис. 83

Таму, у адпаведнасці з тэарэмай 3, піраміды $QDAB$ і $QDAE$ роўнавялікія. Параўнаем піраміду $QDAE$ з дадзенай пірамідай $QABC$. У іх роўныя асновы QDE і ABC і роўныя вышыні, праведзеныя з вяршынь A і Q , таму гэтыя піраміды таксама роўнавялікія. Атрымліваецца, што ўсе тры піраміды $QABC$, $QDAB$ і $QDAE$ роўнавялікія. Паколькі аб'ём прызмы $ABCEDQ$ роўны здабытку $S \cdot H$ плошчы S асновы ABC і вышыні прызмы H , якая роўная вышыні піраміды $QABC$, то аб'ём піраміды $QABC$, г. зн. трэцяй часткі прызмы $ABCEDQ$, роўны трэцяй

долі гэтага аб'ёму, г. зн. $\frac{1}{3} S \cdot H$.

Няхай цяпер ёсць адвольная піраміда $QA_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ (рыс. 84). Праз дыяганалі A_1A_3 , A_1A_4 , ..., A_1A_{n-1} асновы $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$, якія выходзяць з адной вяршыні A_1 , правядзём дыяганальныя сячэнні, яны раздзяляць дадзеную піраміду на трохвугольныя піраміды $QA_1A_2A_3$, $QA_1A_3A_4$, ..., $QA_1A_{n-1}A_n$. Паколькі ўсе яны маюць агульную вышыню H , то:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot H + \frac{1}{3} S_{A_1A_3A_4} \cdot H + \dots + \frac{1}{3} S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot H = \\ &= \frac{1}{3} H (S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \dots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = \frac{1}{3} H \cdot S = \frac{1}{3} S \cdot H. \end{aligned}$$



Рыс. 84

Прыклад 3. Плошча бакавой паверхні правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 60 см^2 , а яе апафема — 5 см . Знойдзем аб'ём піраміды.

Рашэнне. Няхай KM — апафема правільнай піраміды $KABCD$, KO — яе вышыня (рыс. 85). Тады M — сярэдзіна канта AB , O — цэнтр квадрата $ABCD$ і $KM = 5 \text{ см}$.

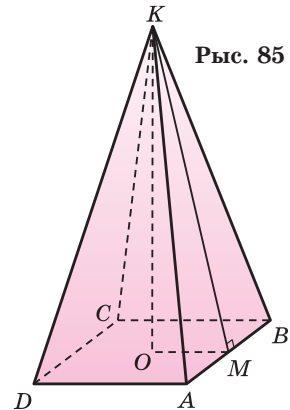
Паколькі $S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} n a l$, дзе n — колькасць старон асновы піраміды, a — даўжыня стараны піраміды, l — апафема піраміды, то $60 \cdot 2 = BC \cdot 4 \cdot 5$, адкуль $BC = 6 \text{ (см)}$, $S_{ABCD} = BC^2 = 36 \text{ см}^2$, $OM = \frac{1}{2} BC = 3 \text{ см}$.

З прамавугольнага трохвугольніка KOM знойдзем вышыню KO піраміды: $KO = \sqrt{KM^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см)}$.

Цяпер знойдзем аб'ём піраміды:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ (см}^3\text{)}.$$

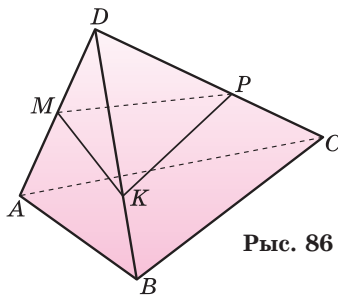
Адказ: 48 см^3 .



Рыс. 85



Прыклад 4*. На кантах DA , DB і DC піраміды $DABC$ выбраны пункты M , K і P адпаведна так, што $DM : MA = 1 : 1$, $DK : KB = 2 : 1$ і $DP : PC = 3 : 2$ (рыс. 86). Знойдзем адносіну, у якой плоскасць MKP раздзяляе аб'ём піраміды.



Рыс. 86

Дакажам, што
$$\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{DM \cdot DK \cdot DP}{DA \cdot DB \cdot DC}.$$

Няхай CC_1 і PP_1 — вышыні ў пірамідах $DABC$ і $DMKP$. З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў DCC_1 і DPP_1 вынікае, што $PP_1 : DP = CC_1 : DC$. Таму:

$$\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{DMK} \cdot PP_1}{\frac{1}{3} \cdot S_{DAB} \cdot CC_1} = \frac{S_{DMK}}{S_{DAB}} \cdot \frac{DP}{DC}.$$

Далей:

$$\frac{S_{DMK}}{S_{DAB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DM \cdot DK \cdot \sin \angle MDK}{\frac{1}{2} \cdot DA \cdot DB \cdot \sin \angle ADB} = \frac{DM \cdot DK}{DA \cdot DB}.$$

Патрэбная роўнасць абгрунтавана.

Заўважым, што даказанае сцверджанне праўдзіцца і тады, калі піраміды $DABC$ і $DMKP$ маюць агульную вяршыню D , а астатнія іх вяршыні размешчаны на трох прамых, што праходзяць праз вяршыню D .

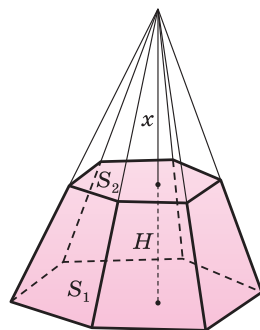
З умовы вынікае, што $DM : DA = 1 : 2$, $DK : DB = 2 : 3$ і $DP : DC = 3 : 5$.

Таму
$$\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Значыць, плоскасць MKP раздзяляе аб'ём піраміды ў адносіне $1 : 4$.



Г) Цяпер устанавім формулы для вылічэння аб'ёму ўсечанай піраміды. Няхай ва ўсечанай пірамідзе ніжняя і верхняя асновы маюць плошчы S_1 і S_2 , а вышыня роўная H (рыс. 87). Для вылічэння аб'ёму ўсечанай піраміды дабудуем яе да поўнай піраміды. Няхай вышыня дапаўняльнай піраміды роўная x . Шуканы аб'ём V можна знайсці як рознасць аб'ёмаў поўнай і дапаўняльнай пірамід:



Рыс. 87

$$V = \frac{1}{3} S_1 (H + x) - \frac{1}{3} S_2 x = \frac{1}{3} (S_1 H + S_1 x - S_2 x) = \frac{1}{3} (S_1 H + (S_1 - S_2) x).$$

Каб знайсці вышыню x , выкарыстаем устаноўленае ў тэарэме 1 сцверджанне пра тое, што плошчы сячэнняў піраміды адносяцца як квадраты

іх адлегласцей ад вяршыні $\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H+x)^2}$. Рэшым гэтае ўраўненне, улічыўшы, што S_1 і S_2 — дадатныя лікі:

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1} &= \frac{x^2}{(H+x)^2} \equiv \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x}{H+x} \equiv H\sqrt{S_2} + x\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1} \equiv \\ &\equiv H\sqrt{S_2} = x(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}) \equiv x = \frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.\end{aligned}$$

Значыць:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \left(S_1 H + \frac{(S_1 - S_2) H \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \frac{1}{3} H \left(S_1 + \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} H \left(S_1 + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{S_2} \right) = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).\end{aligned}$$

Такім чынам, аб'ём V усечанай піраміды роўны трэцяй долі здабытку вышыні H піраміды і сумы плошчаў S_1 і S_2 асноў піраміды і іх сярэдняга геаметрычнага $\sqrt{S_1 S_2}$:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$



1. Які мнагаграннік называецца пірамідай?
2. Якую піраміду называюць тэтраэдрам?
3. Якую грань піраміды называюць яе асновай і якія грані — бакавымі гранямі?
4. Якія канты піраміды называюць бакавымі кантамі і які пункт — вяршыняй піраміды?
5. Які адрэзак называюць вышынёй піраміды?
6. Якая плоскасць называецца дыяганальнай плоскасцю піраміды і які многавугольнік — дыяганальным сячэннем піраміды?
7. Якая піраміда называецца правільнай пірамідай?
8. Які адрэзак называецца апафемай піраміды?
9. Сфармулюйце ўласцівасці элементаў правільнай піраміды: бакавых кантаў; бакавых граняў; апафем; двухгранных вуглоў пры аснове; двухгранных вуглоў пры бакавых кантах; пунктаў вышыні.
10. Сфармулюйце ўласцівасць асновы піраміды, у якой роўныя ўсе: бакавыя канты; двухгранныя вуглы пры аснове.
11. Што разумеюць пад бакавой паверхняй піраміды; поўнай паверхняй піраміды?
12. Як звязаны паміж сабой бакавая паверхня правільнай піраміды, перыметр яе асновы і апафема?
13. Сфармулюйце ўласцівасці адрэзкаў бакавых кантаў і вышыні піраміды, на якія яны раздзяляюцца плоскасцю, паралельнай аснове.
14. Сфармулюйце ўласцівасці сячэння піраміды плоскасцю, паралельнай аснове.
15. Які мнагаграннік называецца ўсечанай пірамідай?

16. Якія грані ўсечанай піраміды называюць яе асновамі і які адрэзак — яе вышынёй?
17. Якая ўсечаная піраміда называецца правільнай і які адрэзак называецца апафемай правільнай усечанай піраміды?
18. Як звязаны паміж сабой бакавая паверхня правільнай усечанай піраміды, перыметры яе асноў і апафема?
19. Якія целы называюць роўнавялікімі?
20. Якую ўласцівасць маюць трохвугольныя піраміды з роўнавялікімі асновамі і роўнымі вышынямі?
21. Чаму роўны аб'ём піраміды?
22. Чаму роўны аб'ём усечанай піраміды?



Задача 1. У правільнай трохвугольнай пірамідзе вышыня роўная $6\sqrt{3}$, радыус акружнасці, апісанай каля асновы, — 12. Знайдзіце:

- а) апафему піраміды;
б) двухгранны вугал пры аснове піраміды.

Р а ш е н н е. а) Няхай SO — вышыня правільнай трохвугольнай піраміды $SABC$ (рыс. 88) і $SO = 6\sqrt{3}$.

OA — радыус апісанай акружнасці, $OA = 12$ (O — аснова вышыні SO і цэнтр трохвугольніка ABC), $OM \perp BC$, дзе M — сярэдзіна стараны BC , і $OM = \frac{1}{2} \cdot OA = 6$.

SM — апафема піраміды $SABC$, $SM \perp BC$ па тэарэме пра тры перпендыкуляры:

$$SM = \sqrt{OM^2 + OS^2} = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12.$$

б) $OM \perp BC$ і $SM \perp BC$, таму SMO — лінейны вугал двухграннага вугла пры аснове піраміды:

$$\sin \angle SMO = \frac{SO}{SM} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

таму $\angle SMO = 60^\circ$.

А д к а з: а) 12; б) 60° .

Задача 2. У аснове піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэну-зай 17 см і катэтам 15 см, а яе вышыня роўная $3\sqrt{3}$ см. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні піраміды, улічыўшы, што ўсе двухгранныя вуглы пры кантах асновы роўныя.

Р а ш е н н е. Няхай у пірамідзе $DABC$ $AB = 17$ см, $AC = 15$ см, $\angle ACB = 90^\circ$, $DO \perp (ABC)$ і $OK \perp AB$ (рыс. 89).

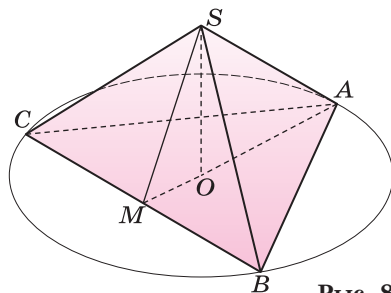


Рис. 88

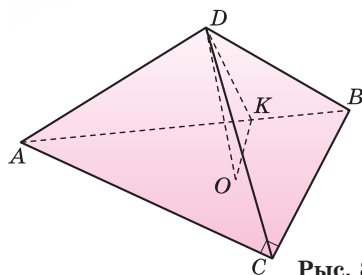


Рис. 89

O — цэнтр умежанай у трохвугольнік ABC акружнасці, OK — яе радыус (усе двухгранныя вуглы пры кантах асновы роўныя).

$$\triangle ABC: BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ (см)},$$

$$OK = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{15 + 8 - 17}{2} = 3 \text{ (см)},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\triangle DKO: \operatorname{tg} \angle DKO = \frac{DO}{OK} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}, \angle DKO = 60^\circ, \cos \angle DKO = \frac{1}{2}.$$

$$S_{\text{бак}} = \frac{S_{ABC}}{\cos \angle DKO} = \frac{60}{0,5} = 120 \text{ (см}^2\text{)}, S_{\text{поўн}} = S_{\text{бак}} + S_{\text{асн}} = 120 + 60 = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: 180 см^2 .

Задача 3. Плошча асновы піраміды роўная 243 см^2 , а плошча сячэння, паралельнага аснове, — 48 см^2 . Знайдзіце адлегласць паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы, улічыўшы, што вышыня піраміды роўная 18 см .

Рашэнне. Няхай $x \text{ см}$ — шуканая адлегласць. Тады, па тэарэме 1в,

$$\text{маем: } \frac{48}{243} = \left(\frac{18-x}{18} \right)^2, \text{ або } 1 - \frac{x}{18} = \frac{4}{9}, \text{ адкуль } x = 10.$$

Адказ: 10 см .



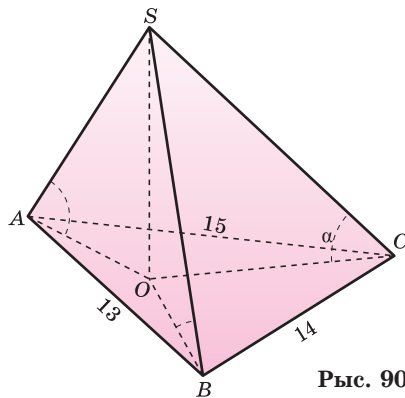
Задача 4. Знайдзем аб'ём трохвугольнай піраміды, канты асновы якой роўныя $13, 14, 15$, улічыўшы, што бакавыя канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы, роўныя α .

Рашэнне. Няхай SO — вышыня піраміды $SABC$. Адрэзкі OA, OB, OC — праекцыі нахіленых SA, SB, SC на плоскасць асновы, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$ (рыс. 90). Прамавугольныя трохвугольнікі SOA, SOB, SOC роўныя, бо маюць агульны катэт SO і па роўным вострым вугле. Таму катэты OA, OB, OC роўныя, пункт O — цэнтр апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці.

Для вылічэння радыуса апісанай акружнасці выкарыстаем формулу $R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$, дзе S_{Δ} — плошча трохвугольніка, а a, b, c — яго стораны. Плошчу трохвугольніка ABC знайдзем па формуле Герона:

$$S = \sqrt{\frac{13+14+15}{2} \cdot \frac{14-13+15}{2} \cdot \frac{13-14+15}{2} \cdot \frac{13+14-15}{2}} = 84.$$

Таму $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$. Знайдзем з прамавугольнага трохвугольніка SOA вышыню SO піраміды, а потым і яе аб'ём.



Рыс. 90

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{65}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha, V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{65}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 227,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Адказ: $227,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha$.



Задача 5*. У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць трапецыя, у якой $AD \parallel BC$ і $AD = 2BC$. На кантах SA , SB і SC выбраны пункты M , K і P адпаведна так, што $SM : MA = 1 : 1$, $SK : KB = 1 : 2$ і $SP : PC = 1 : 3$. Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць MKP раздзяляе аб'ём піраміды.

Рашэнне. Няхай аб'ём піраміды $SABCD$ роўны $3V$. Паколькі плошча трохвугольніка ABC складае трэцюю долю плошчы трапецыі $ABCD$, то аб'ём піраміды $SABC$ роўны V , а аб'ём піраміды $SACD$ роўны $2V$. Знайдзем аб'ём піраміды $SMKP$, выкарыстаўшы

$$\text{роўнасць } \frac{V_{SMKP}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SK \cdot SP}{SA \cdot SB \cdot SC}. \text{ Будзем мець: } V_{SMKP} = V \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24} V.$$

Няхай T — пункт перасячэння прамой SD з плоскасцю MKP (рыс. 91). Тады $\overrightarrow{ST} = x \cdot \overrightarrow{SD}$ і, акрамя таго, вектар $\overrightarrow{KT}$ кампланарны з вектарамі $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KP}$, г. зн. $\overrightarrow{KT} = m\overrightarrow{KM} + p\overrightarrow{KP}$ пры пэўных множніках m і p . Выразім вектары $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KS}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{ST}$ і $\overrightarrow{KT}$ праз вектары $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BS}$.

Паслядоўна атрымліваем:

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}), \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{KS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{ST} = x\overrightarrow{BA} + 2x\overrightarrow{BC} - x\overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{ST} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BS} + x\overrightarrow{BA} + 2x\overrightarrow{BC}.$$

$$\begin{aligned} \text{Разам з гэтым } \overrightarrow{KT} &= m\overrightarrow{KM} + p\overrightarrow{KP} = m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BS}\right) + p\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{BS}\right) = \\ &= \frac{m}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{p-2m}{12}\overrightarrow{BS} + \frac{p}{4}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

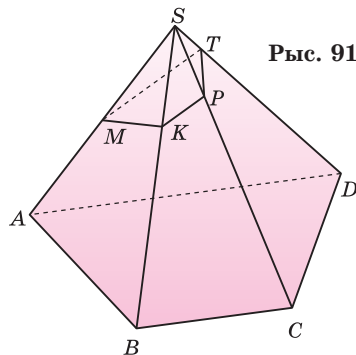


Рис. 91

Паколькі вектары $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ і $\overline{BS}$ некампланарныя, то вектар $\overline{KT}$ праз іх выражаецца адназначна. Таму адначасова праўдзяцца роўнасці $\frac{m}{2} = x$, $\frac{p-2m}{12} = \frac{1}{3} - x$, $\frac{p}{4} = 2x$. Адсюль $m = 2x$, $p = 8x$ і $x = \frac{1}{4}$.

Цяпер знойдзем аб'ём піраміды $SKPT$, выкарыстаўшы роўнасць:

$$\frac{V_{SKPT}}{V_{SACD}} = \frac{ST \cdot SK \cdot SP}{SA \cdot SD \cdot SC}; \quad V_{SKPT} = 2V \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{16} V.$$

Маем далей: $V_{SMKTP} = V_{SMKP} + V_{SKPT} = \frac{1}{24} V + \frac{1}{16} V = \frac{5}{48} V = \frac{5}{144} \cdot 3V$. Таму плошчасць MKP раздзяляе аб'ём піраміды ў адносіне 5 : 139.

Адказ: 5 : 139.



128. Устаноўце, колькі вяршынь, кантаў і граняў мае:
 - а) n -вугольная піраміда; б) усечаная n -вугольная піраміда.
129. У правільнай пірамідзе знайдзіце пункт, роўнаадлеглы ад усіх яе:
 - а) вяршынь; б) кантаў; в) граняў.
130. Ёсць правільная піраміда. Ці можна сцвярджаць, што яна мае плоскасць сіметры?
131. Дакажыце, што ў правільнай піраміды:
 - а) бакавыя канты роўныя;
 - б) бакавыя грані роўныя;
 - в) апафемы роўныя;
 - г) двухгранныя вуглы пры аснове роўныя;
 - д) двухгранныя вуглы пры бакавых кантах роўныя;
 - е) кожны пункт вышыні роўнаадлеглы ад вяршынь асновы;
 - ж) кожны пункт вышыні роўнаадлеглы ад кантаў асновы;
 - з) кожны пункт вышыні роўнаадлеглы ад бакавых граняў.
132. Бакавыя канты піраміды роўныя адзін аднаму. Вызначце, ці можа аснова піраміды быць:
 - а) ромбам; в) трапецыяй;
 - б) прамавугольнікам; г) правільным шасцівугольнікам.
133. Дакажыце, што калі ў піраміды роўныя ўсе:
 - а) бакавыя канты, то каля яе асновы можна апісаць акружнасць і цэнтр гэтай акружнасці супадае з асновай вышыні піраміды;
 - б) двухгранныя вуглы пры аснове, то ў гэтую аснову можна ўмежыць акружнасць і цэнтр гэтай акружнасці супадае з асновай вышыні піраміды.
134. Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная 12 см, а яе вышыня — $4\sqrt{3}$ см. Знайдзіце:

- а) бакавы кант піраміды;
б) вугал паміж бакавым кантам і плоскасцю асновы піраміды.
135. Знайдзіце плошчу дыяганальнага сячэння правільнай чатырохвугольнай піраміды, у якой:
а) бакавы кант роўны b і складае з плоскасцю асновы вугал α ;
б) старана асновы роўная a , а двухгранны вугал пры аснове — α .
136. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды роўная a , а бакавы кант — $2a$. Знайдзіце:
а) вугал паміж бакавым кантам і асновай;
б) плошчу кожнага дыяганальнага сячэння.
137. Ёсць піраміда, у якой бакавыя грані ўтвараюць з плоскасцю асновы роўныя вуглы. Ці праўда, што:
а) вышыня піраміды праходзіць праз цэнтр акружнасці, умежанай у аснову;
б) вышыні ўсіх бакавых граняў, праведзеныя з вяршыні піраміды, роўныя;
в) бакавая паверхня роўная здабытку паўперыметра асновы і вышыні бакавой грані, праведзенай з вяршыні піраміды?
138. Асновай піраміды з'яўляецца ромб, старана якога роўная 13 см, а адна з дыяганалей — 10 см. Знайдзіце бакавыя канты піраміды, улічыўшы, што яе вышыня праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і роўная 35 см.
139. Асновай піраміды з'яўляецца паралелаграм са старанамі асновы 6 см і 14 см і адной з дыяганалей 12 см, а яе вышыня праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і роўная 8 см. Знайдзіце бакавыя канты піраміды.
140. Асновай піраміды з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай, роўнай 20 см. Бакавыя канты піраміды роўныя адзін аднаму, а яе вышыня роўная 24 см. Знайдзіце бакавы кант піраміды.
141. Асновай піраміды з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік з вуглом 120° , а бакавыя канты ўтвараюць з вышынёй піраміды, роўнай 16 см, вуглы 45° . Знайдзіце плошчу асновы піраміды.
142. Трапецыя з асновамі 6 см і $4\sqrt{6}$ см і вышынёй 5 см з'яўляецца асновай піраміды, кожны бакавы кант якой роўны 13 см. Знайдзіце вышыню піраміды.
143. Дакажыце, што бакавая паверхня правільнай піраміды роўная здабытку паўперыметра яе асновы і апафемы.
144. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды мае даўжыню 12 см і ўтварае вугал 60° з плоскасцю асновы. Знайдзіце паверхню піраміды.
145. Улічыўшы, што вышыня трохвугольнай піраміды роўная 40 см, вышыня кожнай бакавой грані, праведзеная з вяршыні піраміды, —

41 см, а перыметр асновы — 42 см, дакажыце, што вышыня піраміды праходзіць праз цэнтр акружнасці, умежанай у яе аснову, і знайдзіце плошчу гэтай асновы.

- 146.** Знайдзіце вышыню піраміды, стораны асновы якой роўныя 13, 14 і 15, улічыўшы, што:



- а) усе бакавыя канты складаюць з асновай вуглы, роўныя α ;
- б) усе бакавыя грані складаюць з асновай двухгранныя вуглы, роўныя β .

- 147.** Прамавугольны трохвугольнік ABC , гіпатэнуза AB і катэт AC якога адпаведна роўныя 29 см і 21 см, з'яўляецца асновай піраміды $DABC$. Яе кант DA перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 20 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

- 148.** У аснове піраміды ляжыць паралелаграм са старанамі 60 см і 108 см і плошчай 3240 см^2 , пункт перасячэння дыяганалей якога з'яўляецца асновай вышыні піраміды. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, улічыўшы, што яе вышыня роўная 36 см.

- 149.** Ёсць піраміда з квадратнай асновай. Адзін з бакавых кантаў піраміды перпендыкулярны плоскасці асновы, а адзін з двухгранных вуглоў пры аснове роўны 45° . Улічыўшы, што найбольшы бакавы кант роўны 12 см, знайдзіце:

- а) вышыню піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды.

- 150.** Прамавугольнік з дыяганаллю 24 см з'яўляецца асновай піраміды, плоскасці дзвюх бакавых граняў якой перпендыкулярныя плоскасці асновы, а плоскасці дзвюх іншых бакавых граняў утвараюць з асновай вуглы 30° і 45° . Знайдзіце паверхню піраміды.

- 151.** Асновай піраміды з'яўляецца трохвугольнік са старанамі 24 см, 20 см і 20 см, а кожная бакавая грань нахілена да асновы пад вуглом 45° . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды.

- 152.** Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная a , а яе вышыня — H . Знайдзіце:



- а) бакавы кант піраміды;
- б) плоскі вугал пры вяршыні піраміды;
- в) вугал паміж бакавым кантам і плоскасцю асновы піраміды;
- г) вугал паміж бакавой гранню і асновай піраміды;
- д) двухгранны вугал пры бакавым канце піраміды.

- 153.** Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная l , а плоскі вугал пры вяршыні — α . Знайдзіце:



- а) вышыню піраміды;
- б) бакавы кант;
- в) вугал паміж бакавой гранню і плоскасцю асновы;
- г) двухгранны вугал пры бакавым канце піраміды.

154*. Знайдзіце бакавую паверхню правільнай шасцівугольнай піраміды, улічыўшы, што старана яе асновы роўная a , а плошча бакавой грані роўная плошчы сячэння, праведзенага праз вяршыню піраміды і большую дыяганаль асновы.



155*. Двухгранныя вуглы пры аснове піраміды ўсе роўныя φ . Дакажыце,



што $S_{\text{бак}} = \frac{Q}{\cos \varphi}$, $S_{\text{поўн}} = \frac{2Q \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}$, дзе $S_{\text{бак}}$ і $S_{\text{поўн}}$ — бакавая і поўная паверхні піраміды, Q — плошча яе асновы.

156. Дакажыце, што калі піраміду перасекчы плоскасцю, паралельнай яе аснове, то:



- а) бакавыя канты і вышыня раздзяляюцца на прапарцыянальныя часткі;
- б) у сячэнні атрымаецца многавугольнік, падобны да асновы;
- в) плошчы сячэння і асновы адносяцца як квадраты іх адлегласцей ад вяршыні піраміды.

157. Дакажыце, што ў правільнай усечанай піраміды:



- а) бакавыя канты роўныя;
- б) бакавыя грані роўныя;
- в) апафемы роўныя;
- г) двухгранныя вуглы пры аснове роўныя;
- д) двухгранныя вуглы пры бакавых кантах роўныя;
- е) сума двухгранных вуглоў пры паралельных кантах адной бакавой грані роўная 180° .

158. Сячэнне піраміды, паралельнае яе аснове, дзеліць вышыню ў адносіне $2:3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што яна на 105 см^2 меншая за плошчу асновы.

159. Знайдзіце апафему і вышыню правільнай усечанай трохвугольнай піраміды, у якой стораны асноў роўныя 15 см і 5 см , а бакавы кант — 13 см .

160. Вышыня правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды роўная 63 см , апафема — 65 см , а стораны асноў адносяцца як $7:3$. Знайдзіце гэтыя стораны.

161. Плоскасць, паралельная аснове правільнай чатырохвугольнай піраміды, дзеліць вышыню піраміды ў адносіне $1:2$, калі лічыць ад вяршыні. Апафема атрыманай усечанай піраміды роўная 4 дм , а плошча яе поўнай паверхні — 186 дм^2 . Знайдзіце вышыню ўсечанай піраміды.

162. Асновамі ўсечанай піраміды з'яўляюцца правільныя трохвугольнікі са старанамі 5 см і 3 см , а адзін з яе бакавых кантаў перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 1 см . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

- 163.** Стораны асноў правільнай трохвугольнай усечанай піраміды роўныя 5 м і 8 м, а вышыня — 3 м. Плоскасць праходзіць праз старану ніжняй асновы і супрацьлеглую вяршыню верхняй асновы. Знайдзіце плошчу сячэння і двухгранны вугал паміж плоскасцю сячэння і плоскасцю асновы.
- 164.** Знайдзіце плошчу дыяганальнага сячэння правільнай усечанай чатырохвугольнай піраміды, у якой стораны асноў роўныя a і b , а бакавы кант складае з плоскасцю асновы вугал α .
- 165.** Знайдзіце аб'ём піраміды з вышынёй h , улічыўшы, што:
- $h = 20$ см, а асновай з'яўляецца квадрат са стараной 30 см;
 - $h = 22$ м, а асновай з'яўляецца трохвугольнік ABC , у якім $AB = 2$ м, $BC = 1,35$ м, $\angle ABC = 30^\circ$.
- 166.** Знайдзіце паверхню і аб'ём правільнай чатырохвугольнай піраміды, старана асновы якой роўная 8 см, а вышыня — 20 см.
- 167.** Знайдзіце бакавую паверхню і аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, старана асновы якой роўная 6 см, а вышыня — 12 см.
- 168.** Усе бакавыя грані піраміды $SABC$ нахілены да асновы пад вуглом 45° . Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle ACB = 60^\circ$.
- 169*.** Квадрат з'яўляецца асновай піраміды, дзве яе грані перпендыкулярныя аснове, двухгранны вугал паміж супрацьлеглымі бакавымі гранямі роўны α , а вышыня піраміды — h . Знайдзіце аб'ём, бакавую і поўную паверхню піраміды.
- 170.** Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, у якой:
- вышыня роўная 15 см, а старана асновы — 12 см;
 - бакавы кант роўны b і складае з плоскасцю асновы вугал α ;
 - бакавы кант роўны b і складае з прылеглай стараной асновы вугал α ;
 - бакавы кант роўны l і складае з плоскасцю асновы вугал φ ;
 - радыус акружнасці, апісанай каля бакавой грані, роўны R , а плоскі вугал пры вяршыні — α ;
 - бакавы кант роўны l , а плоскі вугал пры вяршыні — β ;
 - плоскі вугал пры вяршыні роўны φ , а старана асновы — a .
- 171.** Асновай піраміды з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік, у якога бакавыя стораны роўныя 25 см, а трэцяя старана — 48 см. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што кожны яе бакавы кант роўны 105 см.
- 172.** Знайдзіце аб'ём і бакавую паверхню правільнай шасцівугольнай піраміды, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 37 см, а дыяметр круга, умежанага ў аснову, — $12\sqrt{3}$ см.

173. Знайдзіце аб'ём піраміды, асновай якой з'яўляецца:
- а) раўнабедраны трохвугольнік ABC з бакавымі старанамі AB і BC , роўнымі 26 см, і асновай AC , роўнай 20 см, а кожны бакавы кант піраміды ўтварае з яе вышынёй вугал 30° ;
 - б) прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b , а кожны яе бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом φ ;
 - в) ромб са стараной 15 см, кожны з двухгранных вуглоў пры аснове роўны 45° , а вышыня піраміды роўная 6 см.
174. Знайдзіце аб'ём трохвугольнай піраміды $QABC$, улічыўшы, што:
- а) $AB = 12$, $BC = CA = 10$ см і двухгранныя вуглы пры аснове роўныя 45° ;
 - б) $\angle CAB = 90^\circ$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ і кожны бакавы кант складае з плоскасцю асновы вугал α ;
 - в) бакавыя канты папарна перпендыкулярныя і маюць даўжыні a , b і c .
175. Асновай піраміды $IJKL$ з'яўляецца трохвугольнік, у якім $JK = 20$ см, $JL = 29$ см, $KL = 21$ см. Грані IJK і IJL перпендыкулярныя плоскасці асновы, а грань IKL складае з ёй вугал 60° . Знайдзіце аб'ём піраміды.
176. Адзін кант тэтраэдра роўны 12 см, а астатнія канты — 9 см кожны. Знайдзіце аб'ём тэтраэдра.
177. Адна са старон асновы трохвугольнай піраміды роўная 16 см, супрацьлеглы ёй бакавы кант — 18 см, кожны з чатырох астатніх кантаў — 17 см. Знайдзіце аб'ём піраміды.
178. Вызначце, як зменіцца плошча бакавой, роўнай паверхні і аб'ём піраміды, калі, пакінуўшы вуглы ранейшымі, усе яе канты:
- а) павялічыць у 2 разы; б) паменшыць у 5 разоў.
179. Асновай піраміды з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 24 дм і 10 дм, а кожны бакавы кант роўны 85 дм. Піраміда перасечана плоскасцю, якая паралельна плоскасці асновы і раздзяляе бакавы кант папалам. Знайдзіце аб'ём атрыманых частак піраміды.
180. Крышталёвы кварцу складаецца з правільнай шасцівугольнай прызмы з бакавым кантам 6,2 см і стараной асновы 1,7 см і дзвюх правільных шасцівугольных пірамід з бакавым кантам 2,5 см. Знайдзіце масу крышталю, улічыўшы, што шчыльнасць кварцу роўная $2,7 \text{ г/см}^3$.
181. Знайдзіце аб'ём правільнай чатырохвугольнай піраміды, у якой:
- а) вышыня роўная h , а двухгранны вугал пры аснове — α ;
 - б) старана асновы роўная a , а плоскі вугал пры вяршыні — α ;
 - в)* старана асновы роўная a , а двухгранны вугал пры бакавым канце — α ;
 - г)* радыус акружнасці, умежанай у бакавую грань, роўны r , а востры вугал пры адной з вяршынь асновы — α ;

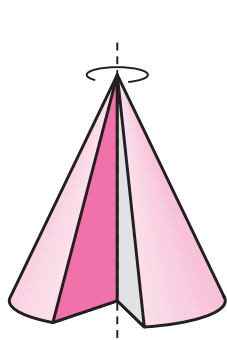
-  д)* вышыня роўная H , а двухгранны вугал пры аснове — β ;
-  е)* старана асновы роўная m , а плоскі вугал пры вяршыні — α ;
-  ж)* бакавы кант роўны l і складае з плоскасцю асновы вугал φ .
182. Аснова чатырохвугольнай піраміды — прамавугольнік з дыяганаллю b і вуглом α паміж дыяганалямі. Бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад адным і тым вуглом. Знайдзіце гэты вугал, улічыўшы, што аб'ём піраміды роўны V .
183. Асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$. На кантах SA , SB і SC пункты M , K і P выбраны так, што $SM : MA = 2 : 3$, $SK : KB = 1 : 2$ і $SP : PC = 3 : 4$. Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць MKP дзеліць аб'ём піраміды.
184. Піраміда $PEFGH$ мае сваёй асновай ромб $EFGH$. На яе кантах PE , PF і PG пункты X , Y і Z выбраны так, што $PX : XE = 3 : 2$, $PY : YF = 1 : 1$ і $PZ : ZG = 4 : 3$. Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць XYZ раздзяляе аб'ём піраміды.
185. У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць трапецыя, у якой $AD \parallel BC$ і $AD = 3BC$. На кантах SA , SB і SC пункты E , F і G выбраны так, што $SE : EA = 1 : 2$, $SF : FB = 1 : 1$ і $SG : GC = 3 : 2$. Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць EFG дзеліць аб'ём піраміды.
186. Чатырохвугольнік $ABCD$ з'яўляецца асновай піраміды $SABCD$. Яго дыяганалі перасякаюцца ў такім пункце O , што $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 1 : 5$. Пункты M , K і P на кантах SA , SB і SC выбраны так, што $SM : MA = 1 : 2$, $SK : KB = 1 : 1$ і $SP : PC = 2 : 3$. Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць MKP дзеліць аб'ём піраміды.
187.  Вышыня правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды роўная 7 см, а стораны асноў — 10 см і 2 см. Знайдзіце бакавы кант піраміды, яе дыяганаль і аб'ём.
188.  Стораны асноў правільнай усечанай чатырохвугольнай піраміды роўныя 4 см і 10 см, а плошча сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз два бакавыя канты, што не належаць адной грані, роўная 42 см^2 . Знайдзіце аб'ём піраміды.
- 189*.  Знайдзіце аб'ём частак піраміды, на якія яна рассечана плоскасцю, паралельнай аснове, улічыўшы, што:
- а) гэтая аснова і атрыманае сячэнне з'яўляюцца раўнабедранымі прамавугольнымі трохвугольнікамі з гіпатэнузамі m і n , дзве бакавыя грані, якія змяшчаюць катэты, перпендыкулярныя аснове, а трэцяя складае з ёй вугал φ ;
- б) піраміда правільная чатырохвугольная, стораны асновы і атрыманага сячэння роўныя a і $\frac{a}{2}$, а апафема — a .

§ 4. Конус

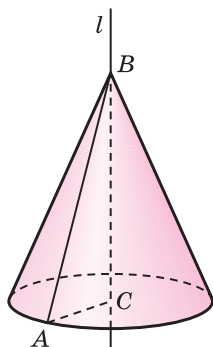
А) Конусам называецца цела, атрыманае вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка вакол восі, якая праходзіць праз адзін з яго катэтаў (рыс. 92). На рыс. 93 паказана ўтварэнне конуса пры вярчэнні прамавугольнага трохвугольніка ABC вакол прамой l , якой належыць катэт BC . Пры гэтым ломаная BAC апісвае паверхню конуса, гіпатэнузу AB — бакавую паверхню, а катэт AC — аснову конуса (рыс. 94). Саму гіпатэнузу AB называюць утваральнікам конуса, нерухомы пункт B — вяршыняй конуса, прамую, якая праходзіць праз нерухомы катэт BC , — воссю конуса, а перпендыкуляр, апушчаны з вяршыні конуса на аснову, — вышынёй конуса (рыс. 95). Аснова вышыні конуса супадае з цэнтрам асновы конуса.

Паверхню конуса можна разгарнуць на плоскасць, у выніку атрымаецца сектар, які выяўляе бакавую паверхню конуса, і круг, які выяўляе яе аснову. На рыс. 96 паказаны конус і яго разгортка.

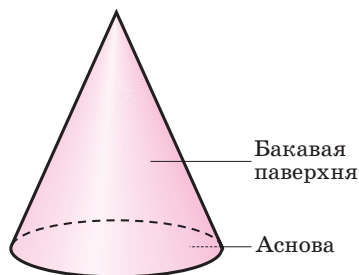
Разгортка бакавой паверхні конуса вызначаецца радыусам сектара і цэнтральным вуглом φ . Радыусам сектара з'яўляецца ўтваральнік l конуса. Знайдзем вугал φ . З аднаго боку даўжыня дугі сектара роўная даўжыні акружнасці асновы конуса, г. зн. $2\pi r$, дзе r — радыус асновы, з другога — $\frac{2\pi l}{360} \cdot \varphi$, таму $2\pi r = \frac{2\pi l}{360} \cdot \varphi$, адкуль $\varphi = \frac{360r}{l}$.



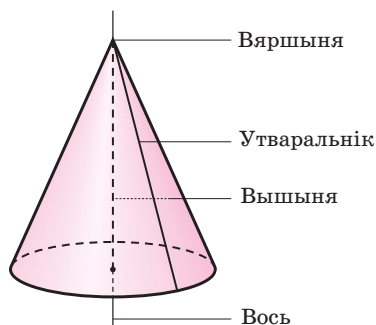
Рыс. 92



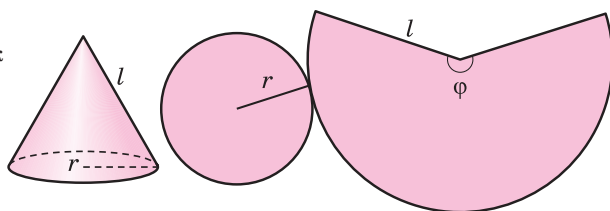
Рыс. 93



Рыс. 94



Рыс. 95



Рыс. 96

Тэарэма 5. Бакавая паверхня конуса роўная здабытку паўакружнасці яго асновы і ўтваральніка:

$$S_{\text{бак}} = \pi r l.$$

Доказ. Выкарыстаем формулу для вылічэння плошчы $S_{\text{сект}}$ сектара з цэнтральным вуглом з градуснай мерай φ і радыусам l :

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \varphi.$$

Улічыўшы, што $\varphi = \frac{360r}{l}$, атрымаем: $S_{\text{сект}} = \pi r l$.

Вынік. Плошча поўнай паверхні конуса роўная здабытку паўакружнасці яго асновы і сумы радыуса асновы і ўтваральніка:

$$S_{\text{поўн}} = \pi r \cdot (r + l).$$

Прыклад 1. Конус атрыманы вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка вакол большага катэта. Знойдзем бакавую і поўную паверхні конуса, улічыўшы, што катэты маюць даўжыні 8 см і 15 см.

Р а ш е н н е. Знойдзем спачатку па тэарэме Піфагора даўжыню гіпатэнузы:

$$l = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Цяпер, улічыўшы, што ўтваральнік конуса l роўны 17 см, а радыус яго асновы r — 8 см, знойдзем бакавую і поўную паверхні конуса:

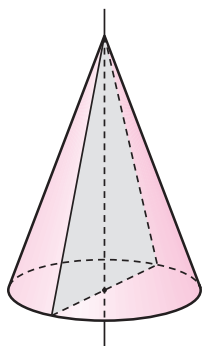
$$S_{\text{бак}} = \pi r l = 136\pi \text{ см}^2; \quad S_{\text{асн}} = \pi r^2 = 64\pi \text{ см}^2;$$

$$S_{\text{поўн}} = S_{\text{асн}} + S_{\text{бак}} = 200\pi \text{ см}^2.$$

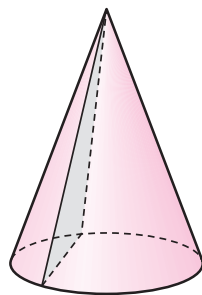
А д к а з: $200\pi \text{ см}^2$.

В) Важнай прасторавай канфігурацыяй, якая часта сустракаецца ў задачах, з'яўляецца спалучэнне конуса з плоскасцю.

Калі конус перасекчы плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню, то атрымаецца раўнабедраны трохвугольнік, у якога бакавыя стораны з'яўляюцца ўтваральнікамі конуса (рыс. 97). Восевае сячэнне конуса, г. зн. сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз вось конуса, з'яўляецца раўнабедраным трохвугольнікам, у якога аснова роўная дыяметру асновы конуса (рыс. 98).



Рыс. 98



Рыс. 97

Прыклад 2. Перыметр восевага сячэння конуса роўны 16. Знойдзем поўную паверхню конуса, улічыўшы, што разгортка бакавой паверхні конуса — сектар з вуглом 120° .

Р а ш э н н е. Няхай r — радыус асновы конуса, l — яго ўтваральнік. Даўжыня акружнасці асновы $C = 2\pi r$ супадае з даўжынёй дугі разгорткі $\frac{2\pi l \cdot 120^\circ}{360^\circ}$, таму $2\pi r = \frac{2\pi l \cdot 120^\circ}{360^\circ}$, або $l = 3r$.

Паколькі перыметр сячэння асновы роўны 16, то $2l + 2r = 16$, або $l + r = 8$, або $4r = 8$, і таму $r = 2$, а $l = 6$.

Цяпер знаходзім: $S_{\text{асн}} = \pi r^2 = 4\pi$, $S_{\text{бак}} = \pi r l = 12\pi$, $S_{\text{поўн}} = S_{\text{асн}} + S_{\text{бак}} = 16\pi$.

А д к а з: 16π .

Перасячэнне конуса плоскасцю, паралельнай аснове, ёсць круг (рыс. 99).

Тэарэма 6. Калі конус перасекчы плоскасцю, паралельнай яго аснове, то:

- а) утваральнік і вышыня раздзяляюцца на прапарцыянальныя часткі;
- б) плошчы сячэння і асновы адносяцца як квадраты іх адлегласцей ад вяршыні.

Выкарыстаўшы рыс. 100, дакажыце гэтую тэарэму самастойна.

Прыклад 3. Радыус асновы конуса роўны 8 см. Плоскасць, паралельная яго аснове, раздзяляе вышыню ў адносіне 3 : 5, калі лічыць ад вяршыні. Знойдзем плошчу сячэння.

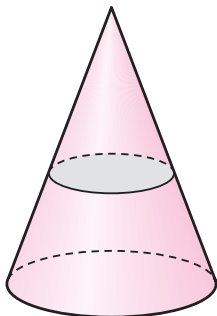
Р а ш э н н е. Па тэарэме 6б, маем:

$$\frac{S_{\text{сяч}}}{S_{\text{асн}}} = \left(\frac{3}{3+5} \right)^2 = \frac{9}{64}.$$

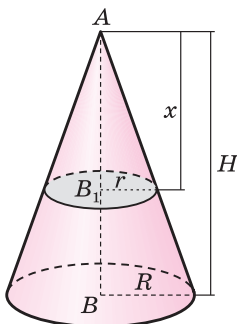
$$\text{Таму } S_{\text{сяч}} = \pi r^2 \cdot \frac{9}{64} = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{9}{64} = 9\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

А д к а з: $9\pi \text{ см}^2$.

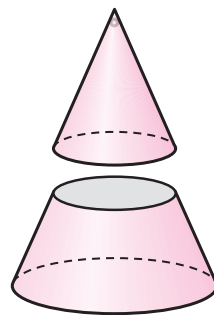
Сечная плоскасць, паралельная аснове конуса, раздзяляе яго на дзве часткі (рыс. 101). Адна з гэтых частак таксама з'яўляецца конусам, а другая — цэлам, якое называецца **ўсечаным конусам**.



Рыс. 99



Рыс. 100



Рыс. 101

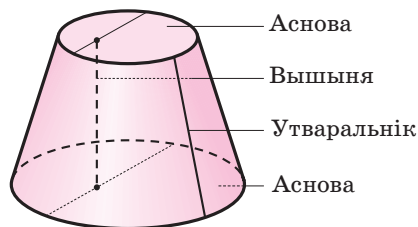


Рис. 102

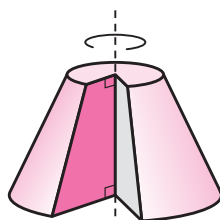


Рис. 103

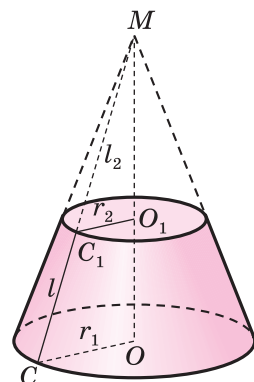


Рис. 104

Аснова дадзенага конуса і круг, атрыманы ў сячэнні, называюць **асновамі** ўсечанага конуса, а адрэзак утваральніка дадзенага конуса, заключаны паміж яго асновай і сечнай плоскасцю, — **утваральнікам** усечанага конуса (рис. 102). **Вышынёй** усечанага конуса называецца перпендыкуляр, праведзены з якога-небудзь пункта адной яго асновы да плоскасці другой асновы.

Усечаны конус можна атрымаць вярчэннем прамавугольнай трапецыі вакол бакавой стараны, да якой прылягаюць прамыя вуглы (рис. 103).

Знойдзем бакавую паверхню ўсечанага конуса. Няхай ёсць усечаны конус, у якога радыусы асноў CO і C_1O_1 роўныя r_1 і r_2 адпаведна, а ўтваральнік CC_1 роўны l (рис. 104).

Дабудуем яго да поўнага конуса. Дабудаваная частка ўяўляе сабой конус, у якога радыус асновы роўны r_2 . Няхай утваральнік C_1M дабудаванага конуса роўны l_2 .

Бакавую паверхню $S_{\text{бак}}$ усечанага конуса можна атрымаць як рознасць бакавых паверхняў S_1 і S_2 поўнага і дабудаванага конусаў. Няхай C_1 і C_2 — даўжыні акружнасцей ніжняй і верхняй асноў усечанага конуса. Тады:

$$S_{\text{бак}} = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}C_1(l + l_2) - \frac{1}{2}C_2l_2 = \frac{1}{2}(2\pi r_1l + 2\pi r_1l_2 - 2\pi r_2l_2) = \pi(r_1l + (r_1 - r_2)l_2).$$

Знойдзем l_2 , улічыўшы падобнасць трохвугольнікаў MCO і MC_1O_1 :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{l + l_2}{l_2} \equiv r_1l_2 = r_2l + r_2l_2 \equiv l_2 = \frac{r_2l}{r_1 - r_2}.$$

Значыць,

$$S_{\text{бак}} = \pi(r_1l + (r_1 - r_2)l_2) = \pi\left(r_1l + (r_1 - r_2)\frac{r_2l}{r_1 - r_2}\right) = \pi r_1l + \pi r_2l = \frac{C_1 + C_2}{2}l.$$

Такім чынам, **бакавая паверхня ўсечанага конуса роўная здабытку пайсумы даўжынь акружнасцей яго асноў і ўтваральніка:**

$$S_{\text{бак}} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Прыклад 4. Радыусы асноў усечанага конуса роўныя 9 і 18, а яго вышыня — 12 (рис. 105). Знойдзем плошчу бакавой паверхні гэтага конуса.

Р а ш э н н е. Няхай h , r_1 і r_2 — вышыня ўсечанага конуса і радыусы яго асноў. Восевым сячэннем конуса з'яўляецца раўнабедраная трапецыя з вышынёй h і асновамі $2r_1$ і $2r_2$. Бакавой старонай трапецыі з'яўляецца ўтваральнік l конуса. Выкарыстаўшы тэарэму Піфагора, знаходзім:

$$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \sqrt{(18 - 9)^2 + 12^2} = 15.$$

Цяпер:

$$S_{\text{бак}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi \cdot (9 + 18) \cdot 15 = 405\pi.$$

А д к а з: 405π .

Правядзём праз вяршыню конуса сечную плоскасць і будзем яе паварочваць вакол прамой, перпендыкулярнай восі конуса (рыс. 106). Пры гэтым аснова трохвугольніка-сячэння будзе скарачацца, а яго бакавыя стораны збліжацца да моманту, пакуль не супадуць. Атрымаем плоскасць, якая цалкам змяшчае ўтваральнік і не мае з конусам іншых агульных пунктаў. Такая плоскасць называецца **датычнай плоскасцю конуса**.

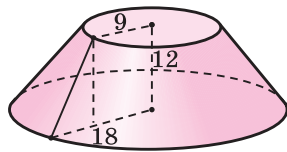


Рис. 105

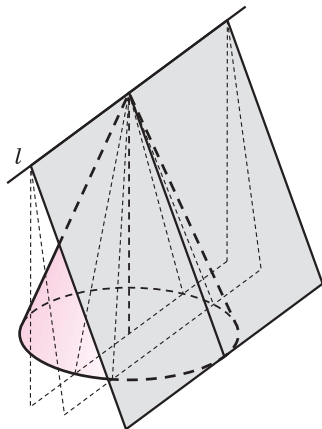


Рис. 106



Тэарэма 7. Калі плоскасць датыкаецца да конуса па пэўным ўтваральніку, то да яе перпендыкулярная плоскасць, што праходзіць праз гэты ўтваральнік і вось конуса.

Доказ*. Няхай плоскасць α датыкаецца да конуса з воссю AB па ўтваральніку AC (рыс. 107). Дакажам, што плоскасць, якая змяшчае гэты ўтваральнік і вось AB , перпендыкулярная плоскасці α .

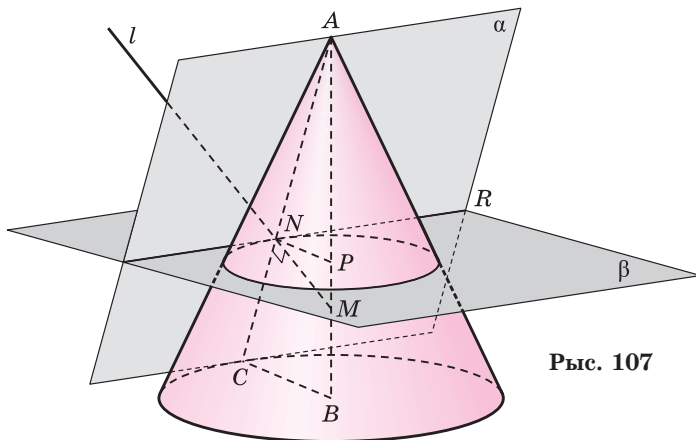


Рис. 107

Правядзём прамую l , якая перпендыкулярная ўтваральніку AC , перасякае яго ў пункце N і вось конуса ў пункце M , адрозным ад вяршыні A . Праз пункт N правядзём плоскасць β , перпендыкулярную восі AB , яна перасякае конус па крузе з цэнтрам P і плоскасць α — па прамой NR , якая датыкаецца да акружнасці з цэнтрам P . Гэтая датычная, па ўласцівасці датычнай да акружнасці, перпендыкулярная радыусу PN адпаведнай акружнасці. Але гэты радыус ёсць праекцыя нахіленай MN на плоскасць β , таму, па тэарэме пра тры перпендыкуляры, прамая NR перпендыкулярная нахіленай MN , г. зн. прамой l .

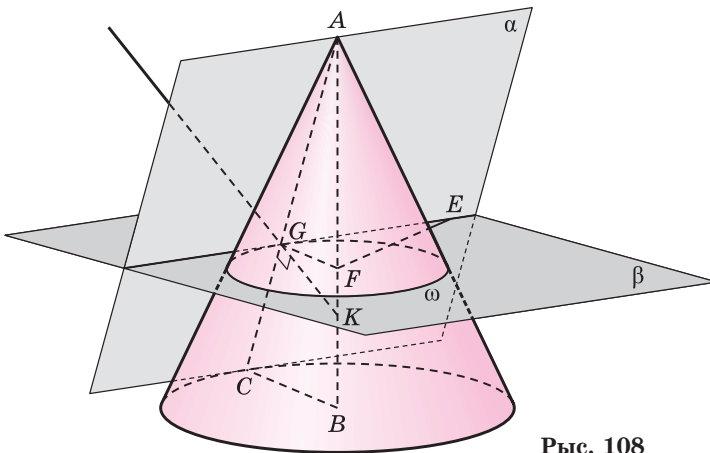
Такім чынам, прамая l перпендыкулярная прамым AC і NP , якія перасякаюцца і ляжаць у плоскасці α , таму, па прымеце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці, прамая l перпендыкулярная плоскасці α . Значыць, плоскасць ABC , якая змяшчае прамую l , перпендыкулярная плоскасці α .

Тэарэма 7 выражае ўласцівасць датычнай плоскасці конуса.

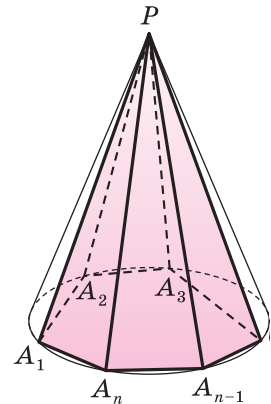
Тэарэма 8. Плоскасць датыкаецца да конуса, калі яна праходзіць праз яго ўтваральнік і перпендыкулярная плоскасці, што праходзіць праз гэты ўтваральнік і вось конуса.

Доказ*. Няхай плоскасць α праходзіць праз утваральнік AC конуса з воссю AB і перпендыкулярная плоскасці ABC (рыс. 108). Дакажам, што плоскасць α датыкаецца да конуса, г. зн. што пункты ўтваральніка AC і толькі яны з'яўляюцца агульнымі пунктамі конуса і плоскасці α .

Пункты ўтваральніка AC належаць і конусу, і плоскасці α . Няхай E — які-небудзь пункт плоскасці α па-за ўтваральнікам AC . Праз гэты пункт правядзём плоскасць β , перпендыкулярную восі AB , яна перасякае паверхню конуса па акружнасці ω з цэнтрам F , утваральнік AC — у пэўным



Рыс. 108



Рыс. 109

пункце G і плоскасць α — па прамой GE . Няхай GK — прамая, перпендыкулярная плоскасці α , перасякае вось AB у пункце K . Тады, па тэарэме пра тры перпендыкуляры, прамая GE , праведзеная ў плоскасці β праз аснову нахіленай GK перпендыкулярна да яе, перпендыкулярная яе праекцыі FG . Таму GE — датычная акружнасці ω і пункт E знаходзіцца па-за акружнасцю ω , а значыць, і па-за конусам.

Тэарэма 8 выражае *прымету датычнай плоскасці конуса*.

В) Няхай ёсць конус з вяршыняй P (рыс. 109). Умежым у аснову конуса многавугольнік $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ і праз яго вяршыні $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ правядзём утваральнікі $A_1P, A_2P, \dots, A_{n-1}P, A_nP$. У выніку атрымаем цэла $PA_1A_2\dots A_{n-1}A_n$, якое з'яўляецца пірамідай. Яе называюць *пірамідай, умежанай у конус*, а сам конус — *конусам, апісаным каля піраміды*.



Прыклад 5. Усечаны конус апісаны каля правільнай шасцівугольнай усечанай піраміды з кантамі асноў 5 і 2 і вышынёй 4 (рыс. 110). Знайдзем плошчу поўнай паверхні конуса.

Р а ш ę н н е. Усечаны конус і піраміда маюць агульную вышыню: $h = 4$. Асновы піраміды з'яўляюцца правільнымі шасцівугольнікамі, умежанымі ў асновы ўсечанага конуса. Таму радыусы гэтых кругоў роўныя кантам асноў: $r_1 = 5, r_2 = 2$. Утваральнікам l усечанага конуса з'яўляецца бакавы кант піраміды. Калі з вяршыні адной асновы піраміды апусціць вышыню на другую аснову, то ўтварыцца прамавугольны трохвугольнік, у якім бакавы кант будзе гіпатэнузай, а праведзеная вышыня і адрэзак, роўны рознасці радыусаў асноў, — катэтамі. Таму:

$$l^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2, \quad l = \sqrt{4^2 + (5 - 2)^2} = 5.$$

Цяпер знаходзім:

$$S_{1\text{асн}} = \pi r_1^2 = 25\pi, \quad S_{2\text{асн}} = \pi r_2^2 = 4\pi,$$

$$S_{\text{бак}} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot l = 35\pi,$$

$$S_{\text{поўн}} = S_{1\text{асн}} + S_{2\text{асн}} + S_{\text{бак}} = 64\pi.$$

А д к а з: 64π .

Калі аснова конуса ўмежана ў аснову піраміды, а бакавая паверхня конуса датыкаецца да бакавых граняў піраміды, то гавораць, што *піраміда апісана каля конуса або конус умежаны ў піраміду* (рыс. 111).

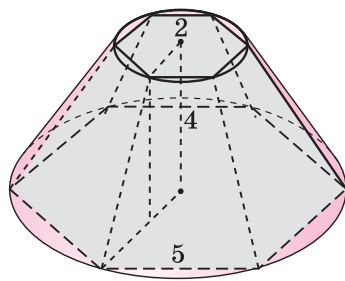


Рис. 110

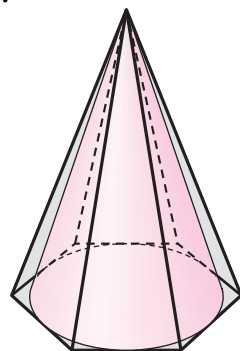


Рис. 111

Тэарэма 9. Аб'ём конуса роўны трэцяй долі здабытку плошчы яго асновы і вышыні:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Доказ. Няхай ёсць конус з васьцю MN (рыс. 112). У яго ўмежым правільную піраміду $MA_1A_2...A_{n-1}A_n$, а каля яго апішам правільную піраміду $MB_1B_2...B_{n-1}B_n$. У адпаведнасці з тэарэмай 4, аб'ём першай піраміды роўны трэцяй долі здабытку плошчы многавугольніка $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ і вышыні H піраміды, г. зн. вышыні конуса, а аб'ём другой — здабытку плошчы многавугольніка $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ і той самай вышыні. Аб'ём самога конуса заключаны паміж гэтымі лікамі.

Будзем павялічваць колькасць n старон асноў піраміды. Тады аб'ём першай піраміды павялічваецца, аб'ём другой — памяншаецца, прычым іх рознасць імкнецца да нуля, калі значэнне зменнай n неабмежавана павялічваецца. Той лік, да якога набліжаюцца аб'ёмы абедзвюх пірамід, прымаецца за аб'ём конуса.

У апісаным працэсе вышыня H піраміды не змяняецца, а плошчы многавугольнікаў $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ і $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ імкнуцца да плошчы S круга, што з'яўляецца асновай конуса. Значыць, аб'ём V конуса роўны трэцяй долі здабытку плошчы S асновы конуса і яго вышыні H :

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Выкарыстаўшы рыс. 113, можам, як і для ўсечанай піраміды (гл. § 3), даказаць, што аб'ём V усечанага конуса роўны трэцяй долі здабытку вышыні H конуса і сумы плошчаў S_1 і S_2 асноў конуса і іх сярэдняга геаметрычнага $\sqrt{S_1 S_2}$:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Прыклад 6. Аб'ём конуса роўны 54л. Сячэнне, паралельнае аснове, па плошчы ў 9 разоў меншае за яе. Знайдзем аб'ём усечанага конуса.

Рашэнне. Няхай r — радыус асновы конуса, h — яго вышыня, r_1 — радыус сячэння, h_1 — вышыня адсечанага конуса (рыс. 114).

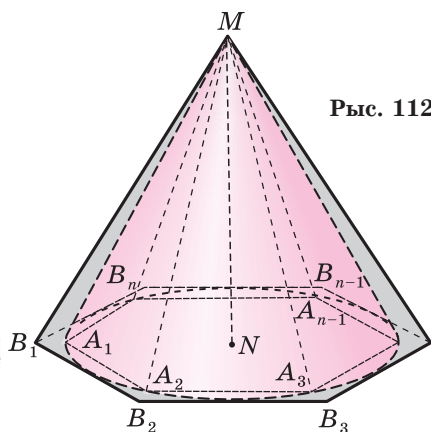


Рис. 112

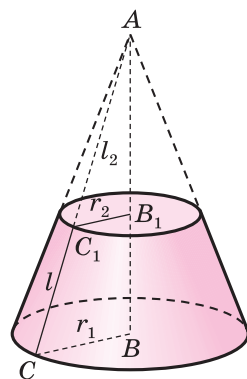


Рис. 113

Па тэарэме 6а, $r_1 = kr$, $h_1 = kh$ пры пэўным k .

Паколькі па ўмове $\frac{\pi r_1^2}{\pi r^2} = \frac{1}{9}$, то $k = \frac{1}{3}$.

Знойдзем аб'ём V_1 адсечанага конуса:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{27} \cdot 54\pi = 2\pi.$$

Значыць, аб'ём усечанага конуса роўны $54\pi - 2\pi$, г. зн. 52π .

Адказ: 52π .



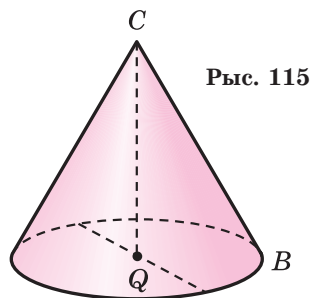
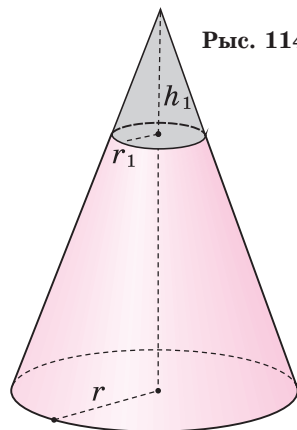
1. Якое цэла называецца конусам?
2. Што называюць паверхняй конуса; бакавой паверхняй конуса; асновай конуса?
3. Якую прамую называюць воссю конуса?
4. Які адрэзак называюць утваральнікам конуса; вышынёй конуса?
5. Чаму роўная бакавая паверхня конуса?
6. Якая фігура атрымліваецца пры перасячэнні конуса плоскасцю, паралельнай яго аснове; плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню?
7. Якое сячэнне конуса называюць восевым сячэннем?
8. Сфармулюйце ўласцівасці адрэзкаў утваральніка і вышыні конуса, на якія яны раздзяляюцца плоскасцю, паралельнай аснове.
9. Сфармулюйце ўласцівасці сячэння конуса плоскасцю, паралельнай аснове.
10. Якое цэла называецца ўсечаным конусам?
11. Што называюць асновамі ўсечанага конуса, яго ўтваральнікам, яго вышынёй?
12. Якую плоскасць называюць датычнай плоскасцю конуса?
13. Сфармулюйце ўласцівасць датычнай плоскасці конуса.
14. Сфармулюйце прымету датычнай плоскасці конуса.
15. Калі гавораць, што піраміда ўмежана ў конус; конус апісаны каля піраміды?
16. Калі гавораць, што конус умежаны ў піраміду; піраміда апісана каля конуса?
17. Чаму роўны аб'ём конуса; аб'ём усечанага конуса?



Задача 1. Вышыня конуса роўная $6\sqrt{3}$. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні конуса, улічыўшы, што яго дыяганальным сячэннем з'яўляецца правільны трохвугольнік.

Рашэнне. Няхай ABC — восевае сячэнне конуса з воссю CQ (рыс. 115). Тады $CQ = 6\sqrt{3}$, а трохвугольнік ABC — роўнастаронні. Значыць, для ўтваральніка l атрымаем:

$$l = AC = \frac{CQ}{\cos \angle ACQ} = \frac{6\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 12, \text{ бо } \angle AQC = 90^\circ, \angle ACQ = 30^\circ.$$



Тады для радыуса r асновы конуса праўдзіцца: $r = AQ = \frac{1}{2} AC = 6$.

Таму $S_{\text{поўн}} = S_{\text{асн}} + S_{\text{бак}} = \pi r(r + l) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 12) = 108\pi$.

Адказ: 108π .

Задача 2. Цэнтральны вугал разгорткі бакавой паверхні конуса роўны 240° . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса, улічыўшы, што яго вышыня роўная $4\sqrt{5}$.

Рашэнне. Утваральнік l конуса, яго вышыня h , радыус r асновы і цэнтральны вугал φ разгорткі бакавой паверхні звязаны роўнасцямі:

$$l^2 = r^2 + h^2 \text{ і } \varphi l = 360r.$$

Таму $l = 1,5r$ і $2,25r^2 = r^2 + 80$, адкуль $r = 8$ і $l = 12$. Значыць, $S_{\text{бак}} = \pi rl = \pi \cdot 8 \cdot 12 = 96\pi$.

Адказ: 96π .

Задача 3. Аб'ём конуса роўны 36π , а плошча восевага сячэння — 18. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса.

Рашэнне. Няхай r — радыус асновы конуса, h — яго вышыня (рыс. 116). Тады $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, або $36\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, або $r^2 h = 108$.

Але rh ёсць плошча восевага сячэння, і па ўмове $rh = 18$.

Таму $r^2 h = rh \cdot r = 18r$, значыць, $18r = 108$.

Далей знаходзім: $r = 108 : 18 = 6$, $h = 18 : 6 = 3$.

Па тэарэме Піфагора радыус асновы конуса, яго вышыня і ўтваральнік l звязаны роўнасцю $r^2 + h^2 = l^2$, таму:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5} \text{ і } S_{\text{бак}} = \pi rl = 18\pi\sqrt{5}.$$

Адказ: $18\pi\sqrt{5}$.



Задача 4. У правільную трохвугольную піраміду з бакавым кантам 6 умежаны конус (рыс. 117). Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса, улічыўшы, што плоскія вуглы пры вершыні піраміды прамыя.

Рашэнне. Бакавыя грані піраміды — прававугольныя раўнабедраныя трохвугольнікі з катэтамі 6. Таму кант a асновы піраміды роўны $6\sqrt{2}$, а вышыня h , праведзеная ў бакавой грані да канта асновы (гіпатэнузы), — $3\sqrt{2}$.

Конус, умежаны ў піраміду, мае з ёй агульную вышыню. Паколькі піраміда правільная, то аснова O вышыні з'яўляецца цэнтрам правільнага трохвугольніка асновы і цэнтрам круга, што датыкаецца да старон трохвугольніка асновы і з'яўляецца асновай конуса.

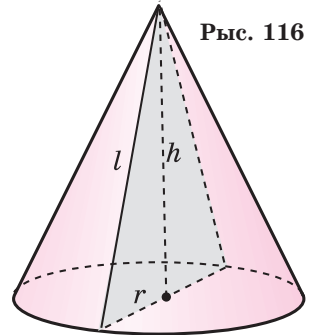


Рис. 116

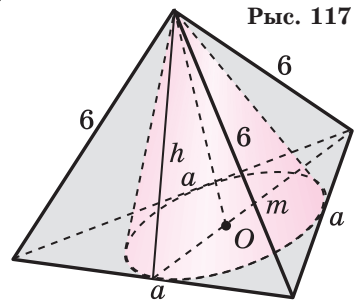


Рис. 117

Знаходзім медыяну m асновы $m = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$, радыус r асновы конуса $r = \frac{1}{3}m = \sqrt{6}$. Паколькі аснова конуса датыкаецца да кантаў асновы піраміды ў іх сярэдзінах, то, па тэарэме пра тры перпендыкуляры, утваральнікам конуса з'яўляецца вышыня h бакавой грані піраміды.

$$\text{Таму } S_{\text{бак}} = \pi r h = 6\sqrt{3}\pi.$$

$$\text{Адказ: } 6\sqrt{3}\pi.$$

Задача 5. Ёсць конус з вышынёй h і радыусам асновы r . Знайдзіце, на якой адлегласці ад плоскасці асновы трэба правесці паралельную плоскасць, каб яна раздзяліла конус на часткі, аб'ёмы якіх адносіліся б як 7 : 1.

Рашэнне. Няхай плоскасць, паралельная аснове конуса, праходзіць на адлегласці x ад асновы і перасякае конус па акружнасці радыуса r_1 . Тады, па тэарэме 6а, $r_1 = kr$, $h = x = kh$ пры пэўным k .

Паколькі па ўмове $\frac{1}{3}\pi r_1^2(h-x) : \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = 1 : (1+7)$, то $k^3 = \frac{1}{8}$, а таму

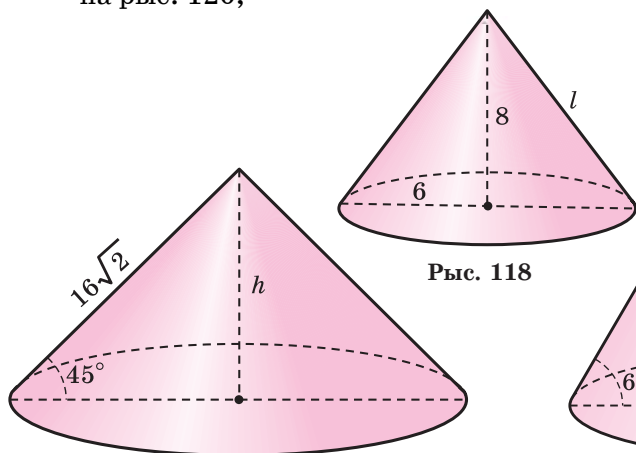
$$k = \frac{1}{2}. \text{ Значыць, } \frac{h-x}{h} = \frac{1}{2}, \text{ і таму } x = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{h}{2}.$$

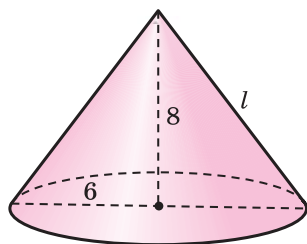


190. Знайдзіце:

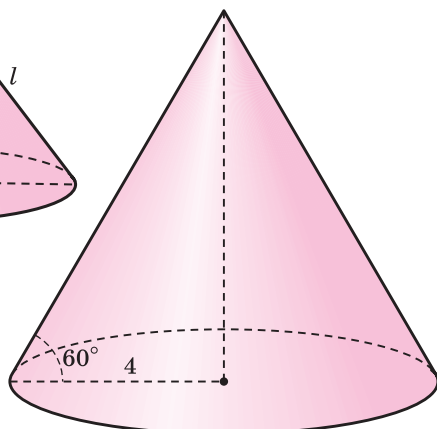
- а) утваральнік конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 118;
- б) вышыню конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 119;
- в) бакавую паверхню конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 120;



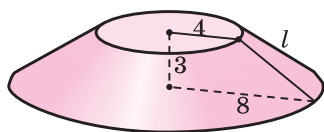
Рыс. 119



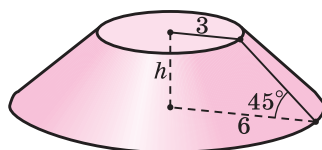
Рыс. 118



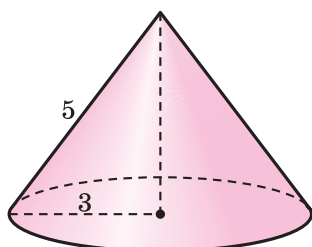
Рыс. 120



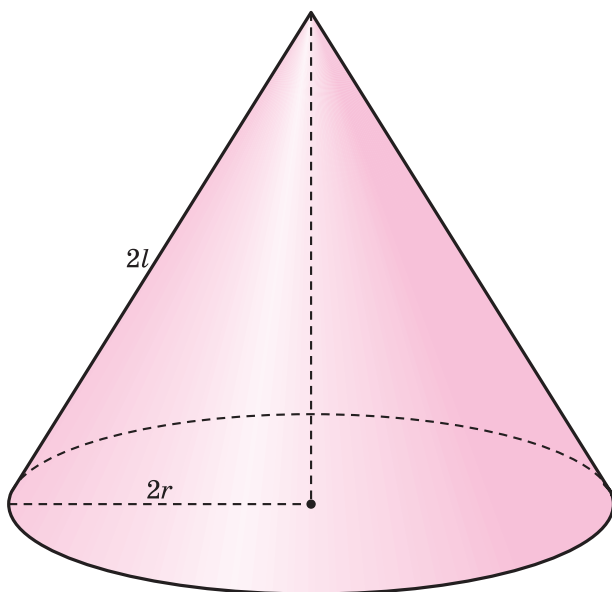
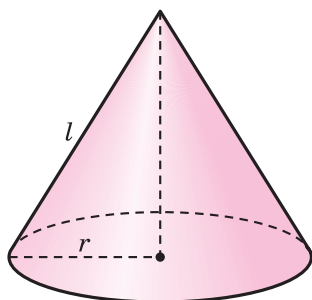
Рыс. 121



Рыс. 122



Рыс. 123



Рыс. 124

- г) утваральнік усечанага конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 121;
 д) вышыню ўсечанага конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 122;
 е) поўную паверхню конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 123;
 ж) адносіны поўных паверхняў конусаў, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 124.
191. Знайдзіце ўтваральнік конуса, вышыня якога роўная 45 см, а радыус асновы — 24 см.
192. Утваральнік конуса, роўны 12 см, нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α . Знайдзіце плошчу асновы конуса, улічыўшы, што:
 а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 60^\circ$.
193. Знайдзіце бакавую паверхню і плошчу асновы конуса, улічыўшы, што яго восевае сячэнне — роўнастаронні трохвугольнік з вышыняй $2\sqrt{3}$ см.

194. Знайдзіце паверхню цела, утворанага вярчэннем:
- а) прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 6 см і 8 см вакол меншага катэта;
 - б) раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной m і вуглом пры аснове φ вакол асновы;
 - в) прамавугольнага трохвугольніка з катэтам a і прылеглым да яго вуглом 60° вакол восі, што праходзіць праз вяршыню дадзенага вострага вугла перпендыкулярна катэту.
195. Знайдзіце поўную паверхню конуса, у якога:
- а) плошча восевага сячэння роўная $0,6 \text{ м}^2$, а вышыня конуса — 1,2 м;
 - б) плошча восевага сячэння роўная 25 см^2 , а вугал паміж вышынёй і ўтваральнікам — 45° ;
-  в) утваральнік нахілены пад вуглом φ да асновы, а ўмежаны ў яе трохвугольнік мае адной стараной адрэзак даўжынёй a і супрацьлеглы вугал велічынёй α .
196. Знайдзіце бакавую паверхню конуса, вышыня якога роўная 4 см, а вугал пры вяршыні восевага сячэння роўны 90° .
197. Вызначце вугал разгорткі бакавой паверхні конуса, у якога:
- а) найбольшы вугал паміж утваральнікамі з'яўляецца прамым;
 - б) утваральнік складае з плоскасцю асновы вугал 30° ;
 - в) радыус асновы роўны r , а ўтваральнік — l .
198. Сектар з радыусам 6 м і вуглом 120° згорнуты ў канічную паверхню. Знайдзіце плошчу асновы і вышыню адпаведнага конуса.
199. Паўкруг згорнуты ў канічную паверхню. Знайдзіце вугал паміж утваральнікам адпаведнага конуса і яго вышынёй.
200. Адносіна бакавой і поўнай паверхняў конуса роўная $\frac{5}{8}$. Знайдзіце вугал паміж утваральнікам і плоскасцю асновы конуса.
201. Плошча асновы конуса роўная S_1 , а яго бакавая паверхня — S_0 .
-  Знайдзіце плошчу восевага сячэння конуса.
202. Праз вяршыню конуса і хорду асновы, што сцягвае дугу ў 120° , праведзена сячэнне, якое складае з плоскасцю асновы вугал 45° . Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што радыус асновы роўны 20 см.
203. Знайдзіце плошчу сячэння конуса плоскасцю, улічыўшы, што:
- а) яна праведзена праз вяршыню конуса і адсякае ад акружнасці асновы дугу ў 90° , а вышыня конуса роўная радыусу асновы r ;
 - б) яна праведзена праз два ўзаемна перпендыкулярныя ўтваральнікі, а вышыня конуса роўная h і нахілена да ўтваральніка пад вуглом 60° ;
 - в) яна праведзена праз вяршыню конуса, складае з плоскасцю асновы вугал 60° і адсякае ад акружнасці асновы з радыусам r дугу ў 120° ;

- г) яна праведзена праз вяршыню конуса і адлеглая ад цэнтра асновы на 24 см, вышыня конуса роўная 40 см, а радыус асновы — 50 см;
 д) яна паралельная аснове конуса з радыусам R , адлеглая на d ад вяршыні, а вышыня роўная H .
- 204.** Восевае сячэнне конуса — правільны трохвугольнік са стараной $2m$. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз два ўтваральнікі конуса, вугал паміж якімі роўны:
 а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .
- 205*.** Знайдзіце косінус вугла пры вяршыні восевага сячэння конуса, які мае тры папарна перпендыкулярныя ўтваральнікі.
- 206*.** Вызначце, на якой адлегласці ад асновы конуса праходзяць дзве плоскасці, якія паралельныя плоскасці гэтай асновы і дзеляць бакавую паверхню конуса на тры роўныя часткі, улічыўшы, што вышыня конуса роўная H .
- 207.** Праз сярэдзіну вышыні конуса праведзена прамая, паралельная яго ўтваральніку, даўжыня якога роўная l . Знайдзіце даўжыню адрэзка прамой, заключанага ўнутры конуса.
- 208.** Ёсць конус з утваральнікам 13 см і вышынёй 12 см, які перасечаны прамой, паралельнай аснове і адлеглай ад асновы на 6 см, а ад вышыні на 2 см (рыс. 125). Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, заключанага ўнутры конуса.
- 209.** Праз сярэдзіну вышыні конуса, бакавая паверхня якога роўная 80 см^2 , праведзена плоскасць, перпендыкулярная вышыні. Знайдзіце бакавую паверхню ўтворанага ўсечанага конуса.
- 210.** Улічыўшы, што радыусы асноў усечанага конуса роўныя:
 а) 9 см і 18 см, а вышыня — 12 см, знайдзіце яго ўтваральнік;
 б) 16 см і 4 см, а ўтваральнік — 20 см, знайдзіце яго вышыню.
- 211.** Знайдзіце паверхню ўсечанага конуса, улічыўшы, што радыусы яго асноў роўныя 6 см і 10 см, а ўтваральнік — 10 см.
- 212.** Дакажыце, што:
 а) бакавая паверхня конуса роўная бакавой паверхні цыліндра з той самай вышынёй і радыусам асновы, роўным вышыні раўнабедранага трохвугольніка, асновай якога з'яўляецца ўтваральнік, а вяршыня ляжыць на восі конуса (рыс. 126);

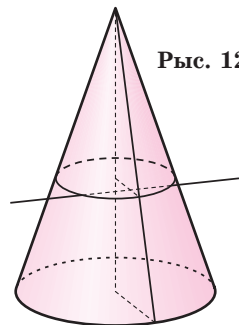


Рис. 125

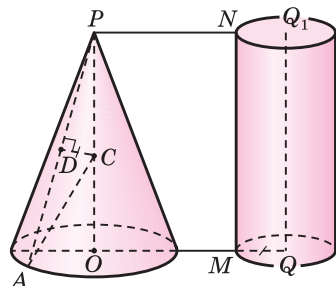


Рис. 126

б) бакавая паверхня ўсечанага конуса роўная бакавой паверхні цыліндра з той самай вышыняй і радыусам асновы, роўным вышыні раўнабедранага трохвугольніка, асновай якога з'яўляецца ўтваральнік, а вяршыня ляжыць на восі конуса (рыс. 127).

213. Знайдзіце плошчу сячэння ўсечанага конуса плоскасцю, улічыўшы, што яна праходзіць праз:

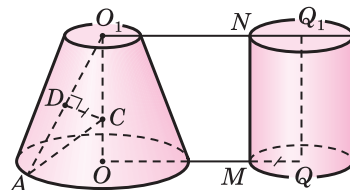
а) два яго ўтваральнікі, адсякае ад акружнасці асновы дугу ў 120° , радыусы асноў конуса роўныя 3 і 5, а вышыня — $\sqrt{2}$;

б) сярэдзіну вышыні і паралельная асновам, плошчы якіх роўныя 16 дм^2 і 64 дм^2 .

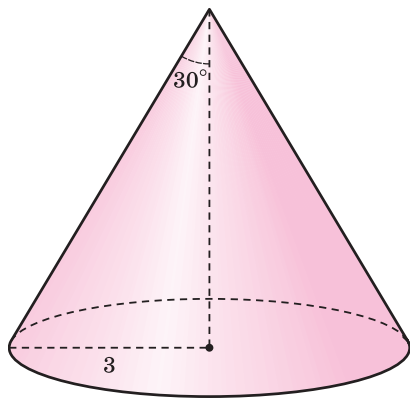
214. Знайдзіце:

а) аб'ём V конуса, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 128;

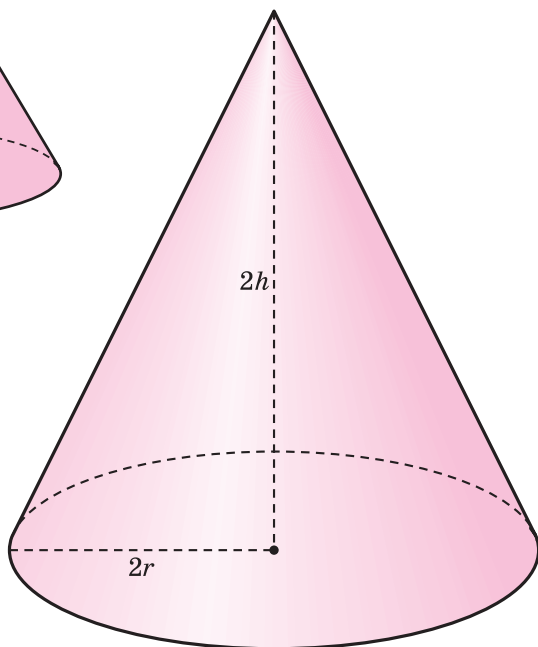
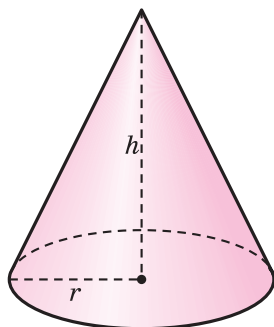
б) адносіну аб'ёмаў конусаў, улічыўшы звесткі, прыведзеныя на рыс. 129.



Рыс. 127



Рыс. 128



Рыс. 129

- 215.** Знайдзіце аб'ём конуса, у якога:
- а) дыяметр асновы роўны 40 см, а вышыня — 50 см;
 - б) утваральнік роўны 60 см, а вышыня — 30 см;
 - в) радыус асновы роўны 85 см, а ўтваральнік складае з воссю конуса вугал 30° ;
 - г) радыус асновы роўны 42 см, а ўтваральнік нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 65° ;
 - д) поўная паверхня роўная 680 дм^2 , а ўтваральнік — 25 дм;
 - е) поўная паверхня роўная 160 см^2 , а ўтваральнік большы за радыус асновы на 2 см.
- 216.** Няхай h , r і V — адпаведна вышыня, радыус асновы і аб'ём конуса. Знайдзіце:
- а) V , улічыўшы, што $h = 12 \text{ см}$, $r = 6 \text{ см}$;
 - б) h , улічыўшы, што $r = 4 \text{ см}$, $V = 48\pi \text{ см}^3$;
 - в) r , улічыўшы, што $h = m$, $V = p$.
- 217.** Дзве стараны трохвугольніка роўныя b і c , а тупы вугал паміж імі — α . Знайдзіце аб'ём цела, утворанага вярчэннем трохвугольніка каля стараны b .
- 218.** Знайдзіце аб'ём конуса, улічыўшы, што яго:
- а) вышыня роўная H і роўная дыяметру яго асновы;
 - б) утваральнік роўны 13 см, а плошча восевага сячэння — 60 см^2 ;
 - в) утваральнік роўны l , а бакавая паверхня — P ;
 - г) плошча яго асновы роўная Q , а бакавая паверхня — P .
- 219.** Дакажыце, што калі трохвугольнік верціцца вакол стараны, то аб'ём атрыманага цела роўны $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, дзе h — старана, вакол якой адбываецца вярчэнне, а R — вышыня трохвугольніка, апушчаная на гэтую старану.
- 220.** Знайдзіце аб'ём цела, атрыманага вярчэннем:
- а) трохвугольніка са старанамі 15 см, 41 см і 52 см вакол большай стараны;
 -  б) прамавугольнага трохвугольніка з плошчай S і вострым вуглом α каля яго гіпатэнузы;
 -  в) паралелаграма з плошчай Q вакол стараны даўжынёй a .
- 221.** На адлегласці 2 см ад вяршыні конуса з вышынёй 5 см праведзена плоскасць, паралельная аснове. Знайдзіце аб'ём зыходнага конуса, улічыўшы, што аб'ём меншага конуса, які адсякаецца ад зыходнага, роўны 24 см^3 .

222. Вышыня конуса падзеленая на тры долі і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя плоскасці асновы конуса. Вызначце, у якіх адносінах гэтымі плоскасцямі дзеліцца аб'ём конуса.

223. Ёсць конус, радыус асновы якога роўны r , а вышыня — H . Вызначце, на якой адлегласці ад плоскасці асновы трэба правесці плоскасць, паралельную ёй, каб гэтай плоскасцю конус раздзяліўся на часткі, аб'ёмы якіх адносяцца як:

а) $1 : 1$; б) $3 : 5$; в) $5 : 3$; г) $7 : 1$.

224. Плоскасць, паралельная аснове конуса з радыусам 6 м, перасякае яго па крузе з радыусам 3 м. Знайдзіце аб'ём атрыманых частак конуса, улічыўшы, што плоскасць раздзяляе ўтваральнік конуса на часткі, з якіх тая, якая абмежавана гэтай плоскасцю і асновай конуса, роўная 5 м.



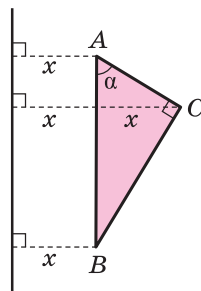
225. Плоскасць, паралельная аснове конуса з радыусам 22 м, перасякае яго па крузе з радыусам 4 м. Утвораны ўсечаны конус роўнавялікі цыліндру з такой самай вышынёй. Знайдзіце радыус асновы гэтага цыліндра.



226*. Прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай c і вострым вуглом α верціцца вакол прамой, якая паралельная гіпатэнузе, адлеглая ад яе на вышыню, праведзеную да гіпатэнузы, і не мае з трохвугольнікам агульных пунктаў (рыс. 130). Знайдзіце аб'ём атрыманага цела.



227. У конусе прасвідравалі цыліндрычную адтуліну, вось якой супадае з воссю конуса. Знайдзіце аб'ём цела, што засталася, улічыўшы, што вышыня конуса роўная 30 см, дыяметр яго асновы — 20 см, а дыяметр цыліндрычнай адтуліны — 10 см.



Рыс. 130

228. У трохвугольную піраміду з роўнымі кантамі



ўмежаны конус, і каля гэтай піраміды апісаны конус. Вызначце, у колькі разоў поўная паверхня апісанага конуса большая за поўную паверхню ўмежанага конуса.

229. Вышыня конуса роўная 4 см, а радыус — 6 см. Знайдзіце поўную паверхню правільнай n -вугольнай піраміды, умежанай у конус, улічыўшы, што:



а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

230. У конус умежана піраміда, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік. Меншая старана прамавугольніка роўная a , а востры вугал паміж яго дыяганалямі — α . Бакавая грань, якая змяшчае меншую старану асновы, складае з плоскасцю асновы вугал β . Знайдзіце аб'ём конуса.



231. Асновай піраміды з'яўляецца ромб са стараной a і вострым вуглом φ . У піраміду ўмежаны конус, утваральнік якога складае з плоскасцю асновы вугал β . Знайдзіце аб'ём конуса.



232. Ёсць конус з радыусам асновы 5 см і вышынёй 4 см, у які ўмежана правільная n -вугольная піраміда. Плоскасць, паралельная аснове конуса, перасякае яго па крузе з радыусам 2 см. Знайдзіце поўную паверхню часткі піраміды, заключаную паміж асновай конуса і сечнай плоскасцю, улічыўшы, што:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

233. Знайдзіце кант:



а) куба, умежанага ў конус з радыусам асновы R і вышынёй H (рыс. 131);

б) правільнай трохвугольнай прызмы, у якой бакавыя грані з'яўляюцца квадратамі і якая ўмежана ў конус з радыусам асновы R і вышынёй H .

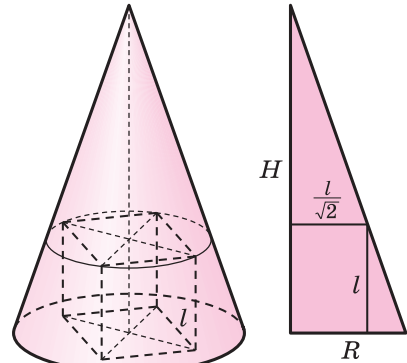


Рис. 131

234*. Ёсць конус з утваральнікам l , які нахілены да плоскасці асновы конуса пад вуглом 60° . У яго ўмежана правільная трохвугольная прызма, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы (рыс. 132). Знайдзіце гэты кант.



235. Прыняўшы шчыльнасць сталі роўнай $7,8 \text{ г/см}^3$, знайдзіце масу стальной круглай дэталі, памеры якой у міліметрах дадзены на rysunku:
а) 133; б) 134.

236*. Каля конуса апісана чатырохвугольная піраміда. Дакажыце, што сумы плошчаў яе не сумежных паміж сабой бакавых граняў роўныя.



237*. Каля конуса апісана трохвугольная піраміда. Плошчы яе бакавых граняў адносяцца як $5 : 6 : 7$. Вызначце, у якіх адносінах лініі дотыку раздзяляюць бакавую паверхню піраміды.

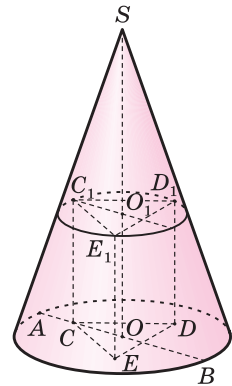


Рис. 132

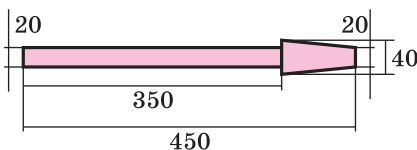


Рис. 133

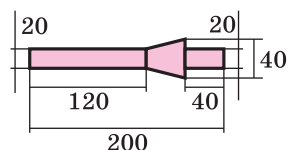


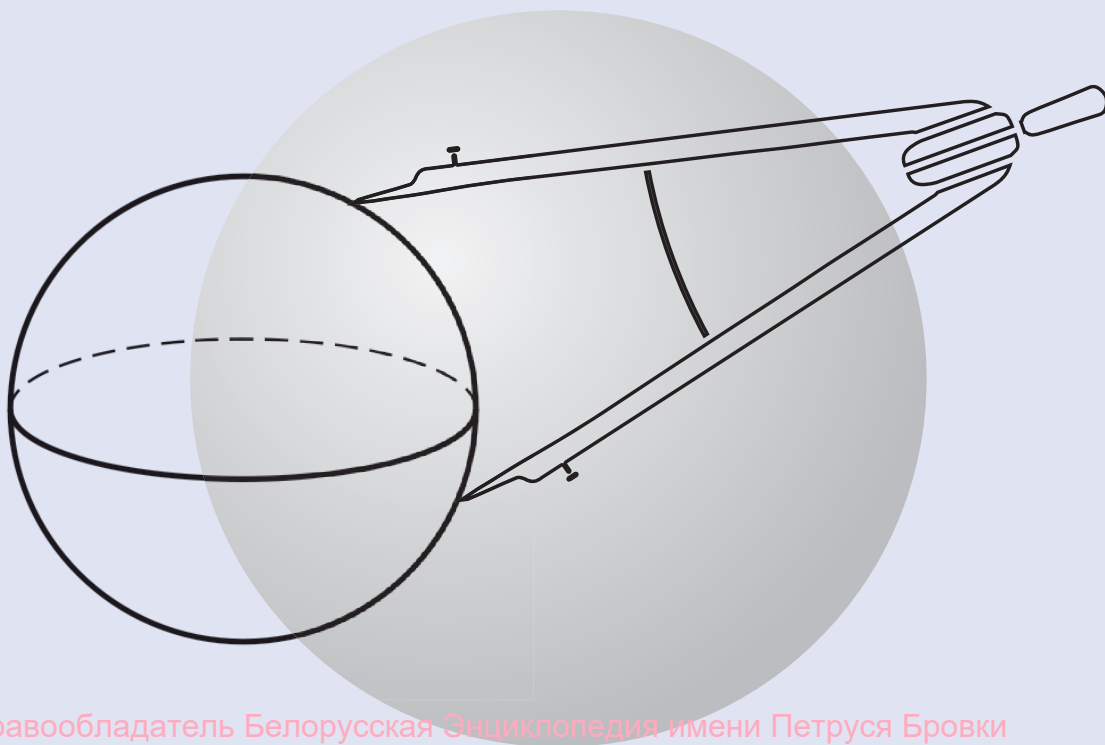
Рис. 134

Раздзел 3

Сфера і шар

У гэтым раздзеле вы:

- даведаецеся, якое цела называюць шарам і якую паверхню — сферай;
- пазнаёміцеся з датычнай прамой і датычнай плоскасцю сферы;
- пазнаёміцеся з канфігурацыямі — мнагаграннікам, умежаным у шар, і шарам, умежаным у мнагаграннік; цыліндрам, умежаным у шар, і шарам, умежаным у цыліндр; конусам, умежаным у шар, і шарам, умежаным у конус;
- навучыцеся знаходзіць плошчу сферы і аб'ём шара;
- навучыцеся знаходзіць па вядомых характарыстыках сферы і шара іншыя іх характарыстыкі;
- навучыцеся рашаць разнастайныя задачы, умовы якіх змяшчаюць канфігурацыі з шарам.



§ 5. Сфера

А) **Сферай** называецца паверхня, атрыманая вярчэннем акружнасці вакол якога-небудзь яе дыяметра (рыс. 135). Цэнтр гэтай акружнасці называецца **цэнтрам сферы**.

Адрэзак, што злучае цэнтр сферы з любым яе пунктам, называецца **радыусам сферы**, адрэзак, што злучае два пункты сферы, — **хордай сферы**, а хорда, якой належыць цэнтр сферы, — **дыяметрам сферы** (рыс. 136).

З азначэння сферы вынікае, што ўсе яе пункты роўнаадлеглыя ад цэнтра сферы. Таму ўсе радыусы сферы роўныя адзін аднаму.

Тэарэма 1. Сячэнне сферы плоскасцю ёсць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апущанага з цэнтра сферы на сечную плоскасць.

Доказ. Няхай сфера з цэнтрам O перасечана плоскасцю α , а Q — аснова перпендыкуляра, апущанага з цэнтра O на плоскасць α (рыс. 137).

Няхай X і Y — адвольныя пункты лініі перасячэння сферы з плоскасцю α . Трохвугольнікі OQX і OQY абодва прамавугольныя, бо адрэзак OQ перпендыкулярны плоскасці α , а значыць, і адрэзкам QX і QY , якія ляжаць у гэтай плоскасці. Адрэзак OQ з'яўляецца агульным катэтам, а гіпатэнузы гэтых трохвугольнікаў роўныя як радыусы сферы. Таму трохвугольнікі OQX і OQY роўныя адзін аднаму, а значыць, $QX = QY$. Атрымалі, што любыя два пункты лініі перасячэння сферы плоскасцю α роўнаадлеглыя ад асновы Q перпендыкуляра, праведзенага з цэнтра сферы да гэтай плоскасці.

Разам з гэтым, калі пункт M плоскасці α належыць акружнасці ω з цэнтрам Q і радыусам QX , то прамавугольныя трохвугольнікі OQM і OQX роўныя, таму роўная і іх гіпатэнузы OM і OX . Атрымалі, што кожны пункт акружнасці ω належыць як плоскасці α , так і сферы.

Такім чынам, лінія перасячэння сферы з плоскасцю ёсць акружнасць з цэнтрам Q .

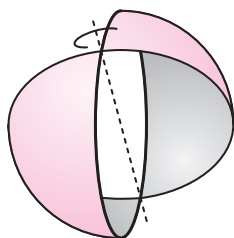


Рис. 135

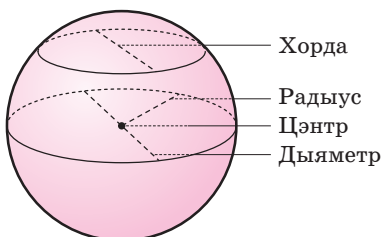


Рис. 136

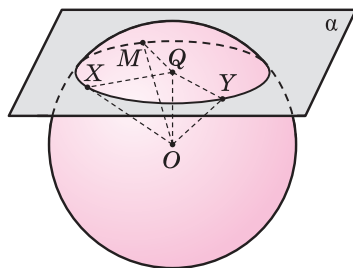


Рис. 137

Вынік. Калі плоскасць праходзіць на адлегласці d ад цэнтра сферы з радыусам R , то акружнасць сячэння мае радыус r , роўны $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Сячэнне мае найбольшы радыус R , калі сечная плоскасць праходзіць праз цэнтр сферы, гэтае сячэнне называюць *вялікай акружнасцю*, а абмежаваны ёй круг — *вялікім кругам*.

Прыклад 1. Пункты A, B, C сферы з радыусам 9 выбраны так, што $AC = 8$ і $\angle ABC = 45^\circ$. Знойдзем адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці трохвугольніка ABC .

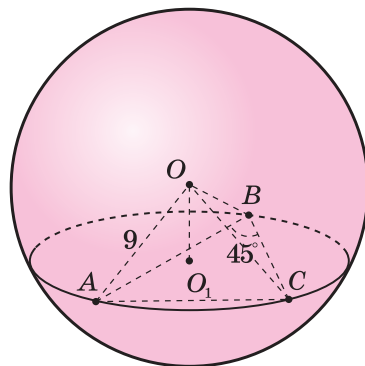
Рашэнне. Няхай OO_1 — перпендыкуляр, апущаны з цэнтра O сферы на плоскасць ABC (рыс. 138). Паколькі нахіленыя OA, OB, OC роўныя як радыусы сферы, то роўныя і іх праекцыі на плоскасць ABC , а значыць, $O_1A = O_1B = O_1C$. Таму O_1 — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC . Улічыўшы, што адносіна стараны трохвугольніка да сінуса супрацьлеглага вугла роўная дыяметру апісанай акружнасці, з трохвугольніка ABC знойдзем:

$$O_1A = \frac{AC}{2\sin \angle ABC} = \frac{8}{2\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2}.$$

Цяпер можна знайсці катэт OO_1 прававугольнага трохвугольніка AOO_1 :

$$OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{81 - 32} = 7.$$

Адказ: 7.

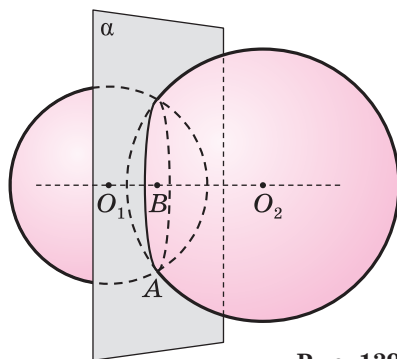


Рыс. 138



Тэарэма 2. Дзве сферы перасякаюцца па акружнасці, плоскасць якой перпендыкулярная прамой, што праходзіць праз цэнтры сфер.

Доказ. Няхай ёсць дзве перасякальныя сферы з цэнтрамі O_1 і O_2 , а A — які-небудзь іх агульны пункт (рыс. 139). Праз пункт A правядзём плоскасць α , перпендыкулярную прамой O_1O_2 . Няхай гэтая плоскасць перасякае прамую O_1O_2 у пункце B . У адпаведнасці з тэарэмай 1, плоскасць α перасякае адну і другую сферы па акружнасці з цэнтрам B . Атрымалі, што акружнасць з цэнтрам B ёсць агульная акружнасць дадзеных сфер.



Рыс. 139

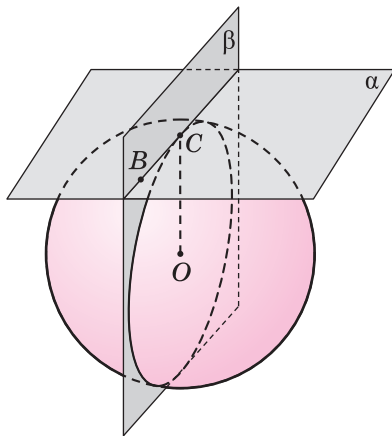
Іншых агульных пунктаў дадзеныя акружнасці не маюць. Дапусцім, што гэта не так. Няхай C — які-небудзь агульны пункт сфер, які не належыць акружнасці з цэнтрам B . Праз пункты C , O_1 і O_2 правядзём плоскасць, якая перасячэ сферы па акружнасцях з цэнтрамі O_1 і O_2 . Гэтыя акружнасці перасякаюцца ў двух пунктах, якія належаць акружнасці з цэнтрам B , і разам з гэтым ім абедзвюм належыць пункт C . Але гэта супярэчыць сцверджанню пра тое, што дзве акружнасці маюць не больш чым два агульныя пункты.

Б) Плоскасць, якая мае са сферай адзіны агульны пункт, называецца **датычнай плоскасцю сферы**. Агульны пункт сферы і датычнай плоскасці называецца *пунктам дотыку*.

Прамая датычнай плоскасці сферы, якая праходзіць праз пункт дотыку, мае са сферай адзіны агульны пункт. Такая прамая называецца *датычнай прамой сферы*.

Тэарэма 3. Датычная плоскасць сферы перпендыкулярная радыусу, праведзенаму ў пункт дотыку.

Доказ. Няхай плоскасць α датыкаецца да сферы з цэнтрам O у пункце C (рыс. 140). Няхай B — адвольны пункт плоскасці α , адрозны ад пункта C . Праз пункты O , C , B правядзём плоскасць β . Яна, па тэарэме 1, перасякае сферу па акружнасці. У дачыненні да гэтай акружнасці прамая BC з'яўляецца датычнай, бо пункт C — іх адзіны агульны пункт. Па ўласцівасці датычнай да акружнасці, радыус OC перпендыкулярны прамой BC . Такім чынам, радыус OC перпендыкулярны любой прамой BC , праведзенай у плоскасці α праз яе пункт C . Значыць, радыус OC перпендыкулярны плоскасці α .



Рыс. 140

Тэарэма 4. Калі плоскасць праходзіць праз пункт сферы і перпендыкулярная радыусу, праведзенаму ў гэты пункт, то яна з'яўляецца датычнай плоскасцю сферы.

Доказ. Няхай плоскасць γ праходзіць праз пункт M сферы і перпендыкулярная радыусу OM (рыс. 141). Няхай N — адвольны пункт плоскасці γ , адрозны ад пункта M . Трохвугольнік OMN — прававугольны з гіпатэнузай ON , і яна даўжэйшая за катэт. Таму пункт N размешчаны

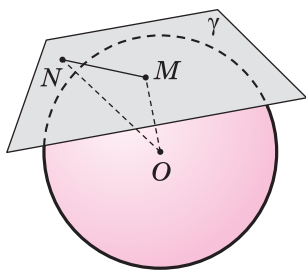


Рис. 141

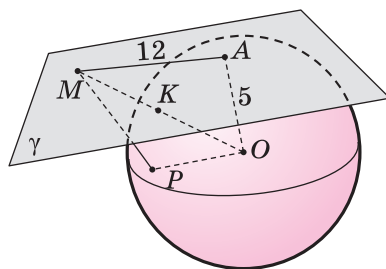


Рис. 142

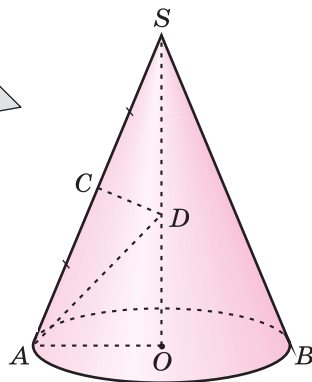


Рис. 143

па-за сферай. Атрымліваецца, што любы пункт плоскасці γ , акрамя пункта M , не належыць сферы. Значыць, пункт M — адзіны агульны пункт плоскасці γ і сферы, а таму гэтая плоскасць ёсць датычная плоскасць сферы.

Тэарэмы 3 і 4 выражаюць адпаведна ўласцівасць і прымету датычнай плоскасці сферы.

Прыклад 2. Плоскасць γ датыкаецца да сферы з радыусам 5 у пункце A . На плоскасці γ адзначаны пункт M . Знойдзем адлегласць ад M да найбліжэйшага пункта сферы, улічыўшы, што $AM = 12$.

Р а ш э н н е. Няхай O — цэнтр сферы (рыс. 142). Паколькі $OA \perp AM$, то:

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Няхай P — пэўны пункт сферы, тады, з няроўнасці трохвугольніка, вынікае, што:

$$MP + PO \geq OM, \text{ або } MP \geq OM - PO = 13 - 5 = 8.$$

Калі K — пункт сферы на адрэзку OM , то праўдзіца роўнасць $MK = OM - KO$. Таму найбольш блізка да M пункт сферы знаходзіцца на адлегласці 8.

А д к а з: 8.

В) Перш чым даказаць сцверджанне пра плошчу паверхні сферы, аб'ёмнага сцверджанні пра бакавыя паверхні конуса, усечанага конуса і цыліндра.



Тэарэма 5. Бакавая паверхня конуса, усечанага конуса, цыліндра роўная бакавой паверхні цыліндра з той самай вышыняй і радыусам асновы, роўным даўжыні перпендыкуляра, што злучае сярэдзіну ўтваральніка з пунктам на восі гэтага цела.

Доказ. Няхай ёсць конус з вяршыняй S , асновай якога з'яўляецца круг з цэнтрам O . Няхай SAB — восевае сячэнне конуса (рыс. 143). У плоскасці AOS да ўтваральніка AS з яго сярэдзіны C узвядзём перпендыкуляр, які

перасякае вось SO у пэўным пункце D . Прамавугольныя трохвугольнікі AOS і DCS падобныя, бо ў іх вугал пры вяршыні S агульны.

$$\text{Таму } \frac{OA}{OS} = \frac{CD}{CS}, \text{ або } \frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{2CS}, \text{ або } \frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{AS}.$$

$$\text{Адсюль } AS \cdot OA = 2OS \cdot CD.$$

З улікам гэтага для бакавой паверхні $S_{\text{бак}}$ конуса будзем мець:

$$S_{\text{бак}} = \pi \cdot AS \cdot OA = 2\pi \cdot OS \cdot CD.$$

Няхай ёсць усечаны конус, атрыманы вярчэннем прамавугольнай трапецыі O_1EGO_2 з сярэдняй лініяй HL вакол бакавой стараны O_1O_2 , якая перпендыкулярная асновам O_1E і O_2G , адрэзак EM — праекцыя EG на аснову O_1E (рыс. 144). У плоскасці O_1EG да ўтваральніка EG усечанага конуса з яго сярэдзіны H узвядзём перпендыкуляр, які перасякае вось O_1O_2 у пэўным пункце K . Прамавугольныя трохвугольнікі EGM і KHL падобныя, бо іх стораны папарна перпендыкулярныя. Таму:

$$\frac{HK}{HL} = \frac{EG}{GM} \quad \text{або} \quad \frac{HK}{HL} = \frac{EG}{O_1O_2}.$$

$$\text{Адсюль } EG \cdot HL = O_1O_2 \cdot HK.$$

З улікам гэтага для бакавой паверхні $S_{\text{бак}}$ усечанага конуса будзем мець:

$$S_{\text{бак}} = 2\pi \cdot EG \cdot HL = 2\pi \cdot O_1O_2 \cdot HK.$$

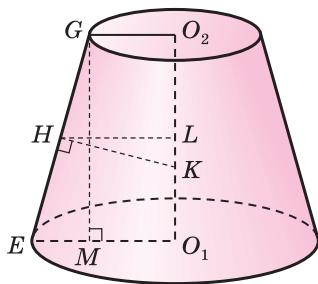
Для цыліндра сцверджанне відавочнае (рыс. 145).

Тэарэма 6. Паверхня сферы роўная пачацвяронай плошчы вялікага круга:

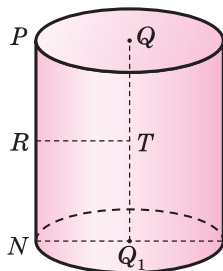
$$S = 4\pi R^2.$$



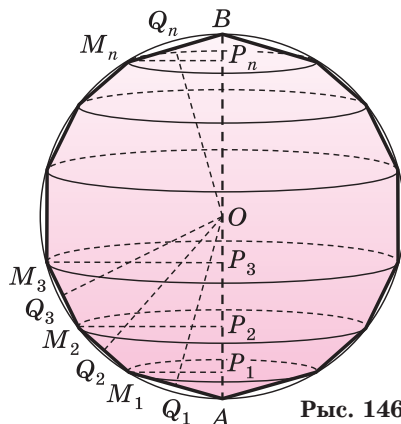
Доказ. Няхай ёсць сфера, утвораная вярчэннем паўакружнасці AB вакол дыяметра (рыс. 146). Умежым у дугу ломаную $AM_1M_2M_3...M_{n-1}M_nB$ з роўнымі звёнамі і з пунктаў $M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n$ апусцім перпендыкуляры $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ..., M_{n-1}P_{n-1}, M_nP_n$ на дыяметр AB .



Рыс. 144



Рыс. 145



Рыс. 146

Няхай $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ — сярэдзіны звёнаў ломанай. Тады $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \dots, OQ_{n-1}, OQ_n$ — пасярэднія перпендыкуляры да гэтых звёнаў. Пры вярчэнні вакол AB звёны ломанай будуць апісваць або конусы, або ўсечаныя конусы, або цыліндр. Таму, у адпаведнасці з тэарэмай 5, для ўтворанай паверхні S_n атрымаем:

$$S_n = 2\pi \cdot AP_1 \cdot OQ_1 + 2\pi \cdot P_1P_2 \cdot OQ_2 + 2\pi \cdot P_2P_3 \cdot OQ_3 + \dots + 2\pi \cdot P_{n-1}P_n \cdot OQ_{n-1} + 2\pi \cdot P_nB_n \cdot OQ_n.$$

Улічым, што адрэзкі $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \dots, OQ_{n-1}, OQ_n$ усе роўныя адзін аднаму, таму:

$$S_n = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot (AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n + P_nB) = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB.$$

Няхай радыус сферы роўны R . Тады $AB = 2R$.

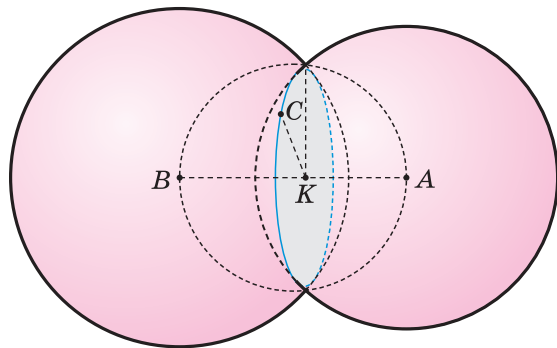
Будзем неабмежавана павялічваць колькасць звёнаў ломанай. Тады адрэзак OQ_1 будзе імкнуцца да радыуса сферы, а выраз $2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB$ — да выразу $2\pi \cdot R \cdot 2R$, г. зн. да выразу $4\pi R^2$. Гэты ліміт і прымаецца ў якасці плошчы паверхні сферы.

Улічыўшы, што πR^2 выражае плошчу вялікага круга, атрымаем, што паверхня сферы роўная пачацвяронай плошчы вялікага круга.



Прыклад 3. Дзве сферы перасякаюцца па акружнасці даўжынёй $4,8\pi$. Знайдзем плошчу трэцяй сферы, якая праходзіць праз цэнтры гэтых дзвюх сфер і лінію іх перасячэння, улічыўшы, што радыус адной з дадзеных сфер роўны 3.

Р а ш ę н н е. Няхай A і B — цэнтры перасякальных сфер, K — цэнтр акружнасці, па якой яны перасякаюцца, і C — пункт на лініі іх перасячэння (рыс. 147). Паколькі цэнтр шуканай сферы роўнаадлеглы ад кожнага пункта лініі перасячэння дадзеных акружнасцей, то ён належыць прамой AB . Таму AB — дыяметр трэцяй сферы і $\angle ACB = 90^\circ$. Плоскасць, у якой ляжыць лінія перасячэння дзвюх сфер, перпендыкулярная прамой AB , таму $KC \perp AB$ і KC — радыус агульнай акружнасці сфер. З умовы вынікае, што $2\pi \cdot KC = 4,8\pi$. Значыць, $KC = 2,4$.



Рыс. 147

Няхай адна з дадзеных сфер, напрыклад сфера з цэнтрам A , мае радыус 3. Тады з прамавугольнага трохвугольніка AKC знаходзім, што $AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8$.

Паколькі AK — праекцыя катэта AC на гіпатэнузу AB у прамавугольным трохвугольніку ABC , то $AB \cdot AK = AC^2$, адкуль $AB = \frac{AC^2}{AK} = \frac{3^2}{1,8} = 5$. У гэтым выпадку плошча трэцяй сферы роўная $\pi \cdot AB^2 = 25\pi$.

Адказ: 25π .



1. Якая паверхня называецца сферай, які пункт называецца цэнтрам сферы?
2. Які адрэзак называецца радыусам сферы; хордай сферы; дыяметрам сферы?
3. Па якой фігуры перасякаюцца сфера і плоскасць; дзве сферы?
4. Якое сячэнне сферы плоскасцю называюць вялікай акружнасцю, які круг называюць вялікім кругам?
5. Якая плоскасць называецца датычнай плоскасцю сферы, які пункт называецца пунктам дотыку плоскасці і сферы?
6. Якая прамая называецца датычнай прамой сферы?
7. Сфармулюйце ўласцівасць датычнай плоскасці сферы; прымету датычнай плоскасці сферы.
8. Сфармулюйце сцверджанне, што абагульняе сцверджанні пра бакавыя паверхні конуса, усечанага конуса і цыліндра.
9. Чаму роўная паверхня сферы?



Задача 1. Дзве паралельныя плоскасці, адлегласць паміж якімі роўная 9 см, перасякаюць сферу па акружнасцях з радыусамі 2 см і 7 см. Знайдзіце радыус сферы, улічыўшы, што плоскасці праходзяць па розныя бакі ад яе цэнтра.

Рашэнне. Няхай плоскасці α і β перасякаюць сферу з цэнтрам O па акружнасцях, радыусы O_1M і O_2N якіх роўныя 2 см і 7 см адпаведна (рыс. 148), прычым $O_1O_2 = 9$ см.

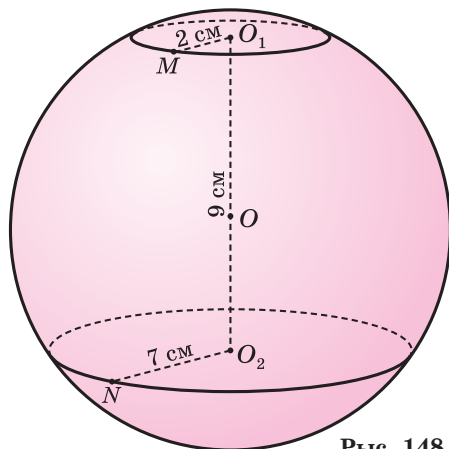
Паколькі $OO_1 \perp \alpha$, $OO_2 \perp \beta$ і $\alpha \parallel \beta$, то пункт O належыць адрэзку O_1O_2 . Няхай $OO_1 = a$, тады $OO_2 = 9 - a$,

$$OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2 = a^2 + 2^2, \quad ON^2 = OO_2^2 + O_2N^2 = (9 - a)^2 + 7^2.$$

$$\text{Таму } a^2 + 2^2 = (9 - a)^2 + 7^2.$$

$$\text{Адсюль знаходзім, што } a = 7, \text{ а } OM = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \text{ (см).}$$

$$\text{Адказ: } \sqrt{53} \text{ см.}$$



Рыс. 148

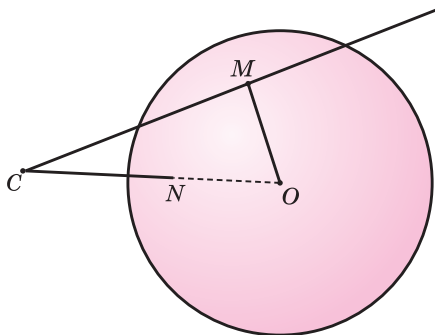


Рис. 149

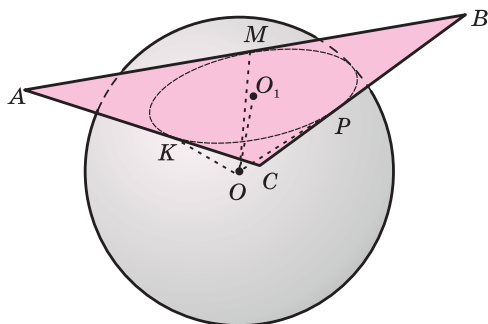


Рис. 150

Задача 2. З пункта C , адлеглага на 18 см ад сферы, праведзена датычная да яе. Знайдзіце даўжыню датычнай, улічыўшы, што дыяметр сферы роўны 14 см.

Рашэнне. Няхай пункт C знаходзіцца на адлегласці 18 см ад сферы з цэнтрам O і дыяметрам 14 см, CM — датычная прамая (рыс. 149). Найбліжэйшым да C пунктам сферы з'яўляецца пункт N адрэзка OC .

Паколькі $CM \perp OM$, то $\triangle CMO$ — прамавугольны, таму:

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{(ON + NC)^2 - OM^2} = \sqrt{(7 + 18)^2 - 7^2} = 24 \text{ (см)}.$$

Адказ: 24 см.

Задача 3. Трохвугольнік са старанамі 10, 10 і 12 датыкаецца да сферы з радыусам 5. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці трохвугольніка.

Рашэнне. Няхай $AB = 12$, $AC = BC = 10$, стораны AB , AC і BC трохвугольніка ABC датыкаюцца да сферы з цэнтрам O у пунктах M , K і P адпаведна, O_1 — аснова перпендыкуляра, праведзенага з пункта O да плоскасці ABC (рыс. 150). Паколькі радыусы сферы, праведзеныя ў пункты дотыку, перпендыкулярныя датычным, то $OM \perp AB$, $OK \perp AC$ і $OP \perp BC$. Па тэарэме пра тры перпендыкуляры, $O_1M \perp AB$, $O_1K \perp AC$ і $O_1P \perp BC$. Прамавугольныя трохвугольнікі OO_1M , OO_1K і OO_1P роўныя, бо маюць агульны катэт OO_1 і роўныя гіпатэнузы. Таму $O_1M = O_1K = O_1P$ і, значыць, O_1 — цэнтр акружнасці, умежанай у трохвугольнік ABC . Радыус r гэтай акружнасці знойдзем, выкарыстаўшы формулу $S_{\triangle} = pr$, у якой p — паўперыметр трохвугольніка, $S_{\triangle}$ — яго плошча.

Знойдзем паслядоўна паўперыметр трохвугольніка ABC , яго плошчу па формуле Герона, радыус r , а затым катэт OO_1 у прамавугольным трохвугольніку OO_1M з вядомай гіпатэнузай OM , роўнай 5, і знойдзеным другім катэтам O_1M , роўным r :

$$p = \frac{10+10+12}{2} = 16, S_{\triangle} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48, r = 48 : 16 = 3, OO_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Адказ: 4.



- 238.** Дакажыце, што:
- а) радыус r сячэння сферы плоскасцю праўдзіць умову $0 < r \leq R$, дзе R — радыус сферы;
 - б) радыусы сячэнняў сферы плоскасцямі, роўнаадлеглымі ад цэнтра сферы, роўныя адзін аднаму;
 - в) з двух сячэнняў большы радыус мае тое сячэнне, плоскасць якога размешчана бліжэй да цэнтра.
- 239.** Устаноўце, ці праўда, што:
- а) любыя два розныя пункты сферы вызначаюць яе адзіную вялікую акружнасць;
 - б) цэнтр сферы з'яўляецца цэнтрам яе сіметрыі;
 - в) любая прамая, якая праходзіць праз цэнтр сферы, з'яўляецца воссю сіметрыі сферы;
 - г) любая плоскасць, якая праходзіць праз цэнтр сферы, з'яўляецца плоскасцю сіметрыі сферы.
- 240.** Знайдзіце геаметрычнае месца:
- а) цэнтраў сфер, якім належаць вяршыні дадзенага трохвугольніка;
 - б) цэнтраў сфер дадзенага радыуса, якія датыкаюцца да граняў дадзенага двухграннага вугла.
- 241.** Вызначце ўзаемнае размяшчэнне сферы з цэнтрам O і радыусам R і плоскасці ABC , улічыўшы, што трохвугольнік ABC ёсць аснова трохвугольнай піраміды $OABC$ з вышынёй OH і:
- а) $R = 3$ дм, $OH = 30$ см; в) $R = 1$ дм, $OA = 9$ см;
 - б) $R = 6$ м, $OH = 190$ см; г) $R = 0,7$ дм, $OH = 8$ см.
- 242.** Знайдзіце даўжыню акружнасці, якая з'яўляецца:
- а) сячэннем сферы з радыусам 82 см плоскасцю, адлеглай ад цэнтра сферы на 18 см;
 - б) геаметрычным месцам пунктаў сферы з дыяметрам 25 см, адлеглых ад дадзенага пункта P гэтай сферы на 15 см.
- 243.** Вызначце, праз якія два пункты сферы можна правесці:
- а) бясконца многа вялікіх акружнасцей;
 - б) толькі адну вялікую акружнасць.
- 244.** Сфера з радыусам R высякае з плоскасці, адлеглай на d ад яе цэнтра, фігуру F . Знайдзіце:
- а) плошчу S фігуры F , улічыўшы, што $R = 18$ см, $d = 12$ см;
 - б) R , улічыўшы, што плошча фігуры F роўная 18π см², $d = 3$ см.
- 245.** Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці:
- а) прамавугольніка, вяршыні якога ляжаць на сферы з радыусам 30 см, а дыяганаль роўная 48 см;

- б) трохвугольніка, вяршыні якога ляжаць на сферы з радыусам 26 см, а стораны роўныя 12 см, 16 см і 20 см.
246. Знайдзіце даўжыню лініі перасячэння сфер, радыусы якіх роўныя 25 дм і 29 дм, а адлегласць паміж цэнтрамі — 36 дм.
247. Вяршыні прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 18 см і 24 см ляжаць на сферы. Вызначце:
- размяшчэнне цэнтра сферы, радыус якой роўны 15 см;
 - адлегласць ад цэнтра сферы з радыусам 65 см да плоскасці трохвугольніка.
248. Праз канец дыяметра сферы з радыусам R праведзена сечная плоскасць пад вуглом α да дыяметра. Знайдзіце даўжыню атрыманага сячэння, улічыўшы, што:
- $R = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 - $R = 5$ м, $\alpha = 45^\circ$.
249. Праз сярэдзіну радыуса R сферы перпендыкулярна яму праведзена сечная плоскасць. Знайдзіце:
- радыус атрыманага сячэння;
 - плошчу бакавой паверхні і аб'ём конуса, вяршыняй якога з'яўляецца цэнтр сферы, а асновай — атрыманае сячэнне.
250. Знайдзіце геаметрычнае месца праекцый пункта A на ўсе плоскасці, якія можна правесці праз пункт B .
251. Дакажыце, што вяршыні двух прамавугольнікаў, якія ляжаць у розных плоскасцях і маюць агульную старану, належаць адной сферы.
252. Знайдзіце радыус акружнасці, па якой перасякаюцца сферы, улічыўшы, што іх радыусы роўныя R , а адлегласць паміж цэнтрамі — $1,6R$.
253. Сярэдні радыус Зямлі роўны 6371 км. Вызначце, які шлях праходзіць за гадзіну ў выніку вярчэння Зямлі вакол сваёй восі горад:
- Магілёў, які знаходзіцца на $53^\circ 54'$ паўночнай шыраты;
 - Бялынічы, які знаходзіцца на $53^\circ 55'$ паўночнай шыраты;
 - Віцебск, які знаходзіцца на $55^\circ 12'$ паўночнай шыраты;
 - Брэст, які знаходзіцца на $52^\circ 06'$ паўночнай шыраты.
254. Сярэдні радыус Зямлі роўны 6371 км. Тэлевізійныя хвалі распаўсюджваюцца па прамой. Вызначце, на якой адлегласці можна прыняць тэлеперадачу, улічыўшы, што вышыня тэлевізійнай вежы станцыі роўная:
- 150 м;
 - 308 м;
 - 537 м.
255. Пры перасячэнні сферы з радыусам 14 см з двума плоскасцямі ўтвараюцца дзве роўныя акружнасці з агульнай хордай 4 см (рыс. 151). Знайдзіце радыус акружнасцей.

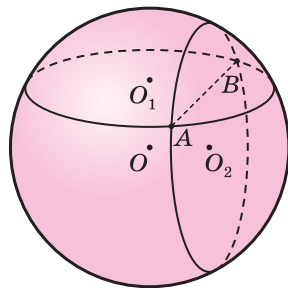


Рис. 151

256. Пункт M адлеглы на 16 см ад найбліжэйшага пункта сферы з радыусам 10 см. Знайдзіце даўжыню такой акружнасці на сферы, усе пункты якой адлеглыя ад пункта M на 24 см.

257*. Вяршыня конуса належыць сферы, яго вось праходзіць праз цэнтр, а ўтваральнік перасякае паверхню сферы. Знайдзіце паверхню часткі конуса, размешчанай унутры сферы, улічыўшы, што радыус сферы роўны 12 см, а вугал пры вяршыні восевага сячэння конуса — 30° .



258*. На сферы з радыусам R выбраны такія пункты A , B , C і D , што $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$ і $AD = BD = CD$. Знайдзіце:



а) хорды AB і AD ; б) плошчу сячэння сферы плоскасцю ABC .

259. Пункт M знаходзіцца ў плоскасці, якая датыкаецца да сферы з радыусам R у пункце A . Знайдзіце найменшую і найбольшую адлегласці ад пункта M да пунктаў сферы, улічыўшы, што:

а) $MA = 15$ см і $R = 112$ см; б) $MA = 16$ см і $R = 63$ см.

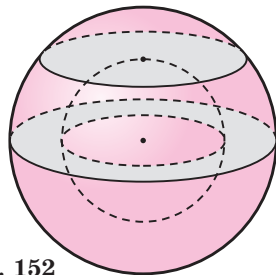
260*. Ёсць цела, абмежаванае дзвюма сферамі з агульным цэнтрам.



Дакажыце, што плошча яго сячэння плоскасцю, якая праходзіць праз цэнтр сфер, роўная плошчы фігуры F , што высякае знешняя сфера з плоскасці, датычнай да ўнутранай сферы (рыс. 152).

261. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра да плоскасці трохвугольніка, стораны якога датыкаюцца да сферы з радыусам 5 см і роўныя 13 см, 14 см і 15 см.

262. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы з радыусам 10 см да плоскасці ромба, дыяганалі якога роўныя 15 см і 20 см, а ўсе стораны датыкаюцца да сферы.



Рыс. 152

263. Сфера датыкаецца да старон трохвугольніка з даўжынямі 10 см, 10 см і 12 см, а яе цэнтр адлеглы на 13 см ад вяршыні большага вугла. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра сферы да плоскасці трохвугольніка.

264. Праз пункт сферы з радыусам R праведзены дзве плоскасці, з якіх адна датыкаецца да сферы, а другая нахілена да яе пад вуглом φ . Знайдзіце даўжыню акружнасці сячэння.



265. Знайдзіце радыус сферы і адлегласць паміж пунктамі яе дотыку да граняў двухграннага вугла велічынёй 120° , улічыўшы, што цэнтр сферы адлеглы на a ад канта вугла.



266. Прамая адлеглая на d ад цэнтра сферы з радыусам R . Дакажыце, што:



а) калі $d < R$, то прмая перасякае сферу ў двух пунктах;

б) калі $d = R$, то прмая мае толькі адзін агульны пункт са сферай;

в) калі $d > R$, то прмая не мае са сферай агульных пунктаў.

267. Перпендыкулярныя плоскасці так перасякаюць сферу, што атрыманыя сячэнні маюць адзіны агульны пункт, а іх радыусы роўныя r_1 і r_2 . Знайдзіце паверхню сферы.



268. Знайдзіце плошчу сферы, радыус якой роўны:

- а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

269. Дакажыце, што:



- а) паверхні сфер прапарцыянальныя квадратам іх радыусаў;
 б) поўная паверхня цыліндра, атрыманага пры вярчэнні квадрата вакол прамой, якая змяшчае адну з яго старон, роўная плошчы сферы, радыус якой роўны старане квадрата;
 в) плошча сферы роўная плошчы поўнай паверхні конуса, восевае сячэнне якога ёсць роўнастаронні трохвугольнік з вышынёй, роўнай дыяметру сферы.

270. Знайдзіце паверхню сферы, улічыўшы, што:

- а) даўжыня вялікай акружнасці роўная $6\sqrt{2}\pi$ м;
 б) радыусы двух яе паралельных сячэнняў, адлеглых на 3 см, роўныя 9 см і 12 см.

271. Знайдзіце радыус:

- а) сферы, паверхня якой роўная 324π см²;
 б) круга, плошча якога роўная паверхні сферы з радыусам 5 м.

272. Вызначце, колькі скуры пойдзе на пакрыццё футбольнага мяча з радыусам 10 см, дадаўшы на швы 8 % плошчы паверхні мяча.

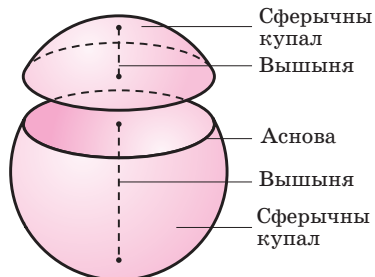
273. Сярэдні радыус Зямлі роўны 6371 км. Знайдзіце:



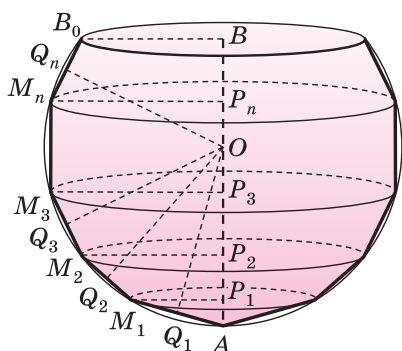
- а) плошчу сушы, улічыўшы, што вада пакрывае прыкладна $\frac{3}{4}$ зямной паверхні;
 б) даўжыню тропіка, шырата якога роўная $23^\circ 27'$;
 в) даўжыню палярнага круга, шырата якога роўная $66^\circ 33'$;
 г) даўжыню паралелі, на якой размешчаны Мінск ($53^\circ 56'$ паўночнай шыраты).



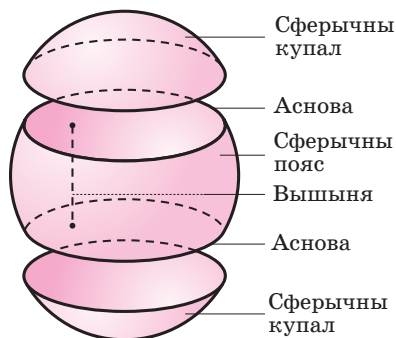
274*. Сечная плоскасць раздзяляе сферу на дзве паверхні (рыс. 153), кожная з якіх называецца *сферычным купалам*. Акружнасць сячэння называецца *асновай купала*. Кожны з адрэзкаў, на якія сечная плоскасць раздзяляе перпендыкулярны ёй дыяметр сферы, называецца *вышынёй* адпаведнага *сферычнага купала*.



Рыс. 153



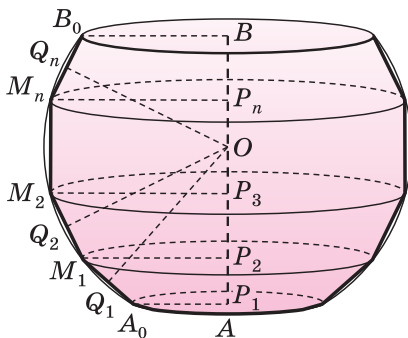
Рыс. 154



Рыс. 155

Дакажыце, што паверхня сферычнага купала роўная здабытку яго вышыні і даўжыні акружнасці вялікага круга (рыс. 154).

- 275*.** Дзве паралельныя сечныя плоскасці раздзяляюць сферу на два купалы і яшчэ адну паверхню (рыс. 155), якую называюць *сферычным поясам*. Акружнасці сячэнняў называюцца *асновамі сферычнага пояса*. Перпендыкуляр, апущаны з адной сечнай плоскасці на другую, называюць *вышынёй сферычнага пояса*. Дакажыце, што паверхня сферычнага пояса роўная здабытку яго вышыні і даўжыні акружнасці вялікага круга (рыс. 156).



Рыс. 156

- 276*.** радыус сферычнага купала роўны r , а дуга восевага сячэння — α . Знайдзіце:
а) даўжыню акружнасці асновы купала; б) вышыню купала.
- 277*.** радыус сферычнага пояса роўны r , а вуглы, пад якімі бачныя з цэнтра сферы дыяметры яго асноў, — α і β . Знайдзіце вышыню пояса.
- 278*.** Асновы сферычнага пояса роўныя $144\pi \text{ см}^2$ і $25\pi \text{ см}^2$, а яго вышыня — 17 см. Знайдзіце радыус сферы.
- 279*.** Знайдзіце паверхню сферычнага пояса, радыусы асноў якога роўныя:
а) 16 см і 33 см, а вышыня — 7 см;
б) 20 м і 24 м, а радыус сферы — 25 м.
- 280*.** Знайдзіце паверхню сферычнага купала, у якога:
а) радыус асновы роўны r , а дуга восевага сячэння — 90° ;
б) радыус асновы роўны r , а дуга восевага сячэння — 60° ;
в) вышыня роўная h , а дуга восевага сячэння — 120° .



§ 6. Шар

А) Шарам называецца цела, атрыманае вярчэннем круга вакол якога-небудзь яго дыяметра (рыс. 157).

Мяжой шара з'яўляецца сфера. Цэнтр, радыус, дыяметр сферы называюць таксама *цэнтрам*, *радыусам*, *дыяметрам шара* адпаведна. Адлегласць ад цэнтра шара да любога яго пункта не большая за радыус шара.

Сячэннем шара плоскасцю з'яўляецца круг, радыус якога змяняецца ў межах ад нуля да радыуса шара (рыс. 158).

Каб абгрунтаваць формулу для вылічэння аб'ёму шара, дакажам спачатку два дапаможныя факты, карысныя і самі па сабе.

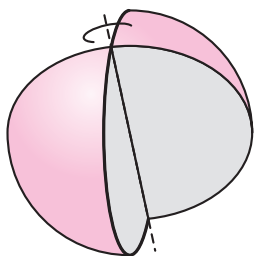


Рис. 157

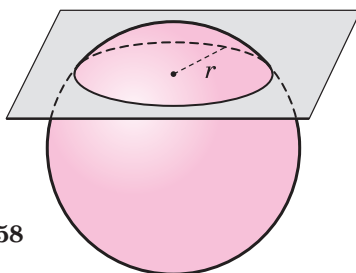


Рис. 158



Тэарэма 7. Аб'ём цела, атрыманага вярчэннем трохвугольніка вакол прамой, што ляжыць у плоскасці трохвугольніка, праходзіць праз яго вяршыню і не мае з трохвугольнікам агульных унутраных пунктаў, роўны трэцяй долі здабытку паверхні, утворанай стараной, што ляжыць супраць той вяршыні трохвугольніка, якая належыць восі вярчэння, і вышыні, праведзенай да гэтай стараны.



Доказ. Няхай ёсць цела, атрыманае вярчэннем трохвугольніка ABC вакол прамой l , што ляжыць у плоскасці трохвугольніка, праходзіць праз яго вяршыню і не мае з трохвугольнікам агульных унутраных пунктаў. Няхай вяршыня C належыць восі l , а CE — вышыня, праведзеная да стараны AB , супрацьлеглай вяршыні C . Дакажам, што аб'ём V цела вярчэння роўны $\frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE$, дзе S_{AB} абазначае

паверхню, утвораную вярчэннем стараны AB .

Няхай старана AC ляжыць на восі вярчэння l і BD — перпендыкуляр, апущаны з вяршыні B на прамую l (рыс. 159). Тады стараны AB і CB апішуць паверхні двух конусаў з радыусам BD асноў і вышынямі DA і DC адпаведна. Для аб'ёму V цела вярчэння атрымаем:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot DA + \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot DC = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot (DA + DC) = \frac{1}{3} \pi \cdot BD \cdot BD \cdot AC.$$

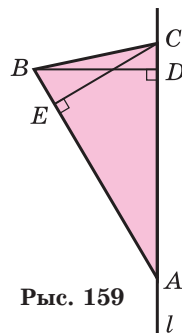


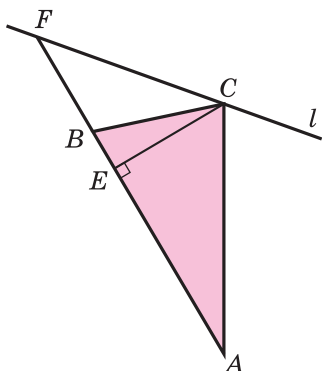
Рис. 159

Цяпер звернем увагу на тое, што $BD \cdot AC = AB \cdot CE$, бо кожны з гэтых здабыткаў выражае падвоеную плошчу трохвугольніка ABC . Таму:

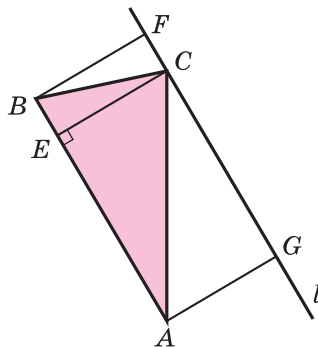
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot BD \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{3} (\pi \cdot BD \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE.$$

Няхай старана AC не ляжыць на восі вярчэння l , а супрацьлеглая ёй старана AB не паралельная гэтай восі (рыс. 160). Тады прамая AB перасякае вось l у пэўным пункце F і аб'ём V цела вярчэння роўны рознасці аб'ёмаў цел, атрыманых вярчэннем трохвугольнікаў CAF і CBF . Улічыўшы гэта і тое, што старана CF гэтых трохвугольнікаў належыць восі вярчэння, для аб'ёму V атрымаем:

$$V = \frac{1}{3} S_{AF} \cdot CE - \frac{1}{3} S_{BF} \cdot CE = \frac{1}{3} (S_{AF} - S_{BF}) \cdot CE = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE.$$



Рыс. 160



Рыс. 161

Няхай старана AC не ляжыць на восі вярчэння l , а супрацьлеглая ёй старана AB паралельная гэтай восі (рыс. 161). З пунктаў A і B апусцім перпендыкуляры AG і BF на вось вярчэння l . Аб'ём V цела вярчэння можна атрымаць, адняўшы ад аб'ёму цыліндра, атрыманага вярчэннем прамавугольніка $ABFG$, аб'ёмы двух конусаў, атрыманых вярчэннем трохвугольнікаў CBF і CAG . Таму:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \left(\frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot CF + \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot CG \right) = \\ &= \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot (CF + CG) = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot AB = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot CE^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot (2\pi \cdot CE \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE, \end{aligned}$$

бо выраз $2\pi \cdot CE \cdot AB$ задае паверхню, утвораную вярчэннем стараны AB .



Тэарэма 8. Аб'ём цела, атрыманага вярчэннем кругавога сектара вакол прамой, што праходзіць праз яго цэнтр, ляжыць у яго плоскасці і не мае з ім агульных унутраных пунктаў, роўны трэцяй долі здабытку радыуса сектара і паверхні, утворанай пры вярчэнні дугі сектара.



Доказ. Няхай ёсць цела, атрыманае вярчэннем кругавога сектара AOB з радыусам R вакол прамой l , якая праходзіць праз цэнтр сектара O і не мае з ім агульных унутраных пунктаў. Умежым угэты сектар ломаную $AA_1A_2\dots A_{n-1}A_nB$ з роўнымі звёнамі (рыс. 162). Аб'ём цела, атрыманага вярчэннем гэтай ломанай вакол прамой l , роўны суме аб'ёмаў цел, атрыманых вярчэннем трохвугольнікаў $AOA_1, A_1OA_2, \dots, A_{n-1}OA_n, A_nOB$. Няхай $OC, OC_1, \dots, OC_n$ — вышыні гэтых трохвугольнікаў. Прымяняўшы тэарэму 7, атрымаем:

$$V = \frac{1}{3} S_{AA_1} \cdot OC + \frac{1}{3} S_{A_1A_2} \cdot OC_1 + \dots + \frac{1}{3} S_{A_nB} \cdot OC_n.$$

Але $OC = OC_1 = \dots = OC_n$. Таму:

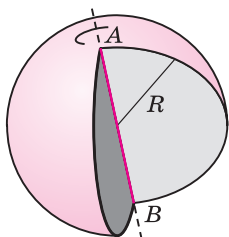
$$V = \frac{1}{3} (S_{AA_1} + S_{A_1A_2} + \dots + S_{A_nB}) \cdot OC = \frac{1}{3} S_n \cdot OC,$$

дзе S_n — паверхня, утвораная пры вярчэнні мнагазвённай ломанай.

Будзем павялічваць колькасць старон ломанай, умежанай у кругавы сектар AOB . Тады вышыня OC будзе імкнуцца да радыуса R , а паверхня S_n — да паверхні $S_{\cup AB}$, утворанай пры вярчэнні дугі AB . Таму аб'ём V імкнецца да выразу $\frac{1}{3} S_{\cup AB} \cdot R$, які і прымаецца ў якасці аб'ёму цела,

утворанага вярчэннем кругавога сектара AOB вакол прамой l , што праходзіць праз цэнтр сектара O і не мае з ім агульных унутраных пунктаў.

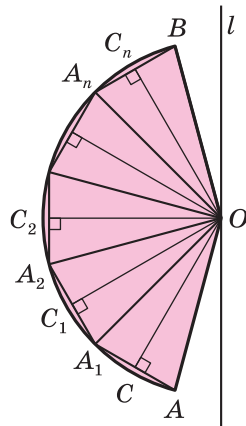
Вынік 1. Аб'ём шара роўны трэцяй долі здабытку яго паверхні і радыуса: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.



Рыс. 163

Сапраўды, шар з радыусам R можна разглядаць як цела, утворанае вярчэннем сектара-паўкруга вакол дыяметра (рыс. 163). Тады адпаведная акружнасць утворае сферу. У адпаведнасці з тэарэмай 8 атрымаем:

$$V = \frac{1}{3} S_{\cup AB} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

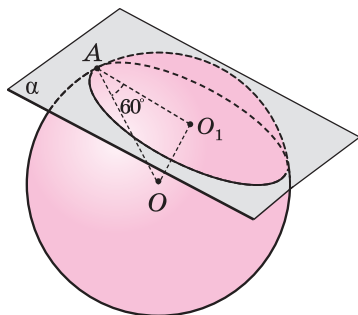


Рыс. 162

Прыклад 1. Плоскасць, праведзеная праз канец радыуса шара, утварае з ім вугал 60° . Знайдзем аб'ём шара, улічыўшы, што плошча атрыманага сячэння роўная 9π .

Рашэнне. Няхай плоскасць α праходзіць праз канец A радыуса шара з цэнтрам O , OO_1 — перпендыкуляр, праведзены з цэнтра шара да плоскасці α (рыс. 164). Тады O_1A — праекцыя радыуса OA на плоскасць α , $\angle OAO_1 = 60^\circ$ і $O_1A = OA \cos 60^\circ = 0,5 OA$. Паколькі па ўмове $\pi O_1A^2 = 9\pi$, то $O_1A = 3$, $OA = 6$ і аб'ём шара $V = \frac{4}{3}\pi OA^3 = 288\pi$.

Адказ: 288π .



Рыс. 164



В) Разгледзім камбінацыі шара з іншымі цэламі.

Умежаным у шар мнагаграннікам называецца мнагаграннік, усе вяршыні якога ляжаць на адпаведнай сферы (рыс. 165).

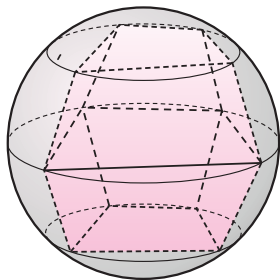
Апісаным каля шара мнагаграннікам называецца мнагаграннік, усе грані якога датыкаюцца да адпаведнай сферы (рыс. 166).

Прыклад 2. Шар умежаны ў правільную чатырохвугольную прызму з аб'ёмам V . Знайдзем аб'ём шара.

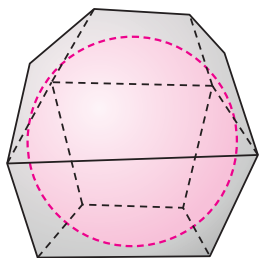
Рашэнне. Плоскасць, праведзеная перпендыкулярна бакавому канту праз яго сярэдзіну, праходзіць праз цэнтр O умежанага шара і перасякае яго па вялікім крузе, умежаным у прамавугольнік $ABCD$, што з'яўляецца сячэннем прызмы (рыс. 167). Паколькі стораны гэтага прамавугольніка роўныя дыяметру шара, то сячэннем прызмы з'яўляецца квадрат. Няхай радыус шара роўны r . Тады і бакавы кант, і кант асновы прызмы роўныя дыяметру шара, г. зн. $2r$.

Таму $V = (2r)^2 \cdot 2r = 8r^3$. Значыць, $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} \cdot 8r^3 = \frac{\pi}{6} V$.

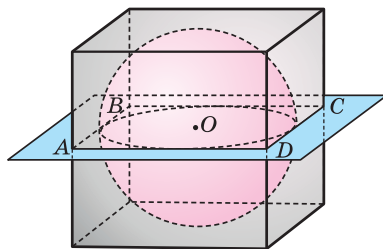
Адказ: $\frac{\pi}{6} V$.



Рыс. 165



Рыс. 166



Рыс. 167

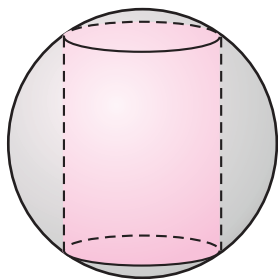


Рис. 168

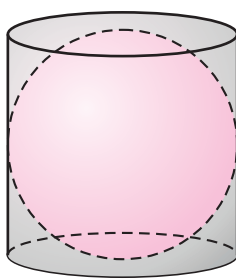


Рис. 169

Умежаным у шар цыліндрам называецца цыліндр, акружнасці асноў якога належаць адпаведнай сферы (рис. 168).

Апісаным каля шара цыліндрам называецца цыліндр, асновы і ўсе ўтваральнікі якога датыкаюцца да адпаведнай сферы (рис. 169).

Прыклад 3. Шар умежаны ў цыліндр з аб'ёмам V . Знойдзем аб'ём шара.

Рашэнне. Плоскасць, праведзеная праз вось OO_1 цыліндра, праходзіць праз цэнтр Q умежанага шара і перасякае яго па вялікім крузе, умежаным у прамавугольнік $KILJ$, што з'яўляецца восевым сячэннем цыліндра (рис. 170). Паколькі стораны гэтага прамавугольніка роўныя дыяметру шара, то радыус асновы цыліндра роўны радыусу r шара, а вышыня цыліндра складае $2r$. Таму $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

$$\text{Тады } V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{2}{3} V.$$

$$\text{Адказ: } \frac{2}{3} V.$$

Умежаным у шар конусам называецца конус, вяршыня і акружнасць асновы якога належаць адпаведнай сферы (рис. 171).

Апісаным каля шара конусам называецца конус, аснова і ўсе ўтваральнікі якога датыкаюцца да адпаведнай сферы (рис. 172).

Прыклад 4. Шар апісаны каля конуса з аб'ёмам V . Знойдзем аб'ём шара, улічыўшы, што восевае сячэнне конуса — роўнастаронні трохвугольнік.

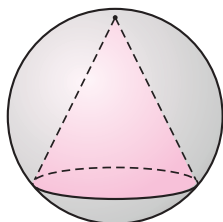


Рис. 171

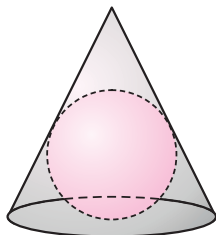


Рис. 172

Рашэнне. Плоскасць, праведзеная праз вось OO_1 конуса, праходзіць праз цэнтр Q апісанага шара і перасякае яго па вялікім крузе, апісаным каля роўнастаронняга трохвугольніка O_1AB , што з'яўляецца сячэннем конуса (рис. 173).

Няхай радыус шара роўны r . Тады радыус асновы

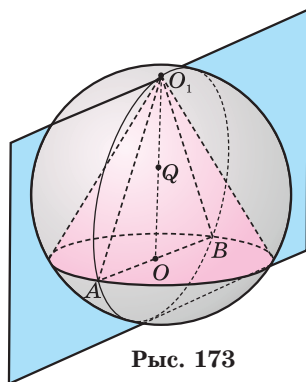
і вышыня конуса адпаведна роўныя $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{3r}{2}$,

а яго аб'ём:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3\pi r^3}{8} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{9}{32} V_{\text{ш}}.$$

Таму $V_{\text{ш}} = \frac{32}{9} V.$

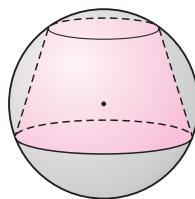
Адказ: $\frac{32}{9} V.$



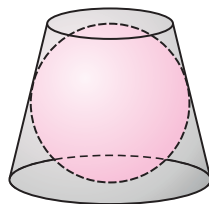
Рыс. 173

Умежаным у шар усечаным конусам называецца ўсечаны конус, акружнасці асноў якога належаць адпаведнай сферы (рыс. 174).

Апісаным каля шара усечаным конусам называецца конус, асновы і ўсе ўтваральнікі якога датыкаюцца да адпаведнай сферы (рыс. 175).



Рыс. 174



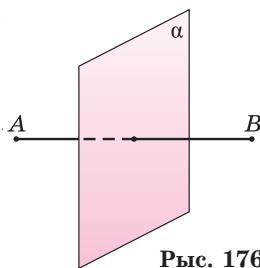
Рыс. 175

Тэарэма 9. Каля кожнай трохвугольнай піраміды можна апісаць адзіны шар.

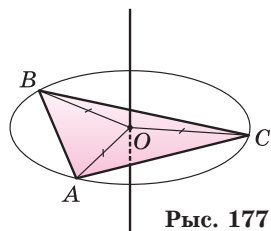
Доказ. Спачатку звернем увагу на тое, што геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадлеглых ад канцоў адрэзка, ёсць плоскасць, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка і перпендыкулярная яму (рыс. 176). Яна называецца *пасярэдняй плоскасцю адрэзка*.

Геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадлеглых ад вяршынь трохвугольніка, ёсць прамая, якая праходзіць праз цэнтр апісанай каля трохвугольніка акружнасці і перпендыкулярная яе плоскасці (рыс. 177).

Няхай ёсць трохвугольная піраміда $ABCD$ (рыс. 178). Праз цэнтр O_1 акружнасці, апісанай каля грані ABC , правядзём прамую l , перпендыкулярную плоскасці гэтай грані. Усе пункты прамой l роўнаадлеглыя ад вяршынь A, B, C . Пабудуем пасярэдняю плоскасць α адрэзка AD , яна перасячэ прамую l у пэўным пункце O . Вяршыні A і D роўнаадлеглыя ад пункта O . А паколькі вяршыні A, B, C роўнаадлеглыя ад пункта O , то ўсе чатыры вяршыні A, B, C, D роўнаадлеглыя ад пункта O . Атрымалі, што ўсе



Рыс. 176



Рыс. 177

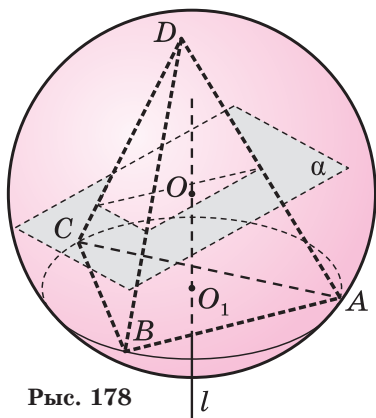


Рис. 178

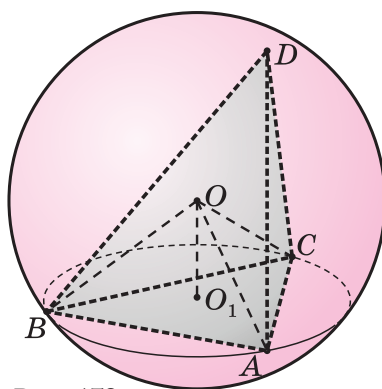


Рис. 179

вершині піраміди $ABCD$ належать сфери з центром O , а гэта азначае, што шар з центром O і радіусом OA ёсць шар, апісаны каля піраміды $ABCD$.

Адзінасць знойдзенага шара вынікае з таго, што прамая l і яе пункт O вызначаюцца адназначна.

Вынік 2. Чатыры пункты прасторы, якія не лягаць у адной плоскасці, вызначаюць адзіную сферу, адзіны шар.

Прыклад 5. У трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AD = 30$ і $AD \perp (ABC)$. Знойдзем радыус шара, апісанага каля піраміды $ABCD$.

Р а ш е н н е. Няхай OO_1 — перпендыкуляр, апущаны з цэнтра O апісанага шара на плоскасць ABC (рыс. 179). Паколькі нахіленыя OA , OB , OC роўныя як радыусы шара, то роўныя і іх праекцыі на плоскасць ABC . Значыць, $O_1A = O_1B = O_1C$. Таму O_1 — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC . Знойдзем паслядоўна плошчу трохвугольніка ABC па формуле Герона і радыус O_1A апісанай акружнасці:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{10+10+12}{2} \cdot \frac{10+10-12}{2} \cdot \frac{10-10+12}{2} \cdot \frac{10-10+12}{2}} = 48,$$

$$O_1A = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4}.$$

Паколькі $AD \parallel OO_1$, $OO_1 \perp O_1C$ і $OA = OD$, то $OO_1 = \frac{1}{2} AD = 15$.

З прамавугольнага трохвугольніка AO_1O знаходзім:

$$OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{65}{4}.$$

Адказ: $\frac{65}{4}$.

Тэарэма 10. У кожную трохвугольную піраміду можна ўмежыць адзіны шар.

Доказ. Спачатку звернем увагу на тое, што геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадлеглых ад граняў двухграннага вугла, ёсць паўплоскасць, мяжа якой супадае з кантам двухграннага вугла і якая дзеліць гэты вугал папалам (рыс. 180). Яна называецца *бісектарнай паўплоскасцю вугла*.

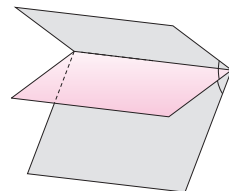


Рис. 180

Няхай ёсць трохвугольная піраміда $ABCD$ (рыс. 181). Правядзём бісектарныя паўплоскасці двухгранных вуглоў AB і AC . Прамень l , па якім яны перасякаюцца, складаецца з тых пунктаў прасторы, якія знаходзяцца на аднолькавых адлегласцях ад граняў ABD і ABC , ABC і ACD , г. зн. ад трох граняў ABD , ABC і ACD . Бісектарная паўплоскасць двухграннага вугла CD перасякае прамень l у пэўным пункце O . Пункт O знаходзіцца на адлегласці r як ад грані ACD , так і ад грані BCD . Таму адлегласць ад пункта O да кожнай грані піраміды $ABCD$ роўная r . Гэта азначае, што шар з цэнтрам O і радыусам r датыкаецца да кожнай грані піраміды $ABCD$, ён з'яўляецца ўмежаным у піраміду $ABCD$.

Адзінасць знойдзенага шара вынікае з таго, што прамая l і яе пункт O вызначаюцца адназначна.



Тэарэма 11. Аб'ём апісанага каля шара мнагагранніка роўны трэцяй долі здабытку поўнай паверхні мнагагранніка і радыуса шара:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{поўн}} \cdot r.$$

Доказ*. Няхай ёсць мнагаграннік, апісаны каля шара (рыс. 182). Цэнтр шара злучым з усімі вяршынямі мнагагранніка. Калі мнагаграннік мае n граняў, то ўтвараецца n пірамід, для якіх цэнтр шара з'яўляецца агульнай вяршыняй, асновы складаюць паверхню мнагагранніка, а самі

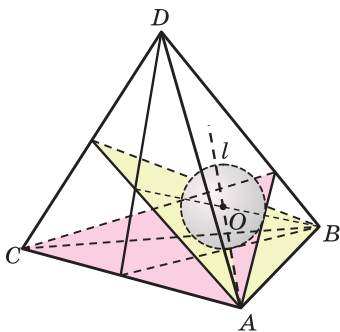


Рис. 181

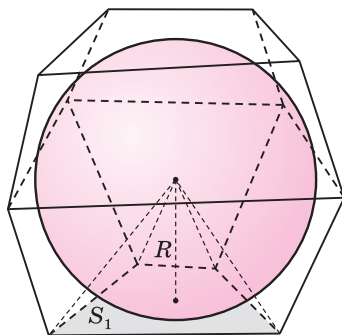


Рис. 182

піраміды разам складаюць мнагаграннік. Асновы вышынь гэтых пірамід супадаюць з пунктамі дотыку, таму самі вышыні ўсе роўныя радыусу r шара.

Няхай плошчы граняў мнагагранніка роўныя $S_1, S_2, \dots, S_n$. Тады для аб'ёму V мнагагранніка, які роўны суме аб'ёмаў пірамід, атрымаем:

$$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{3}S_n \cdot r = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \frac{1}{3}Sr,$$

дзе S — поўная паверхня мнагагранніка.

Прыклад 6. $ABCD$ — трохвугольная піраміда, у якой $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AD = 24$ і $AD \perp (ABC)$. Знайдзем радыус шара, умежанага ў піраміду $ABCD$.

Рашэнне. Спачатку вызначым поўную паверхню і аб'ём піраміды $ABCD$.

Няхай AM — вышыня трохвугольніка ABC (рыс. 183). Паколькі $AB = AC$, то $BM = MC = 6$. Знаходзім AM з прамавугольнага трохвугольніка ABM :

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$\text{Цяпер } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = 48,$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AD = 384.$$

Прамавугольныя трохвугольнікі ABD і ACD з роўнымі катэтамі маюць аднолькавыя плошчы:

$$S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = 120.$$

Каб знайсці плошчу трохвугольніка BCD , улічым, што ён праектуецца ў трохвугольнік ABC і вугал паміж плоскасцямі BCD і ABC вымяраецца вуглом AMD . З прамавугольнага трохвугольніка AMD знаходзім:

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10}.$$

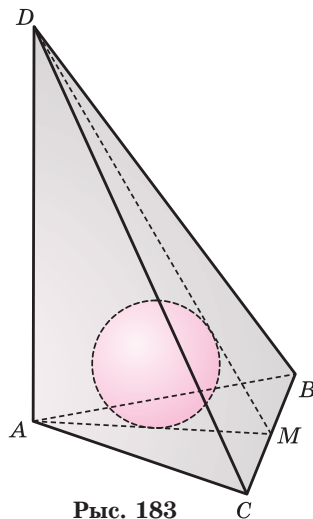
$$\text{Таму } S_{BCD} = \frac{S_{ABC}}{\cos \angle AMD} = 48\sqrt{10}. \text{ Значыць:}$$

$$S_{\text{поўн}} = S_{ABC} + 2S_{ACD} + S_{BCD} = 48 + 120 + 120 + 48\sqrt{10} = 288 + 48\sqrt{10}.$$

Таму:

$$r = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\text{поўн}}} = \frac{3 \cdot 384}{288 + 48\sqrt{10}} = \frac{12 \cdot (6 - \sqrt{10})}{13}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{12 \cdot (6 - \sqrt{10})}{13}.$$



Рыс. 183



1. Якое цела называецца шарам і які пункт называецца цэнтрам шара?
2. Які адрэзак называецца радыусам шара; хордай шара; дыяметрам шара?
3. Па якой фігуры перасякаюцца шар і плоскасць?
4. Сфармулюйце сцверджанне пра аб'ём цела, атрыманага вярчэннем трохвугольніка вакол прамой, што ляжыць у плоскасці трохвугольніка, праходзіць праз яго вяршыню і не мае з трохвугольнікам агульных унутраных пунктаў.
5. Чаму роўны аб'ём шара?
6. Які мнагаграннік называецца ўмежаным у шар; апісаным каля шара?
7. Які шар называецца ўмежаным у мнагаграннік; апісаным каля мнагагранніка?
8. Які цыліндр называецца ўмежаным у шар; апісаным каля шара?
9. Які шар называецца ўмежаным у цыліндр; апісаным каля цыліндра?
10. Які конус называецца ўмежаным у шар; апісаным каля шара?
11. Які шар называецца ўмежаным у конус; апісаным каля конуса?
12. Які ўсечаны конус называецца ўмежаным у шар; апісаным каля шара?
13. Які шар называецца ўмежаным ва ўсечаны конус; апісаным каля ўсечанага конуса?
14. Якая плоскасць называецца пасярэдняй плоскасцю адрэзка; бісектарнай плоскасцю двухграннага вугла?
15. У якім пункце знаходзіцца цэнтр шара, апісанага каля трохвугольнай піраміды; цэнтр шара, умежанага ў трохвугольную піраміду?
16. Якімі пунктамі прасторы вызначаецца сфера?
17. Якой залежнасцю звязаны аб'ём шара і паверхня апісанага каля яго мнагагранніка?



Задача 1. Пункты A , B , C на паверхні шара выбраны так, што папарныя адлегласці паміж імі ўсе роўныя $18\sqrt{3}$ см, а плоскасць ABC праходзіць на адлегласці 24 см ад цэнтра O шара. Знайдзіце радыус шара.

Рашэнне. Няхай O_1 — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта O на плоскасць ABC (рыс. 184).

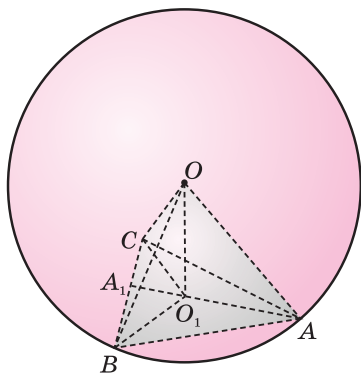
Тады $O_1A = O_1B = O_1C$ як праекцыі роўных нахіленых радыусаў OA , OB , OC . Няхай AA_1 — вышыня трохвугольніка ABC . Знойдзем радыус O_1A круга, апісанага каля трохвугольніка ABC :

$$O_1A = \frac{2}{3} AA_1 = \frac{2}{3} AB \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \text{ (см)}.$$

Цяпер з трохвугольніка AOO_1 знойдзем радыус OA шара:

$$OA = \sqrt{O_1A^2 + O_1O^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30 \text{ (см)}.$$

Адказ: 30 см.



Рыс. 184



Задача 2. Вышыня правільнай шасцівугольнай прызмы роўная 10 см, а дыяганаль яе бакавой грані — 14 см. Знайдзіце аб'ём апісанага шара.

Рашэнне. Цэнтр O шара, апісанага каля правільнай прызмы, знаходзіцца на сярэдзіне адрэзка, што злучае цэнтры O_1 і O_2 асноў прызмы (рыс. 185). Паколькі $AB \perp AA_1$, то:

$$AB = \sqrt{A_1B^2 - A_1A^2} = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} \text{ (см)}, \quad OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 5 \text{ см.}$$

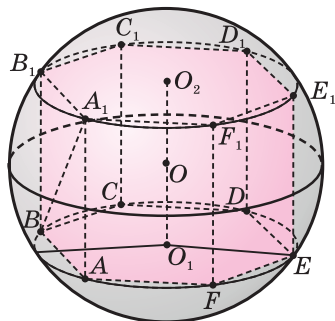
$\triangle O_1AB$ — правільны, таму $AO_1 = AB$.

$$OO_1 \perp O_1A,$$

$$\text{таму } r = OA = \sqrt{O_1O^2 + O_1A^2} = \sqrt{5^2 + 96} = 11 \text{ (см).}$$

$$\text{Значыць, } V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = \frac{5324\pi}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{5324\pi}{3} \text{ см}^3.$$



Рыс. 185



Задача 3. У шар умежаны цыліндр, вышыня якога адносіцца да радыуса асновы як 3 : 2. Знайдзіце, якую частку аб'ёму шара складае аб'ём цыліндра.

Рашэнне. Няхай у шар з цэнтрам O і радыусам R умежаны цыліндр з воссю O_1O_2 (рыс. 186) і $O_1O_2 = 3k$. Тады $O_1A = 2k$, $OO_1 = 1,5k$.

$O_1O \perp O_1A$, таму, улічыўшы, што $O_1O^2 + O_1A^2 = OA^2$, атрымаем:

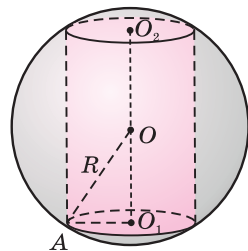
$$(1,5k)^2 + (2k)^2 = R^2, \text{ або } 2,5k = R.$$

Далей знаходзім:

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2,5k)^3 = \frac{62,5}{3}\pi k^3 = \frac{125}{6}\pi k^3,$$

$$V_{\text{ц}} = \pi \cdot O_1A^2 \cdot O_1O_2 = \pi(2k)^2 \cdot 3k = 12\pi k^3, \quad \frac{V_{\text{ц}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{12\pi k^3}{\frac{125}{6}\pi k^3} = \frac{72}{125}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{72}{125}.$$



Рыс. 186



Задача 4*. Утваральнік конуса роўны l і складае з плоскасцю асновы вугал α . Знайдзіце аб'ём шара, умежанага ў конус.

Рашэнне. Плоскасць, праведзеная праз вось BQ конуса, праходзіць праз цэнтр O умежанага шара і перасякае яго па вялікім крузе,

умежаным у раўнабедраны трохвугольнік ABC , што з'яўляецца сячэннем конуса (рыс. 187).

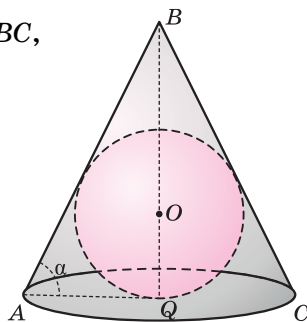
Знаходзім:

$$AQ = l \cdot \cos \alpha, \angle OAQ = \frac{1}{2} \cdot \angle BAQ = \frac{\alpha}{2},$$

$$OQ = AQ \operatorname{tg} \angle OAQ = l \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi OQ^3 = \frac{4}{3} \pi l^3 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

Адказ: $\frac{4}{3} \pi l^3 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$



Рыс. 187



281. Знайдзіце геаметрычнае месца:



- а) сярэдзін роўных хордаў шара;
- б) цэнтраў роўных кругавых сячэнняў шара.

282. Улічыўшы, што V — аб'ём шара з радыусам R , а S — плошча яго паверхні, знайдзіце:

- а) S і V пры $R = 8$ см;
- б) R і S пры $V = 113,04$ см³;
- в) R і V пры $S = 64\pi$ см².

283. Вызначце, у колькі разоў павялічыцца аб'ём шара, калі яго радыус павялічыць у:

- а) 3 разы;
- б) 5 разоў;
- в) n разоў.

284. Дыяметр Месяца прыблізна складае чацвёртую долю дыяметра Зямлі. Параўнайце аб'ёмы Месяца і Зямлі.

285. Свінцовы шар, дыяметр якога роўны 20 см, пераплаўляецца ў шарыкі, дыяметры якіх у 10 разоў меншыя. Вызначце, колькі такіх шарыкаў атрымаецца.

286. Знайдзіце радыус шара, аб'ём якога роўны аб'ёму:

- а) цыліндра з вышынёй 10 см і радыусам 6 см;
- б) конуса з вышынёй 20 см і радыусам асновы 10 см.

287. Знайдзіце вышыню цыліндра, аб'ём якога роўны аб'ёму шара, улічыўшы, што радыус асновы цыліндра роўны 4 см, а радыус шара — 6 см.

288. У цыліндрычную мензурку дыяметрам 2,5 см, напоўненую вадой да пэўнага ўзроўню, апускаюць 4 аднолькавыя металічныя шарыкі дыяметрам 1 см. Вызначце, на колькі зменіцца ўзровень вады ў мензурцы.



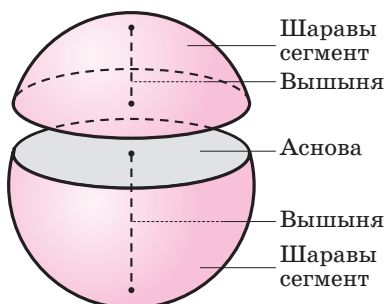
289. Знайдзіце дыяметр шара, улічыўшы, што пры апусканні ў вадку ён становіцца лягчэйшым на 39,6 кг.



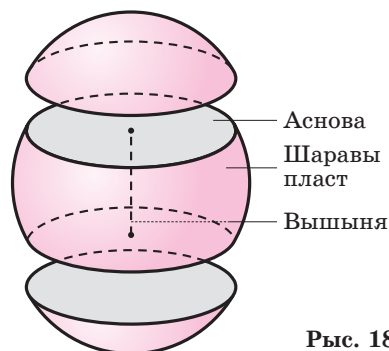
290. Улічыўшы, што шчыльнасць медзі $8,9 \text{ г/см}^3$, вызначце, ці будзе плаваць у вадзе пусты медны шар з дыяметрам 10 см і таўшчынёй сценак:
а) 2 мм ; б) $1,5 \text{ мм}$.
291. Ёсць чатыры целы — куб, шар, цыліндр і конус, прычым дыяметры асноў цыліндра і конуса роўныя іх вышыні. Паверхні ўсіх гэтых цел роўныя адна адной. Вызначце, якое з гэтых цел мае найбольшы аб'ём і якое — найменшы.
- 292*. Пасудзіна мае форму паўшара з радыусам R , дапоўненага цыліндрам. Вызначце, якой вышыні павінна быць цыліндрычная частка, каб пасудзіна мела аб'ём V .



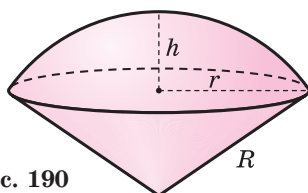
- 293*. Сечная плоскасць раздзяляе шар на два целы (рыс. 188), кожнае з якіх называецца *шаравым сегментам*. Круг сячэння называецца *асновай сегмента*. Кожны з адрэзкаў, на якія сечная плоскасць раздзяляе перпендыкулярны ёй дыяметр шара, называюць *вышынёй* адпаведнага *шаравога сегмента*. Дзве паралельныя сечныя плоскасці раздзяляюць шар на два шаравыя сегменты і яшчэ адно цела (рыс. 189), якое называюць *шаравым пластом*. Кругі сячэнняў называюцца *асновамі шаравога пласта*. Перпендыкуляр, апушчаны з адной сечнай плоскасці на другую, называюць *вышынёй шаравога пласта*.



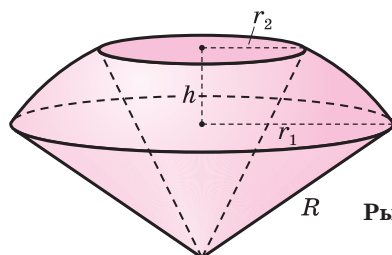
Рыс. 188



Рыс. 189



Рыс. 190



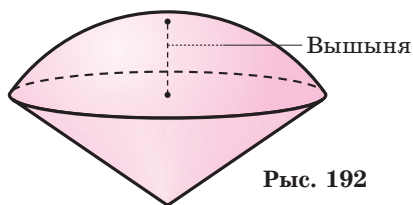
Рыс. 191

Дакажыце, што:

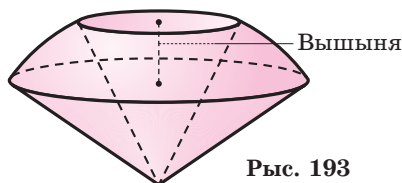
- а) аб'ём V шаравога сегмента з радыусам R і вышынёй h вызначаецца формулай

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) \quad (\text{рыс. 190});$$

- б) аб'ём V шаравога пласта з радыусам R , радыусамі асноў r_1 і r_2 і вышынёй h вызначаецца формулай $V = \frac{1}{6} \pi h^2 (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (рыс. 191).



Рыс. 192



Рыс. 193

- 294*.** Цела, утворанае вярчэннем кругавога сектара вакол прамой, што праходзіць праз яго цэнтр, ляжыць у яго плоскасці і не мае з ім агульных унутраных пунктаў, называецца *шаравым сектарам*. Шаравы сектар бывае двух відаў у залежнасці ад таго, належыць ці не належыць восі вярчэння адзін з крайніх радыусаў кругавога сектара. Першы з гэтых сектараў абмежаваны купалам і канічнай паверхняй (рыс. 192), другі — сферычным поясам і двума канічнымі паверхнямі (рыс. 193). Вышыня купала для першага сектара або перпендыкуляр, апушчаны з плоскасці асновы адной канічнай паверхні на плоскасць асновы другой паверхні для другога купала, называецца *вышыняй шаравога сектара*.

Дакажыце, што аб'ём шаравога сектара з радыусам R і вышыняй h вызначаецца формулай:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

- 295*.** Знайдзіце аб'ём шаравога сектара, атрыманага вярчэннем кругавога сектара:



- з вуглом 30° і радыусам R вакол аднаго з абмежавальных радыусаў;
- з радыусам r і дугой у 120° вакол прамой, якая праходзіць праз цэнтр сектара, ляжыць у яго плоскасці і складае з крайнімі радыусамі вуглы 30° .

- 296*.** Улічыўшы, што плоскасць, перпендыкулярная дыяметру шара, дзеліць гэты дыяметр на часткі:



- у адносіне $3 : 1$, знайдзіце адносіну аб'ёмаў атрыманых шаравых сегментаў;
- 3 см і 9 см, знайдзіце аб'ём атрыманых шаравых сегментаў.

- 297*.** Вызначце, колькі кубаметраў зямлі спатрэбіцца для таго, каб зрабіць клумбу, якая мае форму шаравога сегмента з радыусам асновы 5 м і вышыняй 60 см.



- 298*.** Знайдзіце аб'ём шаравога пласта, які атрымліваецца, калі ў шары з радыусам:



- 13 см па розныя бакі ад яго цэнтра правесці два роўныя паралельныя сячэнні з радыусам 5 см;
- r правесці два паралельныя сячэнні, з якіх адно праходзіць праз цэнтр, а другое дзеліць паверхню шара ў адносіне $1 : 3$.

- 299*.** Два роўныя шары размешчаны так, што цэнтр аднаго ляжыць на паверхні другога. Знайдзіце адносіну аб'ёму іх агульнай часткі да аб'ёму аднаго шара.



- 300*.** Радыусы паверхняў дваякавыпуклай лінзы роўныя 113 мм, а яе таўшчыня — 30 мм. Знайдзіце аб'ём лінзы.



- 301*.** У шары радыусам 60 мм прасвідравана цыліндрычная адтуліна дыяметрам 30 мм, вось якой праходзіць праз цэнтр шара. Знайдзіце аб'ём цела, што атрымалася.



302*. Паўкруг з радыусам r , раздзелены двума радыусамі на тры долі, верціцца вакол дыяметра. Знайдзіце аб'ёмы цел, атрыманых пры вярчэнні кожнай долі.



303*. Знайдзіце аб'ём шаравага сектара, дуга восевага сячэння якога роўная α , а:



а) радыус шара — r ; б) яго вышыня — h .

304*. Дыяметр шара роўны 30 см і з'яўляецца воссю цыліндра, у якога радыус асновы роўны 12 см. Знайдзіце аб'ём часткі шара, якая заключана ўнутры цыліндра.



305. Дакажыце, што:



а) геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадлеглых ад канцоў адрэзка, ёсць пасярэдняя плоскасць;

б) геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадлеглых ад вяршынь трохвугольніка ёсць прамая, якая праходзіць праз цэнтр апісанай каля трохвугольніка акружнасці і перпендыкулярная яго плоскасці;

в) тры пасярэднія плоскасці старон трохвугольніка перасякаюцца па адной прамой, якая праходзіць праз цэнтр апісанай каля трохвугольніка акружнасці і перпендыкулярная яго плоскасці;

г) тры бісектарныя паўплоскасці двухгранных вуглоў пры адной вяршыні трохвугольнай піраміды перасякаюцца па адной прамой.

306. Дакажыце, што:



а) каля любога цыліндра можна апісаць шар;

б) у цыліндр можна ўмежыць шар тады і толькі тады, калі восевае сячэнне цыліндра з'яўляецца квадратам;

в) каля любога конуса можна апісаць шар;

г) у любы конус можна ўмежыць шар;

д) каля любога ўсечанага конуса можна апісаць шар;

е) ва ўсечаны конус можна ўмежыць шар тады і толькі тады, калі ў восевае сячэнне конуса можна ўмежыць акружнасць, або калі ўтваральнік конуса роўны суме радыусаў яго асноў, або калі вышыня конуса роўная сярэдняму геаметрычнаму дыяметраў яго асноў;

ж) каля любога прамавугольнага паралелепіпеда можна апісаць шар;

з) каля прамой прызмы можна апісаць шар тады і толькі тады, калі вакол многавугольніка асновы можна апісаць акружнасць.

307. Восевым сячэннем цыліндра з'яўляецца квадрат. Дакажыце, што:



а) цэнтры ўмежанага ў цыліндр і апісанага каля яго шароў супадаюць і ляжаць на восі цыліндра;

б) бакавая паверхня цыліндра роўная паверхні ўмежанага ў яго шара;

в) поўная паверхня цыліндра адносіцца да паверхні ўмежанага ў яго шара як 3 : 2;

г) аб'ём цыліндра адносіцца да аб'ёму ўмежанага ў яго шара як 3 : 2.

308. Дакажыце, што:



- а) цэнтр шара, умежанага ў цыліндр, з'яўляецца цэнтрам сіметрыі цыліндра;
- б) цэнтр шара, апісанага каля цыліндра, з'яўляецца цэнтрам яго сіметрыі.

309. Дакажыце, што:



- а) цэнтры ўмежанага ў конус і апісанага каля яго шароў ляжаць на восі конуса;
- б) адносіна аб'ёму конуса да аб'ёму ўмежанага ў конус шара роўная адносіне іх паверхняў;
- в) цэнтры ўмежанага ва ўсечаны конус і апісанага каля яго шароў не супадаюць;
- г) адносіна паверхні шара да поўнай паверхні апісанага каля яго ўсечанага конуса роўная адносіне іх аб'ёмаў.

310. Каля шара з радыусам r апісаны прамавугольны паралелепіпед. Вызначце яго від і знайдзіце аб'ём.



311. Знайдзіце радыус шара, апісанага каля прамавугольнага паралелепіпеда, вымярэнні якога роўныя 6 см, 9 см, 18 см.



312. Каля шара апісана прамая трохвугольная прызма, асновай якой з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік з бакавой стараной a і вуглом пры вершыні α . Знайдзіце вышыню прызмы.



313. Знайдзіце дыяметр шара, апісанага каля правільнай трохвугольнай прызмы, улічыўшы, што бакавы кант прызмы роўны 4 см, а кант асновы — 6 см.



314. У шар умежана прамая прызма, у аснове якой ляжыць прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 18 см і 24 см. Знайдзіце аб'ём прызмы, улічыўшы, што радыус шара роўны 39 см.



315. У шар з радыусам r умежана правільная шасцівугольная прызма, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце кант прызмы.



316. У шар з радыусам R умежана правільная чатырохвугольная прызма, дыяганаль якой складае з бакавой гранню вугал α . Знайдзіце яе аб'ём.



317. У шар з радыусам r умежаны мнагаграннік, які складаецца з сямі кубаў, адзін з якіх мае агульны цэнтр з шарам, а кожны з астатніх — агульную грань з гэтым кубам і чатыры вершыні на паверхні шара. Знайдзіце кант куба.



318. Знайдзіце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, у якім два шары з радыусам r размешчаны так, што кожны датыкаецца да другога шара і пяці граняў паралелепіпеда.



319. Дакажыце, што:



- а) калі ў правільную призму можна ўмежыць шар, то цэнтрам шара з'яўляецца сярэдзіна адрэзка, які злучае цэнтры асноў прызмы;
б) у піраміду з аднолькавымі двухграннымі вугламі пры аснове можна ўмежыць шар.

320. У шар умежаны цыліндр, у якім вугал паміж дыяганалямі восевага сячэння роўны α , а ўтваральнік — l . Знайдзіце аб'ём шара.



321. Ёсць два цыліндры, восевыя сячэнні якіх з'яўляюцца квадратамі, прычым адзін з іх апісаны каля шара, а другі ўмежаны ў гэты шар. Знайдзіце адносіну іх аб'ёмаў.



322. Дакажыце, што:



- а) цыліндр або конус, вось якога праходзіць праз цэнтр шара, перасякае яго паверхню па акружнасці;
б) каля любой правільнай піраміды можна апісаць шар;
в) у любую правільную піраміду можна ўмежыць шар.

323. Знайдзіце аб'ём шара, умежанага ў конус, утваральнік якога роўны:



- а) b і роўны дыяметру асновы конуса;
б) a і складае з плоскасцю асновы вугал δ .

324. У конус з вуглом α пры вяршыні восевага сячэння і радыусам асновы r умежаны шар з радыусам R . Знайдзіце:



- а) r як функцыю R і α ; б) R як функцыю r і α ; в) α як функцыю R і r .

325. У конус з радыусам асновы r і ўтваральнікам l умежаны шар. Знайдзіце даўжыню лініі, па якой шар датыкаецца да бакавой паверхні конуса.



326. Шар з радыусам R умежаны ва ўсечаны конус. Вугал нахілу ўтваральніка да плоскасці ніжняй асновы конуса роўны α . Знайдзіце радыусы асноў і ўтваральнік усечанага конуса.



327. Утваральнік конуса роўны l і складае з асновай вугал α . Знайдзіце паверхню і аб'ём апісанага шара.



328. У шар умежаны конус. Дакажыце, што радыус шара роўны $\frac{h^2 + r^2}{2h}$,



дзе h — вышыня конуса, r — радыус яго асновы.

329. Знайдзіце радыус шара, апісанага каля трохвугольнай піраміды, усе канты якой роўныя a .



330. Знайдзіце радыусы ўмежанага ў правільную чатырохвугольную піраміду і апісанага каля яе шароў, улічыўшы, што старана асновы піраміды роўная a і:



- а) плоскі вугал пры вяршыні — α ;
б) двухгранны вугал пры аснове — 60° .

331. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны 20 см, а радыус шара, апісанага каля піраміды, — 12,5 см. Знайдзіце аб'ём піраміды.



332. Знайдзіце аб'ём шара, умежанага ў:



- а) правільную шасцівугольную піраміду, старана асновы якой роўная a , а бакавы кант — b ;
- б) піраміду, улічыўшы, што яе асновай служыць ромб са стараной a , вострым вуглом α і двухграннымі вугламі β пры аснове.

333. Знайдзіце радыус шара, які:



- а) апісаны каля правільнай трохвугольнай піраміды, апафема якой роўная a і складае з плоскасцю асновы вугал α ;
- б) умежаны ў правільную чатырохвугольную піраміду са стараной асновы 26 см і вышынёй 16 см.

334. У правільную чатырохвугольную піраміду, старана асновы якой роўная 4 см, умежаны шар. Знайдзіце аб'ём піраміды, улічыўшы, што радыус шара роўны 1 см.



335. Вызначце аб'ём шара, умежанага ў правільную чатырохвугольную піраміду, улічыўшы, што цэнтр шара:



- а) адлеглы ад вяршыні піраміды на a , а ад бакавога канта — на b ;
- б) дзеліць вышыню піраміды ў адносіне 5 : 3, калі лічыць ад вяршыні, а старана асновы піраміды роўная a .

336. У шар з радыусам R умежана піраміда, асновай якой з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік з вуглом α пры вяршыні, а кожны бакавы кант складае з асновай вугал 60° . Знайдзіце яе аб'ём.



337. У піраміду, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной a і вуглом α , умежаны шар. Знайдзіце аб'ём шара, улічыўшы, што дзве бакавыя грані перпендыкулярныя аснове, а дзве іншыя нахілены да яе пад вуглом β .



338. Знайдзіце паверхню і аб'ём шара, апісанага каля піраміды, асновай якой з'яўляецца:



- а) прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузаў 2 і кожны бакавы кант складае з асновай вугал α ;
- б) прамавугольнік з дыяганаллю 10 і бакавыя канты піраміды нахілены да асновы пад вуглом β .

339. Знайдзіце паверхню і аб'ём шара, апісанага каля:



- а) правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды, у якой стораны асноў 14 дм і 2 дм, а бакавы кант нахілены да асновы пад вуглом 45° ;
- б) піраміды, у якой асновай з'яўляецца прамавугольнік са стараной a і вуглом паміж гэтай стараной і дыяганаллю асновы — α , а кожны кант піраміды складае з асновай вугал 60° .

340. Знайдзіце паверхню і аб'ём шара, апісанага каля правільнай трохвугольнай усечанай піраміды, у якой вышыня роўная 17 см, а радыусы акружнасцей, апісаных каля асновы, — 5 см і 12 см.



341. Знайдзіце паверхню і аб'ём шара, апісанага каля правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды, у якой бакавы кант роўны 14 см, а канты асноў — $5\sqrt{2}$ см і $12\sqrt{2}$ см.



342*. Шар датыкаецца да ўсіх кантаў трохвугольнай піраміды. Знайдзіце яго радыус, улічыўшы, што ўсе канты піраміды роўныя a .



343. Квадрат са стараной a з'яўляецца асновай піраміды, дзве бакавыя грані якой перпендыкулярныя плоскасці асновы. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў піраміду, улічыўшы, што большы бакавы кант складае з плоскасцю асновы вугал α .

344*. У трохвугольную піраміду з вышынямі h_1, h_2, h_3, h_4 умежаны шар з радыусам R . Дакажыце, што $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.



345*. Дакажыце, што:



- а) аб'ём конуса роўны трэцяй долі здабытку яго поўнай паверхні і радыуса ўмежанага шара;
- б) калі конусы апісаны каля шара, то іх аб'ёмы прапарцыянальныя плошчам паверхняў.

346*. Дакажыце, што калі каля шара апісаць цыліндр і конус, восевыя сячэнні якіх ёсць правільныя многавугольнікі, то:



- а) аб'ём цыліндра з'яўляецца сярэднім геаметрычным аб'ёмаў шара і конуса;
- б) плошчы іх паверхняў утвараюць геаметрычную прагрэсію з назоўнікамі 2.

347*. У конус умежаны цыліндр, поўная паверхня якога роўная бакавой паверхні конуса. Найбольшы вугал паміж утваральнікамі конуса — прамы. Дакажыце, што вяршыня конуса адлеглая ад верхняй асновы цыліндра на палавіну ўтваральніка конуса.



348*. З шаравага сегмента выразаны конус, які мае з ім агульныя аснову і вышыню. Знайдзіце аб'ём часткі сегмента, што засталася, улічыўшы, што дуга восевага сячэння сегмента роўная α , а радыус дугі — R .



349*. У шаравы сегмент, дуга восевага сячэння якога роўная α , умежаны шар з аб'ёмам V . Знайдзіце рознасць аб'ёмаў сегмента і шара.

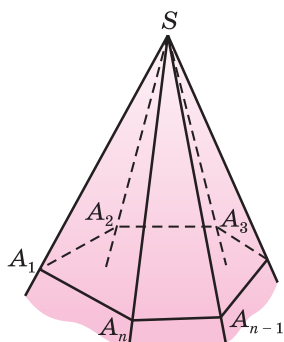


§ 7. Правільныя мнагаграннікі

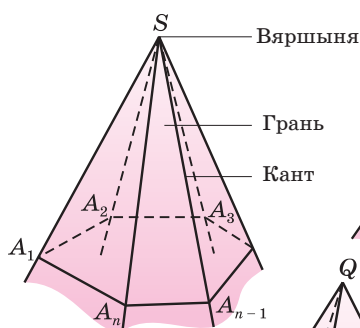


А) Няхай ёсць плоскі мнагавугольнік $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$. Па-за плоскасцю гэтага мнагавугольніка адвольна выберам пункт S і правядзём прамені праз яго і ўсе пункты старон мнагавугольніка. Гэтыя прамені ўтвараюць пэўную паверхню (рыс. 194), якая раздзяляе прастору на два абсягі. Той з абсягаў, які не змяшчае цалкам ніякай прамой, называюць *мнагагранным вуглом*. Пункт S называюць *вяршыняй* мнагаграннага вугла, плоскія вуглы $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_{n-1}SA_n, A_nSA_1$ — *гранямі*, а прамені $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ — *кантамі* мнагаграннага вугла (рыс. 195).

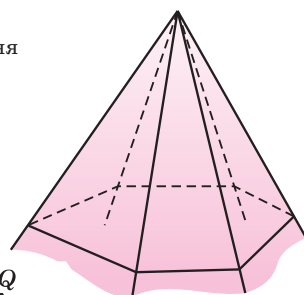
Мнагагранны вугал называецца *выпуклым*, калі ён размешчаны па адзін бок ад плоскасці любой яго грані. Мнагагранны вугал на рыс. 196 выпуклы, а на рыс. 197 — нявыпуклы. Па колькасці граняў мнагагранныя вуглы раздзяляюць на *трохгранныя*, *чатырохгранныя* і г. д.



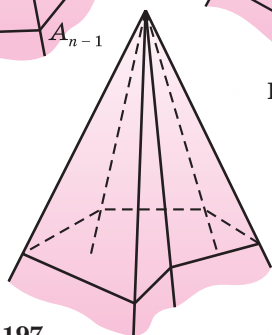
Рыс. 194



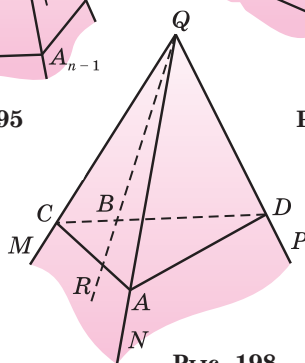
Рыс. 195



Рыс. 196



Рыс. 197



Рыс. 198



Тэарэма 12. Сума плоскіх вуглоў выпуклага мнагаграннага вугла меншая за 360° .

Доказ. Устанавім спачатку, што кожны плоскі вугал трохграннага вугла меншы за суму двух іншых яго вуглоў.

Няхай ёсць трохгранны вугал $QMNP$ (рыс. 198). Няхай для пэўнасці вугал MQP ёсць большы з плоскіх вуглоў трохграннага вугла. У плоскасці грані MQP ад праменя QP адкладзём вугал PQR , роўны вуглу PQN ,

і на праменях QN і QR адкладзём роўныя адрэзкі QA і QB . Праз прамую AB правядзём такую плоскасць, якая перасякае канты QM і QP у пэўных пунктах C і D . Трохвугольнікі AQD і BQD роўныя, бо ў іх старана QD агульная і па пабудаванні роўныя вуглы BQD і AQD , а таксама стораны BQ і AQ . Значыць, $DB = DA$. Далей, па ўласцівасці старон трохвугольніка, атрымаем: $DC < AC + DA$, або $DB + BC < AC + DA$, або $BC < AC$. Цяпер, паколькі ў трохвугольнікаў BQC і AQC старана QC агульная, стораны BQ і AQ роўныя, але $BC < AC$, то $\angle BQC < \angle AQC$. Дадаўшы да левай і правай частак гэтай няроўнасці адпаведна вуглы BQD і AQD , роўныя адзін аднаму, атрымаем, што $\angle BQC + \angle BQD < \angle AQC + \angle AQD$, або:

$$\angle CQD < \angle AQC + \angle AQD.$$

Няхай цяпер ёсць выпуклы мнагагранны вугал з вяршыняй R (рыс. 199). Перасекшы яго любой-небудзь плоскасцю, атрымаем у сячэнні многавугольнік $B_1B_2B_3 \dots B_{n-1}B_n$, кожная вяршыня якога з'яўляецца вяршыняй трохграннага вугла, утворанага двума гранямі дадзенага вугла і сечнай плоскасцю. Па даказаным для гэтых трохгранных вуглоў атрымаем:

$$\angle B_nB_1B_2 < \angle B_nB_1R + \angle B_2B_1R;$$

$$\angle B_1B_2B_3 < \angle B_1B_2R + \angle B_3B_2R;$$

$$\angle B_2B_3B_4 < \angle B_2B_3R + \angle B_4B_3R;$$

...

$$\angle B_{n-1}B_nB_1 < \angle B_{n-1}B_nR + \angle B_1B_nR.$$

Складзём пакампанентна гэтыя няроўнасці:

$$\begin{aligned} & \angle B_nB_1B_2 + \angle B_1B_2B_3 + \angle B_2B_3B_4 + \dots + \angle B_{n-1}B_nB_1 < \\ & < (\angle B_nB_1R + \angle B_1B_2R + \angle B_2B_3R + \dots + \angle B_{n-1}B_nR) + \\ & + (\angle B_2B_1R + \angle B_3B_2R + \angle B_4B_3R + \dots + \angle B_1B_nR). \end{aligned}$$

Цяпер звернем увагу на тое, што сума ў левай частцы апошняй няроўнасці ёсць сума вуглоў многавугольніка $B_1B_2B_3 \dots B_{n-1}B_n$, якая роўная $180^\circ \cdot (n - 2)$, а ў правай — сума вуглоў усіх трохвугольнікаў B_1RB_2 , B_2RB_3 , B_3RB_4 , ..., $B_{n-1}RB_n$ і B_nRB_1 , але без іх вуглоў пры вяршыні R , якая роўная $180^\circ \cdot n - S$, дзе S выражае суму плоскіх вуглоў дадзенага мнагаграннага вугла. Такім чынам, $180^\circ \cdot (n - 2) < 180^\circ \cdot n - S$, адсюль $S < 360^\circ$.

В) Мнагаграннік, у якога ўсе грані з'яўляюцца роўнымі правільнымі многавугольнікамі і ўсе двухгранныя вуглы роўныя адзін аднаму, называецца **правільным мнагаграннікам**.

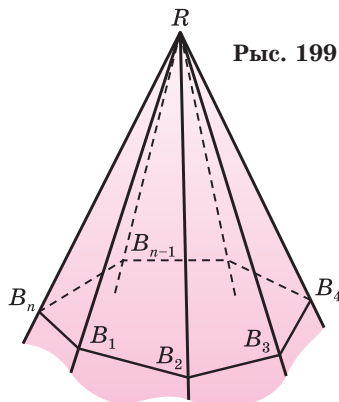


Рис. 199

З гэтага азначэння вынікае, што ў *правільнага мнаагранніка роўныя адзін аднаму ўсе яго*:

- *плоскія вуглы*;
- *мнаагранныя вуглы*;
- *канты*.



Тэарэма 13. Колькасць кантаў, што збягаюцца ў кожнай вяршыні *правільнага мнаагранніка*, не большая за пяць.

Доказ. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. у вяршыні мнаагранніка збягаюцца шэсць ці больш кантаў. Тады пры гэтай вяршыні мнааграннік меў бы шэсць або больш роўных плоскіх вуглоў. Улічыўшы, што сума гэтых вуглоў меншая за 360° , атрымаем, што кожны з іх меншы за 60° . Але гэта немагчыма, паколькі гранямі *правільнага мнаагранніка* з'яўляюцца *правільныя* *многовугольнікі*, а ў іх вуглы не меншыя за 60° .



Тэарэма 14. Колькасць старон *правільнага многовугольніка*, які з'яўляецца *гранню* *правільнага мнаагранніка*, не большая за пяць.

Доказ. У кожнай вяршыні *правільнага мнаагранніка* збягаюцца не менш чым тры плоскія вуглы, таму кожны з іх павінен быць меншы за 120° . Разам з гэтым вугал *правільнага шасцівугольніка* роўны 120° , а вугал *правільнага многовугольніка* з большай колькасцю старон большы за 120° . Таму *правільныя многовугольнікі*, колькасць старон якіх роўная шасці або большая за гэты лік, не могуць быць *гранямі* *правільнага многовугольніка*.



Тэарэма 15. Ёсць пяць тыпаў *правільных мнааграннікаў*.

Доказ. У адпаведнасці з тэарэмай 14 *гранямі* *мнаагранніка* могуць быць *правільныя* *трохвугольнікі*, *чатырохвугольнікі* або *пяцівугольнікі*.

Калі *гранямі* *правільнага мнаагранніка* служаць *трохвугольнікі*, то, з улікам тэарэмы 13, у вяршынях *мнаагранніка* могуць збягацца тры, чатыры або пяць кантаў. Калі *гранямі* *правільнага мнаагранніка* служаць *чатырохвугольнікі* або *пяцівугольнікі*, то ў вяршынях *мнаагранніка* можа збягацца толькі тры канты. Значыць, існуе не больш чым пяць відаў *правільных мнааграннікаў*.

Каб пераканацца, што такія віды *мнааграннікаў* існуюць, дастаткова ўказаць спосаб пабудавання кожнага з іх.

Перш за ўсё адзначым, што *правільны мнааграннік*, *гранямі* якога служаць *правільныя чатырохвугольнікі*, г. зн. *квадраты*, з'яўляецца *кубам*, які яшчэ называюць *правільным гексаэдрам*. Куб можна пабудаваць так. У адвольна выбранай *плоскасці* пабудаваць *квадрат*, праз яго

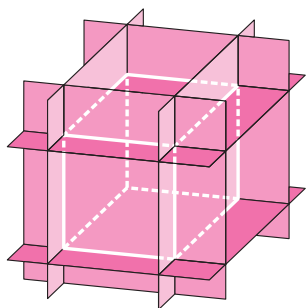


Рис. 200

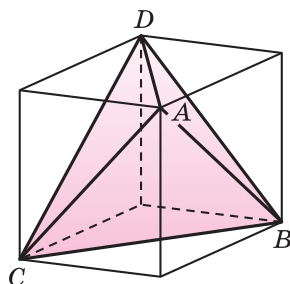


Рис. 201

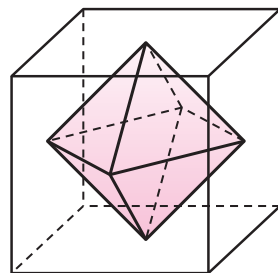


Рис. 202

стораны правесці плоскасці, перпендыкулярныя выбранай плоскасці, і яшчэ адну плоскасць, паралельную выбранай плоскасці і адлеглую ад яе на старану квадрата (рис. 200). Мы бачым, што гексаэдр мае 6 граняў, 12 кантаў і 8 вяршынь.

Пабудаванне мнагагранніка, у кожнай вяршыні якога збягаюцца тры трохвугольныя грані можа быць такім. Пабудоваць куб. Выбраць адну з яго вяршынь A і ў кожнай грані з гэтай вяршыняй выбраць вяршыню, супрацьлеглую вяршыні A . Няхай гэта вяршыні B, C, D . Пункты A, B, C, D з'яўляюцца вяршынямі шуканага мнагагранніка (рис. 201). Сапраўды, кожны з адрэзкаў AB, AC, AD, BC, CD, DB з'яўляецца дыяганаллю адной з граняў куба, а таму ўсе гэтыя адрэзкі роўныя адзін аднаму. Атрымліваецца, што ў трохвугольнай пірамідзе $ABCD$ усе грані з'яўляюцца правільнымі трохвугольнікамі. Такая піраміда называецца *правільным тэтраэдрам*. Тэтраэдр мае 4 грані, 6 кантаў і 4 вяршыні.

Пабудаванне мнагагранніка, у кожнай вяршыні якога збягаюцца чатыры трохвугольныя грані, можа быць такім. Пабудоваць куб і знайсці цэнтры шасці яго граняў (рис. 202). Гэтыя пункты з'яўляюцца вяршынямі мнагагранніка, усе грані якога — правільныя трохвугольнікі. Такі мнагаграннік называецца *правільным актаэдрам*. Актаэдр мае 8 граняў, 12 кантаў і 6 вяршынь.

Пабудаванне мнагагранніка, у кожнай вяршыні якога збягаюцца тры пяцівугольныя грані, можна выканаць, зноў выкарыстаўшы куб. Праз кожны з 12 кантаў куба правесці плоскасць, якая не мае з паверхняй куба іншых агульных пунктаў, акрамя пунктаў гэтага канта, то атрыманыя 12 плоскасцей пры перасячэнні дадуць грані пэўнага мнагагранніка.

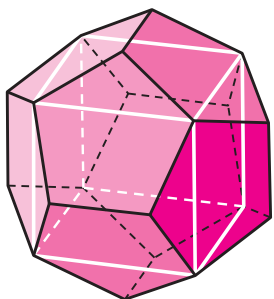
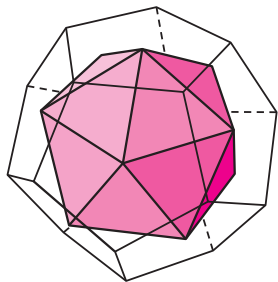


Рис. 203

Можна так падабраць нахіл гэтых плоскасцей да граняў куба, што грані гэтага дванаццацігранніка будуць правільнымі пяцівугольнікамі (рис. 203). Такі мнагаграннік называецца *правільным дадэкаэдрам*. Дадэкаэдр мае 12 граняў, 30 кантаў і 20 вяршынь.

Нарэшце, мнагаграннік, у кожнай вяршыні якога збягаюцца пяць трохвугольных граняў, можна пабудоваць, выкарыстаўшы дадэкаэдр, менавіта цэнтры граняў дадэкаэдра з'яўляюцца



Рыс. 204

вяршынямі шуканага правільнага мноагранніка (рыс. 204). Такі мноаграннік называецца *правільным ікасаэдрам*. Ікасаэдр мае 20 граняў, 30 кантаў і 12 вяршынь.

Такім чынам, ёсць пяць тыпаў правільных мноаграннікаў.

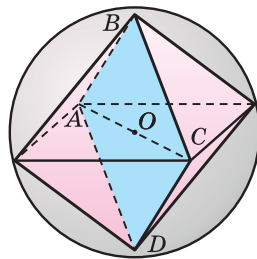
Назвы правільных мноаграннікаў паходзяць з грэчаскай мовы. Тэрмін *тэтраэдр*, па-грэчаску тэтраэдрон, азначае *чатырохграннік*: тэтра — чатыры і эдра — грань. Адпаведна тэрміны *гексаэдр*, *актаэдр*, *дадэкаэдр*, *ікасаэдр* па-грэчаску ё́ξαэдрон, октаэдрон, δωδεκαэдрон, εικοσαэдрон азначаюць *шасціграннік*, *васьміграннік*, *дванаццаціграннік*, *дваццаціграннік*: ё́ξ — шэсць, окта — восем, δωδεка — дванаццаць, εικοσι — дваццаць.

Мы ведаем, што гексаэдр і тэтраэдр маюць апісаны і ўмежаны шары. Гэтаксама апісаны і ўмежаны шары маюць актаэдр, дадэкаэдр і ікасаэдр. Цэнтры гэтых шароў супадаюць, і гэты пункт з'яўляецца цэнтрам сіметрыі адпаведнага правільнага мноагранніка, акрамя тэтраэдра, які не мае цэнтра сіметрыі.



Прыклад. Знойдзем радыус шара, апісанага каля правільнага актаэдра з кантам a .

Рашэнне. Паколькі правільны актаэдр — фігура сіметрычная, мае плоскасці сіметрыі, восі сіметрыі і цэнтр сіметрыі, то цэнтр O шара, апісанага каля правільнага актаэдра, знаходзіцца ў цэнтры яго сіметрыі (рыс. 205). Гэтым пунктам з'яўляецца сярэдзіна адрэзка AC , што злучае дзве супрацьлеглыя вяршыні. Разгледзім сячэнне $ABCD$ актаэдра плоскасцю, якая з'яўляецца плоскасцю сіметрыі і праходзіць праз чатыры вяршыні актаэдра. Гэтым сячэннем з'яўляецца правільны чатырохвугольнік, г. зн. квадрат. Цэнтр апісанага каля актаэдра шара ёсць цэнтр квадрата-сячэння, вяршыні квадрата — вяршыні актаэдра, якія размяшчаюцца на паверхні апісанага шара. Таму радыус R шара, апісанага каля правільнага актаэдра з кантам a , роўны палавіне дыяганалі квадрата са стараной a , г. зн. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Рыс. 205

Адказ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



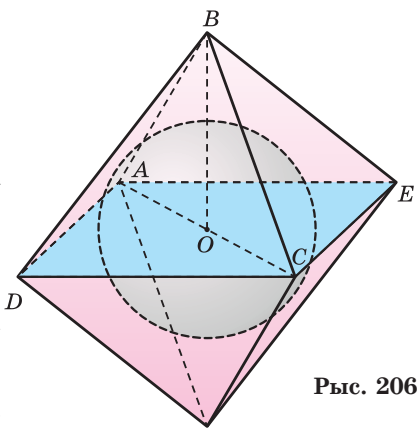
1. Як утвараецца мноагранны вугал?
2. Які пункт называюць вяршыняй, які вугал называюць гранню і які прамень называюць кантам мноаграннага вугла?
3. На якія віды падзяляюць мноагранныя вуглы па колькасці іх граняў?

4. Якім дачыненнем звязаны плоскія вуглы мнагаграннага вугла?
5. Якую ўмову праўдзіць сума плоскіх вуглоў мнагаграннага вугла?
6. Які мнагаграннік называецца правільным?
7. Якім дачыненнем звязаны адзін з адным плоскія вуглы правільнага мнагагранніка; мнагагранныя вуглы правільнага мнагагранніка; канты правільнага мнагагранніка?
8. Якую ўмову праўдзіць колькасць кантаў, што збягаюцца ў вяршыні правільнага мнагагранніка; колькасць старон грані правільнага мнагагранніка?
9. Які правільны мнагаграннік называецца тэтраэдрам; гексаэдрам; актаэдрам; дадэкаэдрам; ікасаэдрам?
10. Колькі граняў, колькі кантаў, колькі вяршынь мае тэтраэдр; гексаэдр; актаэдр; дадэкаэдр; ікасаэдр?



Задача. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў правільны актаэдр з кантамі a .

Рашэнне. Калі ў мнагаграннік умежаны шар, то аб'ём V гэтага мнагагранніка, плошча S яго поўнай паверхні і радыус r умежанага шара звязаны роўнасцю $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$. Аб'ём правільнага актаэдра роўны суме аб'ёмаў дзвюх роўных правільных чатырохвугольных пірамід, з якіх яго можна скласці.



Рыс. 206

Знойдзем аб'ём такой піраміды $BADCE$ (рыс. 206), улічыўшы, што кожны яе кант роўны a . Паколькі аснова $ADCE$ піраміды з'яўляецца плоскасцю сіметрыі правільнага актаэдра, а вяршыні пірамід, з якіх актаэдр састаўлены, сіметрычныя адна адной, то вышыня BO піраміды роўная $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (гл. прыклад 1). Плошча асновы піраміды як плошча квадрата са старонай a роўная a^2 . Таму для аб'ёму V_1 адной піраміды-часткі атрымаем $V_1 = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$, а для аб'ёму V правільнага актаэдра — $V = 2V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Паверхня правільнага актаэдра складаецца з васьмі правільных трохвугольнікаў з кантамі a .

Таму для плошчы S_n поўнай паверхні правільнага актаэдра будзем

$$\text{мець } S_n = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2. \text{ Значыць, } r = \frac{3V}{S_n} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{2\sqrt{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{a}{\sqrt{6}}.$$



350*. Дакажыце, што:



- а) калі два плоскія вуглы трохграннага вугла прамыя, то і супрацьлеглыя ім двухгранныя вуглы таксама прамыя;
- б) калі ўсе плоскія вуглы трохграннага вугла прамыя, то і ўсе двухгранныя вуглы таксама прамыя.

351*. Трохгранны вугал, плоскія вуглы якога прамыя, перасечаны плоскасцю. Дакажыце, што артацэнтр сячэння з'яўляецца асновай перпендыкуляра, праведзенага з вяршыні вугла на сечную плоскасць.



352*. Канты трохграннага вугла з вяршыняй S , плоскія вуглы якога прамыя, перасякае плоскасць α у пунктах A, B, C . Дакажыце, што:



- а) плошча кожнага з трохвугольнікаў SAB, SAC, SBC ёсць сярэдняе геаметрычнае плошчы праекцыі гэтага трохвугольніка на плоскасць α і плошчы трохвугольніка ABC ;
- б) сума квадратаў плошчаў трохвугольнікаў SAB, SAC, SBC роўная квадрату плошчы трохвугольніка ABC .

353*. Дакажыце, што ў трохграннага вугла перасякаюцца па адной прамой тры яго:



- а) бісектарныя паўплоскасці двухгранных вуглоў;
- б) плоскасці, кожная з якіх праходзіць праз бісектрысу плоскага вугла і перпендыкулярная яго плоскасці;
- в) плоскасці, кожная з якіх праходзіць праз кант і бісектрысу супрацьлеглага плоскага вугла;
- г) плоскасці, кожная з якіх праходзіць праз кант і перпендыкулярная супрацьлеглай грані.

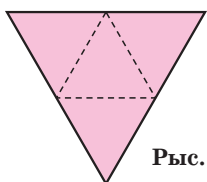
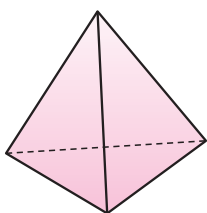
354*. Трохгранны вугал перасякаецца паралельнымі плоскасцямі. Знайдзіце геаметрычнае месца:



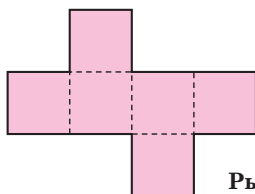
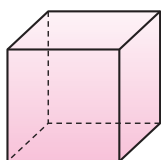
- а) артацэнтраў атрыманых трохвугольнікаў;
- б) цэнтроідаў атрыманых трохвугольнікаў;
- в) цэнтраў акружнасцей, апісаных каля атрыманых трохвугольнікаў.

355. Склеіце правільны:

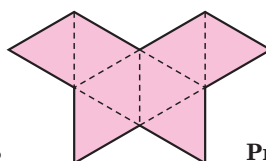
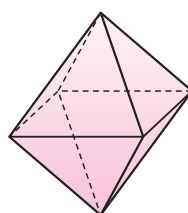
- а) тэтраэдр па яго разгортцы, што на рыс. 207;
- б) гексаэдр па яго разгортцы, што на рыс. 208;
- в) актаэдр па яго разгортцы, што на рыс. 209;
- г) дадэкаэдр па яго разгортцы, што на рыс. 210;
- д) ікасаэдр па яго разгортцы, што на рыс. 211.



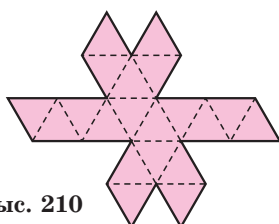
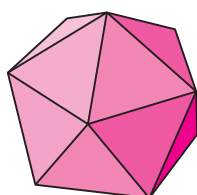
Рыс. 207



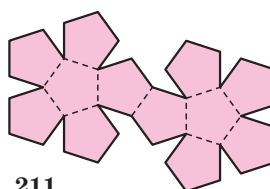
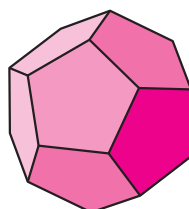
Рыс. 208



Рыс. 209



Рыс. 210



Рыс. 211

356. Два аднолькавыя правільныя тэтраэдры прыстаўлены адзін да аднаго роўнымі гранямі. Ці з'яўляецца атрыманы мнагаграннік правільным?

357. Ад кожнай вяршыні правільнага тэтраэдра з кантам 2 адсякаюць правільны тэтраэдр з кантам 1. Вызначце від атрыманага цела.

358. Кант куба роўны a . Знайдзіце радыус шара:



а) умежанага ў куб; б) апісанага каля куба.

359. Дакажыце, што:



а) каля куба можна апісаць і ў яго можна ўмежыць шар;

б) каля правільнага тэтраэдра можна апісаць і ў яго можна ўмежыць шар;

в) каля правільнага актаэдра можна апісаць і ў яго можна ўмежыць шар.

360. Знайдзіце радыус шара:



- а) умежанага ў правільны тэтраэдр з кантам a ;
б) апісанага каля правільнага тэтраэдра з кантам a .

361. Радыус шара роўны R . Знайдзіце поўную паверхню апісанага каля шара мнагагранніка, улічыўшы, што гэты мнагаграннік з'яўляецца:



- а) кубам; б) правільным актаэдрам; в) правільным тэтраэдрам.

362. Укажыце, колькі цэнтраў сіметрыі мае:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------|
| а) адрэзак; | е) куб; |
| б) паралелепіпед; | ж) правільны тэтраэдр; |
| в) пара перасякальных плоскасцей; | з) правільны актаэдр; |
| г) правільная трохвугольная прызма; | і) правільны дадэкаэдр; |
| д) шасцівугольная прызма; | к) правільны ікасаэдр. |

363. Укажыце, колькі восей сіметрыі мае:

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| а) адрэзак; | г) куб; |
| б) правільны трохвугольнік; | д) правільны тэтраэдр; |
| в) правільны шасцівугольнік; | е) правільны актаэдр. |

364. Укажыце, колькі плоскасцей сіметрыі мае:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------|
| а) чатырохвугольная прызма; | д) куб; |
| б) правільная шасцівугольная прызма; | е) правільны актаэдр; |
| в) трохвугольная піраміда; | ж) правільны дадэкаэдр; |
| г) правільны тэтраэдр; | з) правільны ікасаэдр. |

365. Знайдзіце плошчу сячэння куба з кантам a , якое праходзіць праз дыяганалі дзвюх яго граняў. Разгледзьце ўсе выпадкі.

366. Канцы дыяганаляў D_1A , D_1C і D_1B_1 граняў куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ злучаны адрэзкамі. Дакажыце, што мнагаграннік D_1ACB_1 — правільны тэтраэдр, і знайдзіце адносіну плошчаў паверхняў куба і тэтраэдра.



367. Знайдзіце вугал паміж кантамі правільнага актаэдра, якія маюць агульную вяршыню і не належаць адной грані.



368. Знайдзіце двухгранны вугал:



- а) правільнага тэтраэдра; б) правільнага актаэдра.

369. Кант правільнага тэтраэдра $PQUV$ роўны q . Знайдзіце плошчу сячэння тэтраэдра плоскасцю, якая праходзіць праз цэнтр грані QUV і:



- а) паралельная грані UPV ; б) перпендыкулярная канту QP .

370. Дакажыце, што адрэзкі, якія злучаюць цэнтры граняў правільнага тэтраэдра, роўныя адзін аднаму.



371. У правільнага тэтраэдра h — вышыня, l — кант, а k — адлегласць паміж цэнтрамі яго граняў. Выразіце:



- а) l праз h ; б) k праз l .

372. Кант правільнага актаэдра роўны a . Знайдзіце адлегласць паміж:



- а) дзвюма яго супрацьлеглымі вяршынямі;
- б) цэнтрамі дзвюх сумежных граняў;
- в) супрацьлеглымі гранямі.

373. Дакажыце, што цэнтры граняў правільнага:



- а) актаэдра з'яўляюцца вяршынямі куба;
- б) тэтраэдра з'яўляюцца вяршынямі другога правільнага тэтраэдра;
- в) куба з'яўляюцца вяршынямі правільнага актаэдра;
- г) дадэкаэдра з'яўляюцца вяршынямі правільнага ікасаэдра;
- д) ікасаэдра з'яўляюцца вяршынямі правільнага дадэкаэдра.

374. Дакажыце, што двухгранны вугал правільнага тэтраэдра разам з двухгранным вуглом правільнага актаэдра складае 180° .



375. Вяршыня кожнай грані правільнага тэтраэдра злучана з сярэдзінай вышыні, праведзенай да гэтай грані. Дакажыце, што атрыманыя адрэзкі папарна перпендыкулярныя.



376. Дакажыце, што ў правільным актаэдры:



- а) супрацьлеглыя канты паралельныя;
- б) супрацьлеглыя грані паралельныя;
- в) адлегласці паміж супрацьлеглымі гранямі роўныя;
- г) перыметр сячэння, паралельнага грані, велічыня пастаянная.

377. Кант правільнага актаэдра роўны a . Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі дзвюх яго граняў. Разгледзьце ўсе магчымыя выпадкі.



378. У цыліндр, вышыня якога роўная h , умежаны такі актаэдр, што дзве яго вяршыні з'яўляюцца цэнтрамі асноў цыліндра. Вызначце, пры якіх умовах актаэдр будзе правільным, і знайдзіце яго кант.



379. Дакажыце, што для любога выпуклага мнагагранніка сума колькасцей граняў і вяршынь на 2 большая за колькасць кантаў (тэарэма Эйлера).

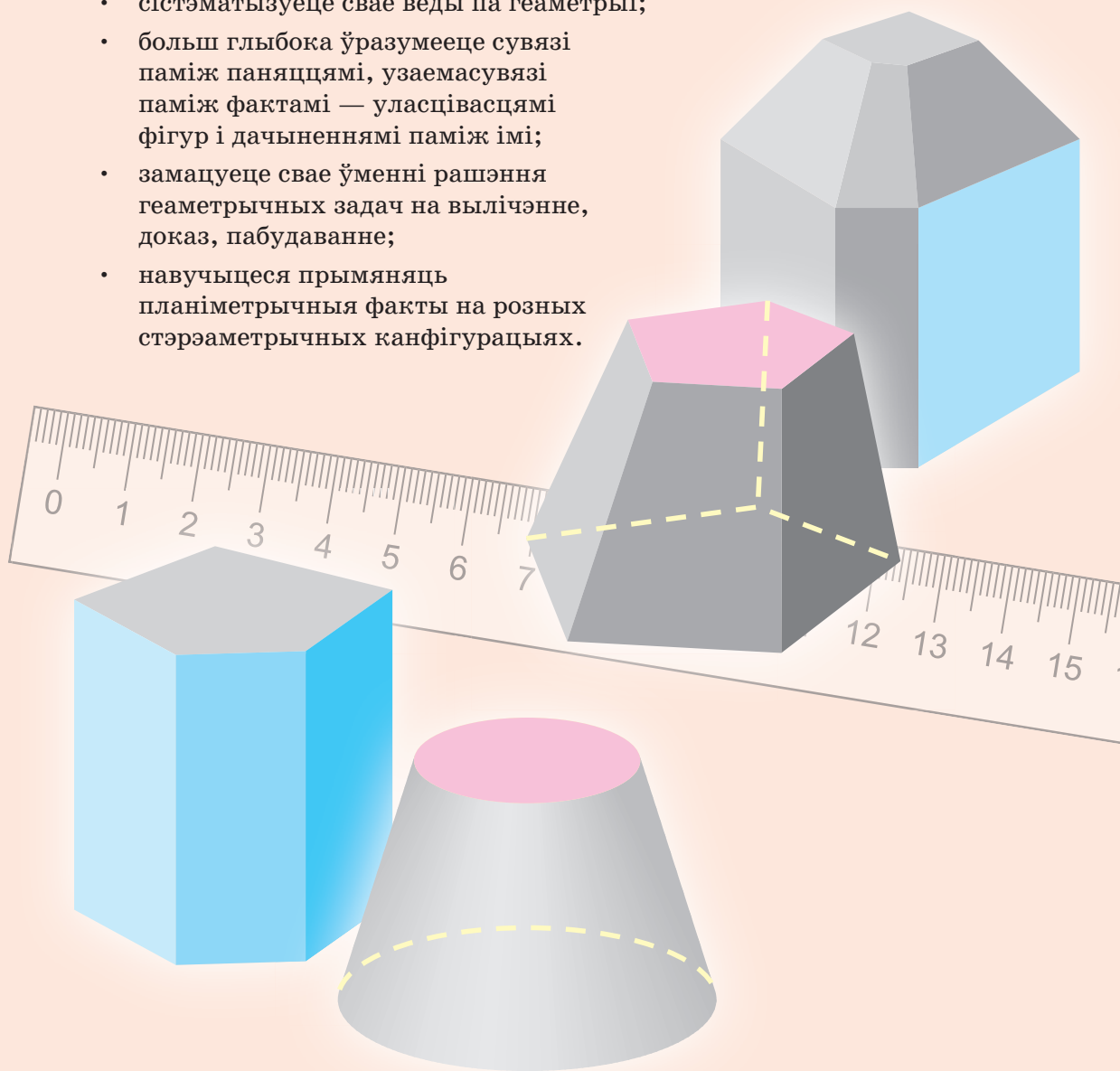


Раздзел IV

Паўтарэнне

У гэтым раздзеле вы:

- сістэматызуеце свае веды па геаметрыі;
- больш глыбока ўразумеете сувязі паміж паняццямі, узаемасувязі паміж фактамі — уласцівасцямі фігур і дачыненнямі паміж імі;
- замацуеце свае ўменні рашэння геаметрычных задач на вылічэнне, доказ, пабудаванне;
- навучыцеся прымяняць планіметрычныя факты на розных стэрэаметрычных канфігурацыях.



§ 8. Геаметрычныя фігуры і іх уласцівасці

А) Прамыя і плоскасці

Асноўны змест школьнай геаметрыі звязаны з адпаведнымі геаметрычнымі канфігурацыямі — найпрасцейшымі геаметрычнымі фігурамі ці іх спалучэннямі. Да такіх канфігурацый адносяцца: дзве прамыя ў прасторы; прамая і плоскасць; дзве плоскасці; дзве прамыя плоскасці; тры прамыя плоскасці; рознастаронні трохвугольнік; прамавугольны трохвугольнік; раўнабедраны трохвугольнік; акружнасць і прамая; акружнасць і дзве прамыя; акружнасць і трохвугольнік; чатырохвугольнік агульнага выгляду; чатырохвугольнік і акружнасць; трапецыя; паралелаграм; прамавугольнік; ромб; квадрат.

Умова геаметрычнай задачы звычайна апісвае пэўную геаметрычную канфігурацыю, якую можна разглядаць як спалучэнне названых найпрасцейшых канфігурацый. Таму напачатку мэтазгодна зрабіць схематычны рысунак, які больш ці менш правільна адлюстроўвае ўмову задачы. Затым, аналізуючы пабудаваны рысунак, паспрабаваць намеціць план пераходу ад дадзеных уласцівасцей і лікавых характарыстык да таго, што патрабуецца ў задачы. Нарэшце, трэба рэалізаваць намечаны план, аформіўшы рашэнне задачы.

Прамыя ў прасторы

Дзве прамыя a і b могуць не належаць адной плоскасці або належаць ёй. Дзве прамыя адной плоскасці могуць мець агульны пункт ці не мець яго. У адпаведнасці з гэтым дзве **прамыя ў прасторы** або **скрыжаваныя** (рыс. 212), або **перасякальныя** (рыс. 213), або **паралельныя** (рыс. 214).

Скрыжаваныя і перасякальныя прамыя могуць быць **перпендыкулярнымі**, г. зн. такімі, што вугал паміж імі роўны 90° (рыс. 215).

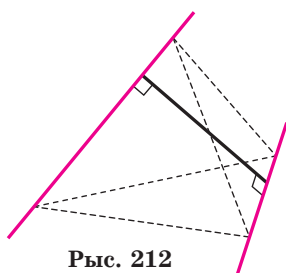


Рис. 212

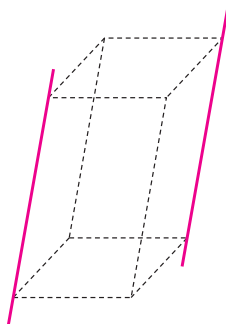


Рис. 214

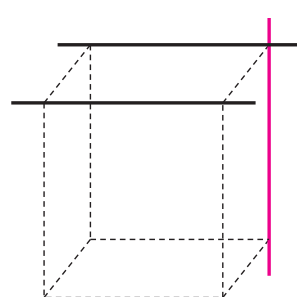


Рис. 215

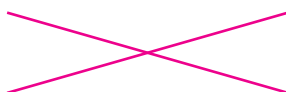
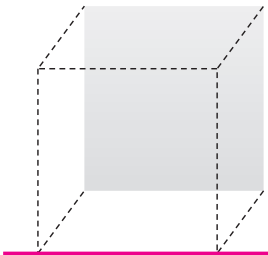


Рис. 213

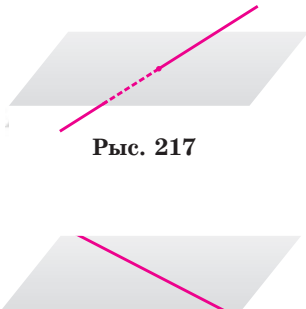
Дачыненне	Прыметы	Уласцівасці
Скрыжаванасць прамых	Прамыя з’яўляюцца скрыжаванымі, калі адна з іх належыць пэўнай плоскасці, а другая перасякае яе ў пункце, не прыналежным першай прамой	Калі прамыя скрыжаваныя, то: • праз кожную з іх можна правесці плоскасць, паралельную другой прамой; • праз іх можна правесці плоскасці, паралельныя адна адной; • яны маюць адзіны агульны перпендыкуляр
Паралельнасць прамых	Прамыя з’яўляюцца паралельнымі, калі: • яны перпендыкулярныя адной плоскасці; • яны ёсць лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю	Калі з трох розных прамых адна прмая паралельная другой, а другая — трэцяй, то першая і трэцяя прамыя таксама паралельныя. Калі дзве розныя прамыя паралельныя трэцяй, то яны паралельныя і адна адной. Калі адна з дзвюх паралельных прамых перасякае плоскасць, то яе перасякае і другая прмая. Калі прмая перасякае адну з паралельных плоскасцей, то яна перасякае і другую плоскасць. Калі дзве прамыя перпендыкулярныя адной плоскасці, то яны паралельныя адна адной

Прамая і плоскасць

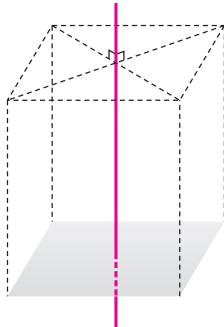
У прасторы ў прамой і плоскасці агульных пунктаў можа быць: ні аднаго, адзін або больш за адзін. У адпаведнасці з гэтым **прамая і плоскасць прасторы** або **паралельныя** (рыс. 216), або **перасякальныя** (рыс. 217), або **прамая ляжыць у плоскасці** (рыс. 218).



Рыс. 216



Рыс. 218



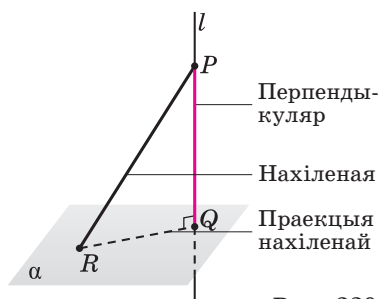
Рыс. 219

Асобным выпадкам перасякальнасці прамой і плоскасці з'яўляецца іх *перпендыкулярнасць*, г. зн. такое іх размяшчэнне, калі прамая перпендыкулярная любой прамой плоскасці (рыс. 219).

Дачыненне	Прыметы	Уласцівасці
Паралельнасць прамой і плоскасці	Прамая паралельная плоскасці, калі яна не належыць гэтай плоскасці і паралельная якой-небудзь яе прамой	Калі плоскасць праходзіць праз прамую, паралельную іншай плоскасці, і перасякае яе, то яна перасякае яе па прамой, якая паралельная першай прамой
Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці	Прамая перпендыкулярная плоскасці, калі: • яна перпендыкулярная двум перасякальным прамым гэтай плоскасці; • яна ёсць лінія перасячэння двох плоскасцей, якія перпендыкулярныя дадзенай плоскасці	Праз кожны пункт прасторы можна правесці: • адзіную плоскасць, перпендыкулярную дадзенай прамой; • адзіную прамую, перпендыкулярную дадзенай плоскасці

Перпендыкуляр і нахіленая да плоскасці

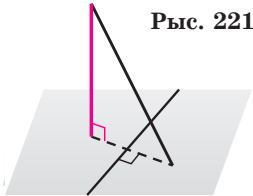
Адрэзак, які злучае які-небудзь пункт P прамой l , перпендыкулярнай плоскасці α , з пунктам Q перасячэння прамой l і плоскасці α (рыс. 220), называецца *перпендыкулярам да плоскасці*, праведзеным з пункта P , а пункт Q — *асновай перпендыкуляра*. Адрэзак PR , які злучае які-небудзь пункт P прасторы, не прыналежны плоскасці α , з якім-небудзь яе пунктам R і адрозны ад перпендыкуляра да плоскасці, называецца *нахіленай да плоскасці*, праведзенай з пункта P , а пункт R — *асновай нахіленай*. Калі PQ ёсць перпендыкуляр да плоскасці α , то адрэзак QR называецца *праекцыяй нахіленай PR на плоскасць α* .



Рыс. 220

Тэарэма пра тры перпендыкуляры

Калі прамая плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэтую плоскасць, то яна перпендыкулярная і самой нахіленай, а калі прамая плоскасці перпендыкулярная нахіленай да плоскасці, то яна перпендыкулярная і праекцыі гэтай нахіленай (рыс. 221).



Рыс. 221

Дзве плоскасці

У прасторы дзве плоскасці або маюць агульны пункт, або не маюць яго. У адпаведнасці з гэтым дзве плоскасці прасторы або *паралельныя* (рыс. 222), або *перасякальныя* (рыс. 223).

Асобным выпадкам перасякальнасці плоскасцей з’яўляецца іх *перпендыкулярнасць*, г. зн. такое іх размяшчэнне, калі вугал паміж імі роўны 90° (рыс. 224).

Дачыненне	Прыметы	Уласцівасці
Паралельнасць плоскасцей	Плоскасці з’яўляюцца паралельнымі, калі: - адна з іх праходзіць праз перасякальныя прамыя, паралельныя другой плоскасці; - дзве перасякальныя прамыя адной плоскасці адпаведна паралельныя двом перасякальным прамым другой плоскасці; - яны перпендыкулярныя адной прамой	Калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці. Дзве паралельныя плоскасці высякаюць з паралельных прамых роўныя адрэзкі. Тры паралельныя плоскасці высякаюць з паралельных прамых прапарцыянальныя адрэзкі. Калі адна плоскасць паралельная другой, а другая — трэцяй, то першая і трэцяя плоскасці таксама паралельныя. Калі дзве плоскасці паралельныя трэцяй, то яны паралельныя адна адной
Перпендыкулярнасць плоскасцей	Плоскасці з’яўляюцца перпендыкулярнымі, калі адна з іх праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці	Плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння двох дадзеных плоскасцей, перпендыкулярная кожнай з іх. Калі праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей праведзена прамая, перпендыкулярная другой плоскасці, то гэтая прамая належыць першай плоскасці

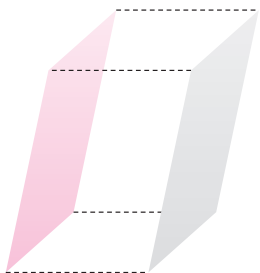


Рис. 222



Рис. 223

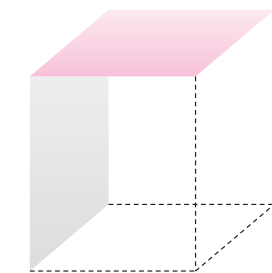


Рис. 224

Мнагагранны вугал

Дзве паўплоскасці з агульнай мяжой раздзяляюць прастору на дзве часткі, кожную з якіх разам з паўплоскасцямі называюць **двухгранным вуглом** (рис. 225). Паўплоскасці, што абмяжоўваюць двухгранны вугал, называюць **гранямі** вугла, а агульную прамую — **кантам** двухграннага вугла (рис. 226).

Вугал, утвораны двума перпендыкулярамі, узведзенымі з адвольнага пункта канта двухграннага вугла ў кожнай з яго граняў, называецца **лінейным вуглом** двухграннага вугла (рис. 227).

Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла роўныя адзін аднаму.

Двухгранны вугал вымяраецца сваім лінейным вуглом.

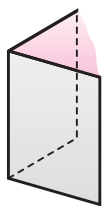


Рис. 225

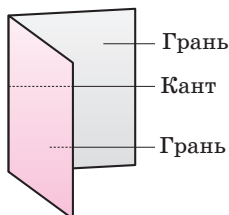


Рис. 226

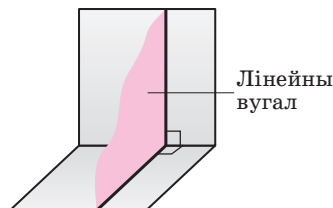


Рис. 227



Частка прасторы, абмежаваная ўсімі прамянямі, што праходзяць праз кожны пункт плоскага многавугольніка і маюць агульны пункт, які не належыць плоскасці гэтага многавугольніка, прычым гэтая частка не змяшчае цалкам ніякай прамой, называецца **мнагагранным вуглом** (рис. 228). Агульны пункт праменяў, якімі ўтвораны мнагагранны вугал, называюць **вяршыняй** мнагаграннага вугла, а самі прамені — **кантамі** мнагаграннага вугла; плоскія вуглы, якія абмяжоўваюць мнагагранны вугал, называюць **гранямі** мнагаграннага вугла (рис. 228).

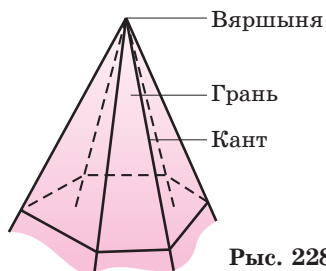


Рис. 228

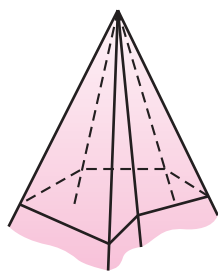


Рис. 229

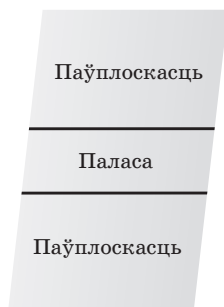


Рис. 230

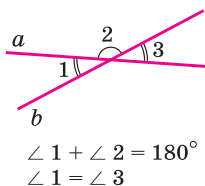


Рис. 231

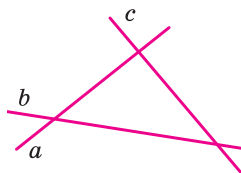


Рис. 232

Мнагагранныя вуглы раздзяляюць на **выпуклыя** і **нявыпуклыя** ў залежнасці ад таго, размешчаны ці не размешчаны вугал па адзін бок ад плоскасці любой яго грані. Мнагагранны вугал на рис. 228 — выпуклы, а на рис. 229 — нявыпуклы. Па колькасці граняў мнагагранныя вуглы раздзяляюць на **трохгранныя**, **чатырохгранныя** і г. д.

Сума плоскіх вуглоў выпуклага мнагаграннага вугла меншая за 360° .

Дзве прамыя плоскасці

Паралельныя прамыя раздзяляюць плоскасць на дзве паўплоскасці і паласу (рис. 230).

Перасякальныя прамыя раздзяляюць плоскасць на чатыры вуглы (рис. 231), якія аб'ядноўваюць у пары. Вуглы 1 і 2, якія маюць агульную старану, называюць *сумежнымі*, а вуглы 1 і 3, стораны кожнага з якіх з'яўляюцца працягам старон другога вугла, — *вертыкальнымі*.

Сумежныя вуглы разам складаюць 180° , а вертыкальныя вуглы роўныя адзін аднаму.

Тры прамыя плоскасці

Сярод трох прамых a , b , c можа не быць паралельных прамых (рис. 232) або такія прамыя могуць быць. Калі паралельныя прамыя a і b ёсць, то трэцяя прамая c можа быць паралельнай ім (рис. 233) або перасякаць іх (рис. 234).

Калі дзве прамыя a і b перасечаны трэцяй прамой, то ўтвараюцца 8 вуглоў (рис. 235). Вуглы 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8 называюцца *адпаведнымі*, вуглы 3 і 6, 4 і 5 — *унутранымі аднабаковымі*, вуглы 3 і 5, 4 і 6 — *унутранымі накрываючымі*.

Калі $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Калі $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

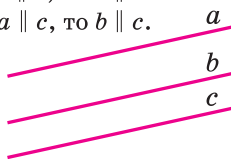


Рис. 233

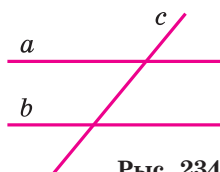


Рис. 234

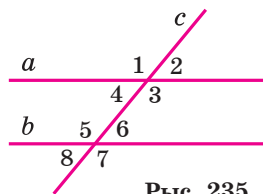


Рис. 235

Прыметы паралельнасці прамых плоскасці	Уласцівасці паралельных прамых плоскасці
Прамыя з'яўляюцца паралельнымі, калі пры перасячэнні іх трэцяй прамой: • адпаведныя вуглы роўныя; • унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя; • унутраныя аднабаковыя вуглы разам складаюць 180°	Калі прамыя паралельныя, то пры перасячэнні іх трэцяй прамой: • адпаведныя вуглы роўныя; • унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя; • унутраныя аднабаковыя вуглы разам складаюць 180°

Б) Трохвугольнік

Рознастаронні трохвугольнік

Тры папарна перасякальныя прамыя вылучаюць з плоскасці трохвугольнік (рыс. 236). Стораны і вуглы трохвугольніка называюць яго асноўнымі *элементамі*. З трохвугольнікам звязваюць і іншыя элементы.

Знешні вугал трохвугольніка — вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом (рыс. 237).

Сярэдняя лінія трохвугольніка — адрэзак, што злучае сярэдзіны дзвюх яго старон (рыс. 238).

Медыяна трохвугольніка — адрэзак, што злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай супрацьлеглай стараны (рыс. 239).

Бісектрыса трохвугольніка — адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, заключаны паміж яго вяршыняй і супрацьлеглай стараной (рыс. 240).

Вышыня трохвугольніка — перпендыкуляр, апущаны з вяршыні трохвугольніка на прамую, што праходзіць праз яго супрацьлеглую старану (рыс. 241).

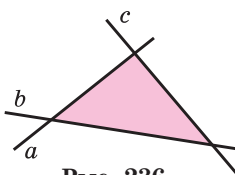


Рис. 236

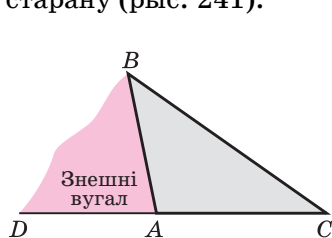


Рис. 237

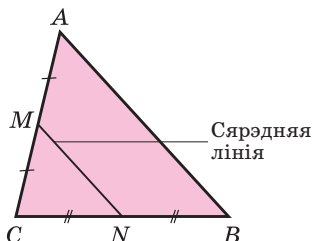


Рис. 238

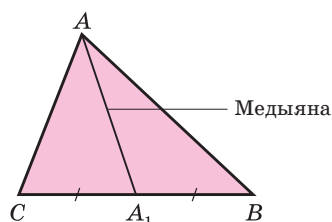


Рис. 239

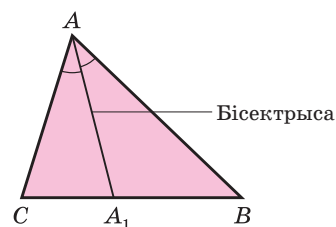


Рис. 240

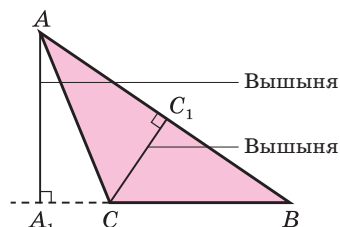


Рис. 241

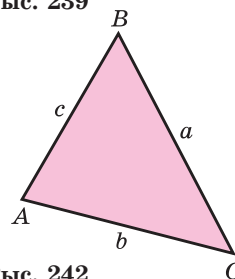
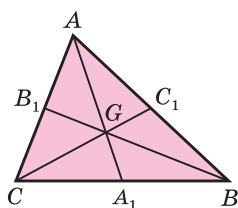


Рис. 242

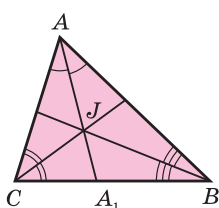
Трохвугольнік мае такія ўласцівасці:

Элемент	Уласцівасць	
Стораны і вуглы (гл. рыс. 242)	Сума ўнутраных вуглоў роўная 180°	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
	Кожная старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон і большая за іх рознасць	$b + c < a < b + c$ $a + c < b < a + c$ $a + b < c < a + b$
	Большаму вуглу адпавядае большая супрацьлеглая старана	Калі $\angle A > \angle C$, то $a > c$
	Большай старане адпавядае большы супрацьлеглы вугал	Калі $a > c$, то $\angle A > \angle C$
	Квадрат стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон без падвоенага здабытку гэтых старон на косінус вугла паміж імі (тэарэма косінусаў)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
	Стораны прапарцыянальныя сіносам супрацьлеглых вуглоў (тэарэма сіносаў). Адносіна стараны трохвугольніка да сіноса супрацьлеглага вугла роўная дыяметру акружнасці, апісанай вакол гэтага трохвугольніка (тэарэма сіносаў)	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
Знешні вугал (гл. рыс. 237)	Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух яго ўнутраных вуглоў, не сумежных з ім	$\angle BAD = \angle B + \angle C$
Сярэдняя лінія (гл. рыс. 238)	Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельная трэцяй старане і роўная яе палавіне	$MN \parallel AB$ $MN = \frac{1}{2} AB$
Медыяна	Медыяна трохвугольніка дзеліць яго на роўнавялікія часткі (гл. рыс. 239). Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які адсякае ад кожнай з іх трэцюю долю, калі лічыць ад стараны (гл. рыс. 243)	$S_{CAA_1} = S_{BAA_1}$ $A_1G = \frac{1}{3} AA_1$ $B_1G = \frac{1}{3} BB_1$ $C_1G = \frac{1}{3} CC_1$

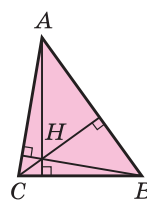
Элемент	Уласцівасць	
Бісектрыса	Бісектрыса трохвугольніка дзеліць супрацьлеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам (гл. рыс. 240). Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце. Пункт перасячэння бісектрыс трохвугольніка дзеліць кожную з іх у адносіне, першы кампанент якой — сума старон, што заключаюць бісектрысу, а другі — трэцяя старана (гл. рыс. 244)	$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$ $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{AB + AC}{BC}$
Вышыня	Прамыя, што праходзяць праз вышыні трохвугольніка, перасякаюцца ў адным пункце (гл. рыс. 245)	



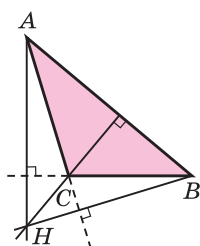
Рыс. 243



Рыс. 244



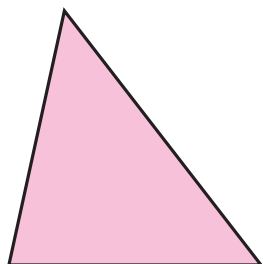
Рыс. 245



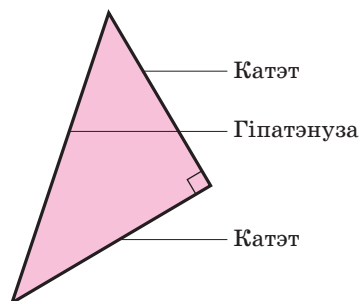
Прамавугольны трохвугольнік

Два вуглы трохвугольніка абавязкова вострыя, а трэці — большы, яго вугал можа быць і вострым (рыс. 246), і прамым (рыс. 247), і тупым (рыс. 248). У адпаведнасці з гэтым трохвугольнікі падзяляюцца на *востравугольныя, прамавугольныя, тупавугольныя*.

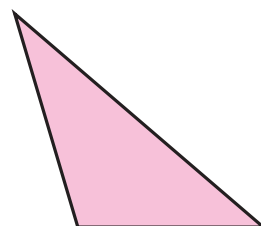
Стораны, што ўтвараюць прамы вугал прамавугольнага трохвугольніка, называюць *катэтамі*, а яго трэцюю старану — *гіпатэнузай*.



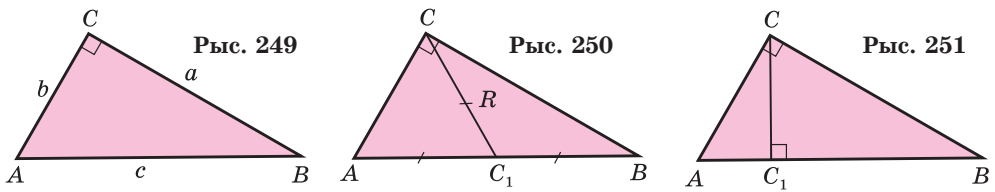
Рыс. 246



Рыс. 247



Рыс. 248



Прамавугольны трохвугольнік (гл. рыс. 249) мае такія ўласцівасці:

Элемент	Уласцівасць	
Стораны і вуглы	Вострыя вуглы разам складаюць 90°	$\angle A + \angle B = 90^\circ$
	Квадрат гіпатэнузы роўны суме квадратаў катэтаў (тэарэма Піфагора)	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
	Калі катэт ляжыць супраць вугла 30° , то ён роўны палавіне гіпатэнузы	
	Калі катэт роўны палавіне гіпатэнузы, то ён ляжыць супраць вугла 30°	
	Сінус вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да гіпатэнузы. Косінус вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да гіпатэнузы. Тангенс вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да прылеглага. Катангенс вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да супрацьлеглага	$\sin A = \frac{BC}{AB}$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$ $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$ $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$
Медыяна	Медыяна, праведзеная да гіпатэнузы (гл. рыс. 250), роўная палавіне гэтай гіпатэнузы і з'яўляецца радыусам апісанай акружнасці	$CC_1 = AC_1 = BC_1 = R$
Вышыня	Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, з'яўляецца сярэднім геаметрычным адрэзкаў, на якія яна раздзяляе гіпатэнузу, а катэт ёсць сярэдняе геаметрычнае гіпатэнузы і праекцыі гэтага катэта на гіпатэнузу (гл. рыс. 251)	$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1}$ $AC = \sqrt{AB \cdot AC_1}$ $BC = \sqrt{AB \cdot BC_1}$

Прыметы прамавугольнага трохвугольніка. Трохвугольнік з'яўляецца прамавугольным, калі:

- ён мае прамы вугал;
- сума двух якіх-небудзь яго вуглоў роўная 90° ;
- квадрат большай яго стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон;
- адна з яго медыян роўная палавіне стараны, да якой праведзена.

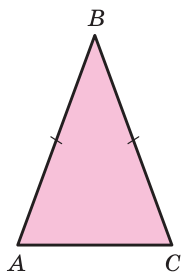
Раўнабедраны трохвугольнік

Калі трохвугольнік мае роўныя стараны, яго называюць *раўнабедраным* (рыс. 252). Раўнабедраны трохвугольнік з трыма роўнымі старанамі называюць *роўнастароннім* (рыс. 253).

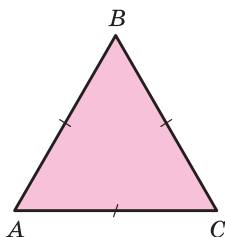
Роўныя стараны раўнабедранага трохвугольніка называюць *бакавымі старанамі*, а трэцюю старану — *асновай* (рыс. 254).

Раўнабедраны трохвугольнік (рыс. 255) мае такія ўласцівасці:

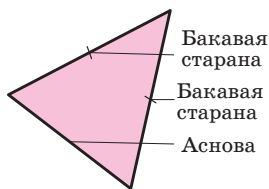
Элемент	Уласцівасць	
Стараны і вуглы	Вуглы пры аснове роўныя	$\angle A = \angle B$
Медыяна, вышыня, бісектрыса	Медыяна, бісектрыса, вышыня, праведзеныя да асновы, супадаюць	Калі BB_1 — медыяна, то BB_1 — бісектрыса і вышыня; калі BB_1 — бісектрыса, то BB_1 — медыяна і вышыня; калі BB_1 — вышыня, то BB_1 — бісектрыса і медыяна



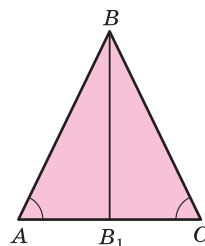
Рыс. 252



Рыс. 253



Рыс. 254



Рыс. 255

Прыметы раўнабедранага трохвугольніка. Трохвугольнік з'яўляецца раўнабедраным, калі:

- дзве яго стараны роўныя;
- два яго вуглы роўныя;
- праведзеныя з адной вяршыні медыяна і вышыня супадаюць;
- праведзеныя з адной вяршыні медыяна і бісектрыса супадаюць;
- праведзеныя з адной вяршыні вышыня і бісектрыса супадаюць.

В) Акружнасць і прамая

Акружнасць і круг

Адносіна даўжыні C любой акружнасці да яе дыяметра d ёсць пастаянная велічыня. Гэтая адносіна выяўляецца лікам, які абазначаецца π :

$$\pi = \frac{C}{d} \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113} \approx 3,141592653\dots$$

Даўжыня C акружнасці, плошча S адпаведнага круга і іх радыус r звязаны формуламі:

$$C = 2\pi r; \quad S = \pi r^2; \quad S = \frac{C}{2} r \quad (\text{рыс. 256}).$$

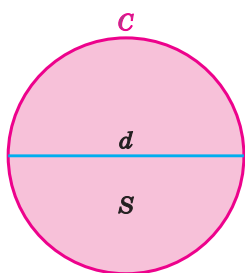
Акружнасць і прамая

Агульных пунктаў прамая з акружнасцю можа мець не больш за два (рыс. 257).

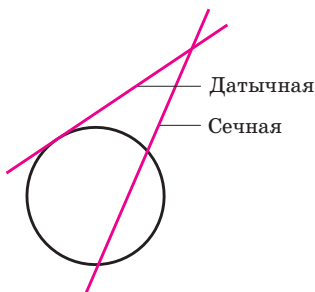
Сечная — прамая, якая мае з акружнасцю два агульныя пункты.

Датычная — прамая, якая мае з акружнасцю адзін агульны пункт.

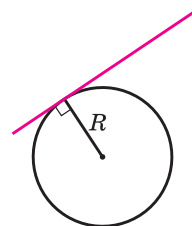
Уласцівасць датычнай: датычная перпендыкулярная радыусу, праведзенаму ў пункт дотыку (рыс. 258).



Рыс. 256



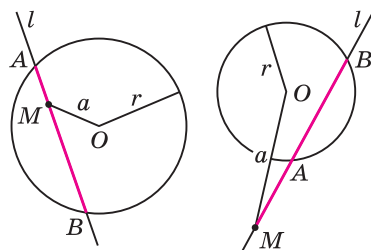
Рыс. 257



Рыс. 258

Прымета датычнай. Прамая з'яўляецца датычнай, калі яна праходзіць праз пункт акружнасці і перпендыкулярная радыусу, праведзенаму ў гэты пункт.

Калі прамая праходзіць праз дадзены пункт і перасякае дадзеную акружнасць, то здабытак адлегласцей ад гэтага пункта да пунктаў перасячэння прамой з акружнасцю ёсць велічыня пастаянная, роўная $r^2 - a^2$, дзе r — радыус круга, a — адлегласць ад цэнтра да выбранага пункта, калі пункт ляжыць унутры круга, і роўная $a^2 - r^2$, калі пункт ляжыць па-за кругам (рыс. 259).



$$MA \cdot MB = |a^2 - r^2|$$

Рыс. 259

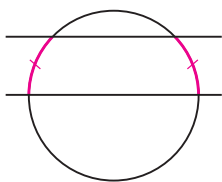
Акружнасць і дзве прамыя

Дзве паралельныя прамыя, кожная з якіх мае агульныя пункты з акружнасцю, высякаюць з акружнасці роўныя дугі (рыс. 260).

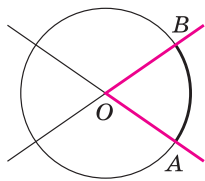
Перасякальныя прамыя ў дачыненні да акружнасці могуць размяшчацца так, што пункт перасячэння або супадае з цэнтрам, або ляжыць на акружнасці, або ляжыць унутры круга, або ляжыць па-за кругам.

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры круга (рыс. 261), называецца *цэнтральным вуглом*. Цэнтральны вугал вымяраецца дугой, на якую абাপіраецца.

Вугал, вяршыня якога належыць акружнасці, а стораны перасякаюць акружнасць, называецца *ўмежаным вуглом*. Умежаны вугал вымяраецца палавінай дугі, на якую ён абাপіраецца. Вугал паміж датычнай і сечнай, праведзенай праз пункт дотыку, вымяраецца палавінай дугі, якую гэты вугал заключае (рыс. 262).

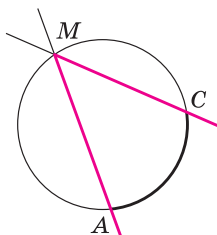


Рыс. 260



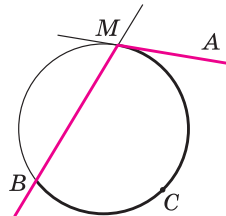
$$\angle AOB = \frown AB$$

Рыс. 261



$$\angle AMC = \frac{1}{2} \frown AC$$

Рыс. 262

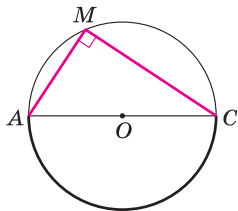


$$\angle AMB = \frac{1}{2} \frown BCM$$

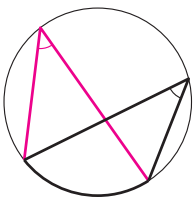
Умежаны вугал, які абাপіраецца на дыяметр, з'яўляецца прамым. Умежаныя вуглы, што абাপіраюцца на адну дугу, роўныя (рыс. 263).

Вугал з вяршыняй унутры круга вымяраецца паўсумай дуг, адна з якіх заключана паміж старанамі дадзенага вугла, а другая — паміж старанамі вугла, вертыкальнага дадзенаму (рыс. 264).

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца па-за кругам, а стораны перасякаюць акружнасць, вымяраецца паўрознасцю дуг, якія заключаны ўнутры вугла (рыс. 265).

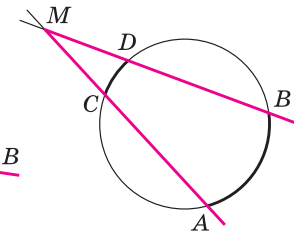
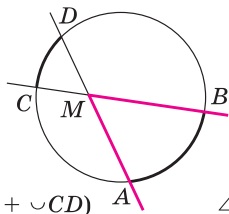


Рыс. 263



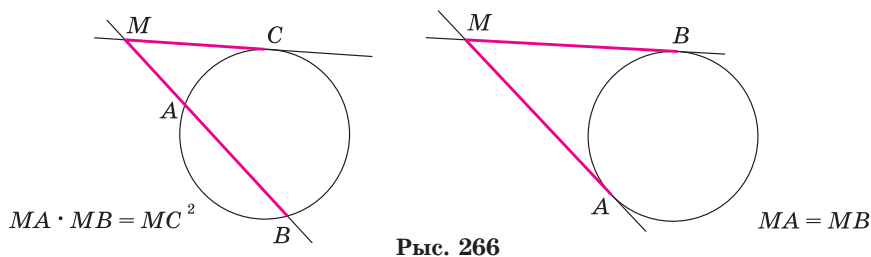
$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\frown AB + \frown CD)$$

Рыс. 264



$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\frown AB - \frown CD)$$

Рыс. 265



Рыс. 266

Калі сечная і датычная праходзяць праз дадзены пункт па-за кругам, то здабытак адлегласцей ад гэтага пункта да пунктаў перасячэння сечнай з акружнасцю роўны квадрату адлегласці ад дадзенага пункта да пункта дотыку датычнай, што праходзіць праз дадзены пункт. Адлегласці ад дадзенага пункта па-за кругам да пунктаў дотыку да дадзенай акружнасці дзвюх датычных, праведзеных праз дадзены пункт, роўныя адна адной (рыс. 266).

Акружнасць і трохвугольнік

Акружнасць, умежаная ў многавугольнік, — гэта акружнасць, якая датыкаецца да ўсіх старон многавугольніка.

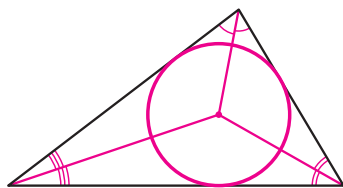
Акружнасць, апісаная каля многавугольніка, — гэта акружнасць, якая праходзіць праз усе вяршыні многавугольніка.

Цэнтр умежанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння бісектрис трохвугольніка (рыс. 267).

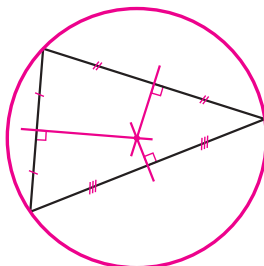
Цэнтр апісанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка (рыс. 268).

Радыусы r і R умежанай і апісанай акружнасцей звязаны з іншымі элементамі трохвугольніка формуламі:

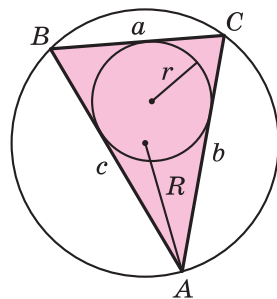
$$r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}; \quad \frac{a}{\sin A} = 2R \quad (\text{рыс. 269}).$$



Рыс. 267



Рыс. 268



Рыс. 269

Г) Чатырохвугольнік

Чатырохвугольнік агульнага выгляду

Плоская замкнёная чатырохзвёнавая ломаная вылучае з плоскасці *чатырохвугольнік*. Чатырохвугольнік на рыс. 270 — *выпуклы*, а на рыс. 271 — *нявыпуклы*. Звычайна разглядаюць выпуклыя чатырохвугольнікі.

Уласцівасці чатырохвугольніка:

- сума ўнутраных вуглоў роўная 360° ;
- сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма (рыс. 272);
- з трохвугольнікаў, на якія дыяганалі раздзяляюць чатырохвугольнік, здабытак плошчаў трохвугольнікаў, прылеглых да адной пары супрацьлеглых старон, роўны здабытку плошчаў трохвугольнікаў, прылеглых да другой пары супрацьлеглых старон (рыс. 273).

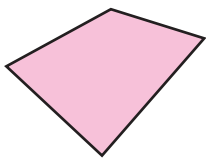


Рис. 270

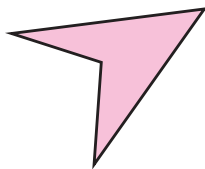


Рис. 271

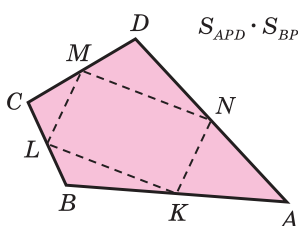


Рис. 272

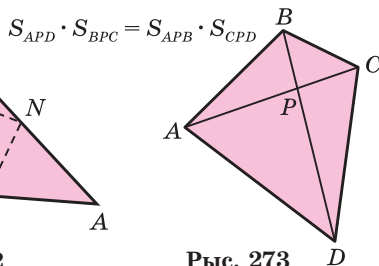


Рис. 273

Чатырохвугольнік і акружнасць

Уласцівасць апісанага чатырохвугольніка (рыс. 274): сумы супрацьлеглых старон роўныя.

Прымета апісанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца апісаным каля акружнасці, калі ў яго роўныя сумы супрацьлеглых старон.

Уласцівасці ўмежанага чатырохвугольніка (рыс. 275):

- сумы супрацьлеглых вуглоў роўныя 180° ;
- здабытак дыяганалей роўны суме здабыткаў супрацьлеглых старон:
 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

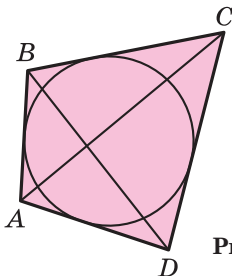


Рис. 274

$$AD + BC = AB + CD$$

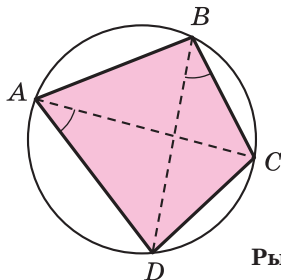


Рис. 275

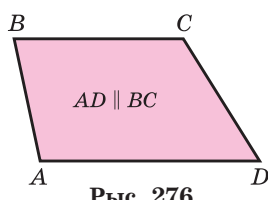
$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

Прыметы ўмежанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца ўмежаным у акружнасць, калі:

- сума супрацьлеглых вуглоў роўная 180° ;
 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;
- вуглы, кожны з якіх утвораны стараной і дыяганаллю і якія абпіраюцца на адну старану, роўныя: $\angle ACB = \angle ADB$,
 або $\angle BAC = \angle BDC$, або $\angle CAD = \angle CBD$, або $\angle ACD = \angle ABD$.

Трапецыя

Трапецыя — чатырохвугольнік, у якога дзве стараны паралельныя, а дзве іншыя не паралельныя (рыс. 276).

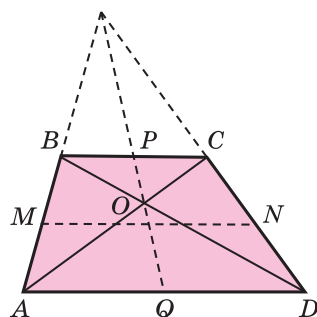


Рыс. 276

Уласцівасці трапецыі (рыс. 277):

- сума вуглоў, прылеглых да бакавой стараны, роўная 180° : $\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle C + \angle D = 180^\circ$;
- сярэдняя лінія трапецыі паралельная яе асноў і роўная іх паўсуме: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$,
 $MN = \frac{1}{2} (AD + BC)$;
- дзве прамыя, якія праходзяць праз бакавыя стараны трапецыі, і прамая, якая праходзіць праз сярэдзіны яе асноў, перасякаюцца ў адным пункце;
- з трохвугольнікаў, на якія раздзяляюць трапецыю дыяганалі, прылеглых да асноў трохвугольнікі падобныя, а прылеглых да бакавых старон — роўнавялікія:

$$\triangle AOD \sim \triangle COB; S_{AOB} = S_{DOC}.$$



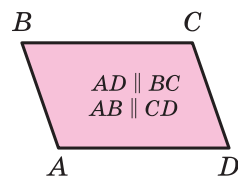
Рыс. 277

Паралелаграм

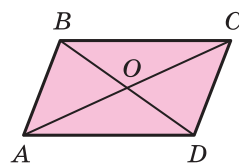
Паралелаграм — чатырохвугольнік, у якога дзве пары паралельных старон (рыс. 278).

Уласцівасці паралелаграма (рыс. 279):

- сума вуглоў, прылеглых да любой яго стараны, роўная 180° ;
 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$,
 $\angle C + \angle D = 180^\circ$, $\angle D + \angle A = 180^\circ$;
- яго супрацьлеглыя стараны паралельныя і роўныя:
 $AD \parallel BC$ і $AB \parallel CD$, $AD = BC$ і $AB = CD$;
- яго супрацьлеглыя вуглы роўныя:
 $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;



Рыс. 278



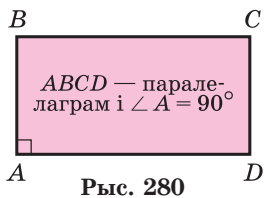
Рыс. 279

- пункт перасячэння дыяганаляў дзеліць іх папалам:
 $AO = CO, BO = DO$.
- пункт перасячэння дыяганаляў ёсць цэнтр сіметрыі паралелаграма.

Прыметы паралелаграма. Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі:

- сумы вуглоў, прылеглых да якіх-небудзь дзвюх сумежных старон, роўныя 180° кожная:
 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ і $\angle B + \angle C = 180^\circ$,
або $\angle B + \angle C = 180^\circ$ і $\angle C + \angle D = 180^\circ$,
або $\angle C + \angle D = 180^\circ$ і $\angle D + \angle A = 180^\circ$,
або $\angle D + \angle A = 180^\circ$ і $\angle A + \angle B = 180^\circ$;
- яго супрацьлеглыя староны паралельныя:
 $AD \parallel BC$ і $AB \parallel CD$;
- яго супрацьлеглыя староны роўныя:
 $AD = BC$ і $AB = CD$;
- ён мае пару супрацьлеглых паралельных і роўных старон:
 $AD \parallel BC$ і $AD = BC$ або $AB = CD$ і $AB \parallel CD$;
- яго супрацьлеглыя вуглы роўныя:
 $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$;
- яго дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам:
 $AO = CO, BO = DO$.

Прамавугольнік



Рыс. 280

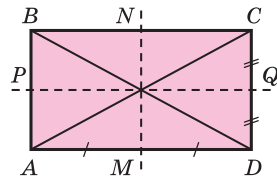
Прамавугольнік — паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал (рыс. 280).

Уласцівасці прамавугольніка (рыс. 281):

- усе яго вуглы роўныя адзін аднаму і прамыя:
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$;
- яго дыяганалі роўныя: $AC = BD$;
- пасярэднія перпендыкуляры да яго старон з'яўляюцца восьямі сіметрыі.

Прыметы прамавугольніка. Паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам, калі:

- яго дыяганалі роўныя: $AC = BD$;
- пасярэдні перпендыкуляр да якой-небудзь староны паралелаграма з'яўляецца яго восью сіметрыі: MN — вось сіметрыі або PQ — вось сіметрыі.



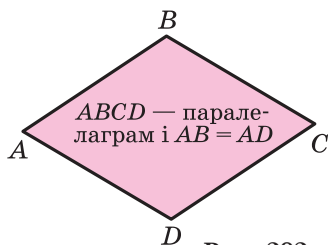
Рыс. 281

Ромб

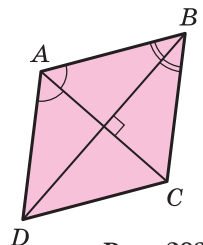
Ромб — паралелаграм, у якога ёсць роўныя сумежныя стораны (рыс. 282).

Уласцівасці ромба (рыс. 283):

- усе яго стораны роўныя адна адной: $AB = BC = CD = DA$;
- яго дыяганалі перпендыкулярныя: $AC \perp BD$;
- яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам:
 $\angle ABD = \angle CBD$ і $\angle BCA = \angle DCA$;
- прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восьмі сіметрыі.



Рыс. 282



Рыс. 283

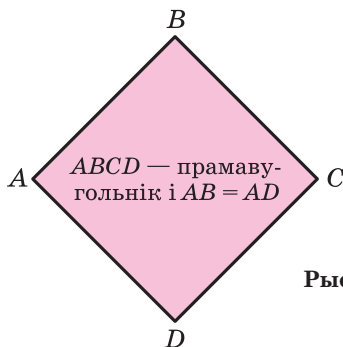
Прыметы ромба. Паралелаграм з'яўляецца ромбам, калі:

- ён мае пару роўных сумежных старон:
 $AB = BC$, або $BC = CD$, або $CD = DA$, або $DA = AB$;
- яго дыяганалі перпендыкулярныя: $AC \perp BD$;
- яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам:
 $\angle ABD = \angle CBD$ і $\angle BCA = \angle DCA$;
- прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восьмі сіметрыі.

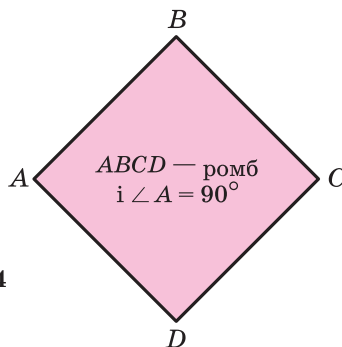
Квадрат

Квадрат — прамавугольнік, у якога ёсць роўныя сумежныя стораны, або ромб, у якога ёсць прамы вугал (рыс. 284).

Паколькі квадрат з'яўляецца і прамавугольнікам, і ромбам, то ў яго ёсць усе ўласцівасці прамавугольніка і ўсе ўласцівасці ромба.



Рыс. 284



Д) Дачыненні паміж фігурамі

Геаметрычныя фігуры могуць знаходзіцца ў дачыненнях роўнасці і падобнасці.

Роўнасць фігур

Роўныя фігуры — фігуры, якія супадаюць пры накладанні, або фігуры, якія пераўтвараюцца адна ў адну пэўным рухам.

Прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Трэхвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі адпаведна:

- дзве стараны і вугал паміж імі ў адным трохвугольніку роўныя дзвюм старанам і вуглу паміж імі ў другім трохвугольніку;
- старана і прылеглыя да яе вуглы ў адным трохвугольніку роўныя старане і прылеглым да яе вуглам у другім трохвугольніку;
- тры стараны ў адным трохвугольніку роўныя тром старанам у другім трохвугольніку.

Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў. Прамавугольныя трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі ў іх адпаведна роўныя:

- катэты;
- катэт і прылеглы да яго востры вугал;
- гіпатэнуза і востры вугал;
- гіпатэнуза і катэт.

Падобнасць фігур

Падобныя многавугольнікі — многавугольнікі з адной і той жа колькасцю старон з адпаведна роўнымі вугламі і адпаведна прапарцыянальнымі старанамі.

Адносіна адпаведных старон падобных многавугольнікаў называецца *каэфіцыентам падобнасці*.

Тэорыя падобнасці грунтуецца на *тэарэме Фалеса*: калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то гэтыя прамыя на другой старане высякаюць таксама роўныя адрэзкі (рыс. 285).

Праўдзіцца *абагульненая тэарэма Фалеса*: шэраг паралельных прамых, якія перасякаюць дзве іншыя прамыя, высякаюць на іх прапарцыянальныя адрэзкі (рыс. 286).

Падобныя трохвугольнікі — трохвугольнікі, вуглы якіх папарна роўныя, а адпаведныя стораны прапарцыянальныя.

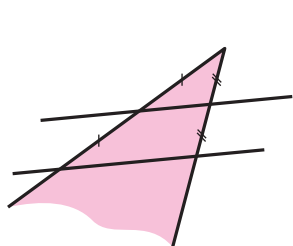


Рис. 285

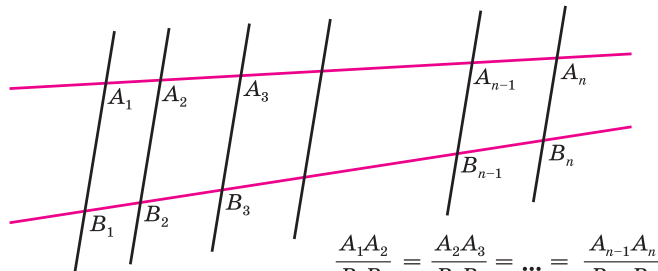


Рис. 286

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$$

Прыметы падобнасці трохвугольнікаў. Трэхвугольнікі з'яўляюцца падобнымі, калі ў іх:

- ёсць па роўным вугле, а прылеглыя да іх стораны прапарцыянальныя;
- ёсць па два роўныя вуглы;
- усе тры стараны прапарцыянальныя.

Адносіна любых адпаведных лінейных элементаў падобных фігур роўная каэфіцыенту падобнасці.

Адносіна перыметраў падобных многавугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці.

Адносіна плошчаў падобных фігур роўная квадрату каэфіцыента падобнасці.

Адносіна аб'ёмаў падобных фігур-цел роўная кубу каэфіцыента падобнасці.



1. Якія дзве прамыя прасторы называюць скрыжаванымі; перасякальнымі; паралельнымі?

2. Сфармулюйце ўласцівасці скрыжаваных прамых; паралельных прамых.

3. Сфармулюйце прымету скрыжаваных прамых; прыметы паралельных прамых.

4. Якія прамую і плоскасць называюць паралельнымі; перасякальнымі; перпендыкулярнымі?

5. Сфармулюйце ўласцівасці паралельнасці прамой і плоскасці; перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.

6. Сфармулюйце прыметы паралельнасці прамой і плоскасці; перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.

7. Якія дзве плоскасці называюць паралельнымі; перасякальнымі; перпендыкулярнымі?

8. Сфармулюйце ўласцівасці паралельнасці плоскасцей; перпендыкулярнасці плоскасцей.

9. Сфармулюйце прыметы паралельнасці плоскасцей; перпендыкулярнасці плоскасцей.

10. Які адрэзак называюць перпендыкулярам да плоскасці; нахіленай да плоскасці; праекцыяй нахіленай да плоскасці?

11. Сфармулюйце тэарэму пра тры перпендыкуляры.

12. Якія вуглы называюць сумежнымі; вертыкальнымі?

13. Сфармулюйце ўласцівасць сумежных вуглоў; вертыкальных вуглоў.

14. Якія вуглы, што ўзнікаюць пры перасячэнні дзвюх прамых трэцяй, называюць адпаведнымі; унутранымі накрывжлеглымі; унутранымі аднабаковымі?

15. Сфармулюйце ўласцівасці паралельных прамых праз вуглы, што ўзнікаюць пры перасячэнні дзвюх прамых трэцяй.

16. Сфармулюйце прыметы паралельных прамых праз вуглы, што ўзнікаюць пры перасячэнні дзвюх прамых трэцяй.

17. Які адрэзак называюць сярэдняй лініяй трохвугольніка; медыянай трохвугольніка; бісектрысай трохвугольніка; вышынёй трохвугольніка?

18. Які вугал называюць знешнім вуглом трохвугольніка?

19. Сфармулюйце ўласцівасці-няроўнасці, што звязваюць стораны і вуглы трохвугольніка.

20. Сфармулюйце ўласцівасці-роўнасці, што звязваюць стораны і вуглы трохвугольніка.

21. Сфармулюйце ўласцівасць знешняга вугла трохвугольніка.

22. Сфармулюйце ўласцівасці сярэдняй лініі трохвугольніка.

23. Сфармулюйце ўласцівасць медыяны трохвугольніка; пункта перасячэння медыян трохвугольніка.

24. Сфармулюйце ўласцівасць бісектрысы трохвугольніка; пункта перасячэння бісектрыс трохвугольніка.

25. Які трохвугольнік называецца востравугольным; прамавугольным; тупавугольным?

26. Як называюцца стораны прамавугольнага трохвугольніка?

27. Сфармулюйце ўласцівасці вуглоў прамавугольнага трохвугольніка; старон прамавугольнага трохвугольніка; медыяны прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы; вышыні прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы.

28. Сфармулюйце прыметы прамавугольнага трохвугольніка.

29. Які трохвугольнік называецца раўнабедраным; роўнастароннім?

30. Сфармулюйце ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка; прыметы раўнабедранага трохвугольніка.

31. Што выражае лік π ?

32. Чаму роўная даўжыня акружнасці; плошча круга?

33. Якая прамая называецца датычнай акружнасці; сечнай акружнасці?

34. Сфармулюйце ўласцівасць датычнай; прымету датычнай.

35. Сфармулюйце ўласцівасць пункта сечнай, размешчанага ўнутры круга; размешчанага па-за кругам.

36. Сфармулюйце ўласцівасць дуг, што высякаюцца з акружнасці паралельнымі прамымі.

37. Які вугал называецца цэнтральным; умежаным?

38. Як вымяраецца цэнтральны вугал; умежаны вугал; вугал з вяршыняй унутры круга; вугал з вяршыняй па-за кругам?

39. Як звязаны паміж сабой адлегласці ад дадзенага пункта сечнай, размешчанага па-за кругам, да пунктаў яе перасячэння з акружнасцю і адлегласць ад дадзенага пункта да пункта дотыку датычнай, што праходзіць праз дадзены пункт?

40. Як звязаны адлегласці ад дадзенага пункта па-за кругам да пунктаў дотыку да дадзенай акружнасці дзвюх датычных, праведзеных праз дадзены пункт?

41. Якая акружнасць называецца ўмежанай у многавугольнік; апісанай каля многавугольніка?

42. Дзе знаходзіцца цэнтр умежанай у трохвугольнік акружнасці; цэнтр апісанай каля трохвугольніка акружнасці?

43. Як радыусы ўмежанай у трохвугольнік акружнасці і апісанай каля трохвугольніка акружнасці звязаны з асноўнымі элементамі трохвугольніка і яго плошчай?

44. Як старана трохвугольніка і яго супрацьлеглы вугал звязаны з радыусам апісанай акружнасці?

45. Сфармулюйце ўласцівасці чатырохвугольніка.

46. Які чатырохвугольнік называецца трапецыяй; паралелаграмам?

47. Які паралелаграм называецца прамавугольнікам; ромбам?

48. Дайце два азначэнні квадрата.

49. Сфармулюйце ўласцівасці трапецыі; паралелаграма; прамавугольніка; ромба.

50. Сфармулюйце прыметы трапецыі; паралелаграма; прамавугольніка; ромба.

51. Сфармулюйце ўласцівасць апісанага чатырохвугольніка; прымету апісанага чатырохвугольніка.

52. Сфармулюйце ўласцівасць умежанага чатырохвугольніка; прымету ўмежанага чатырохвугольніка.

53. Якое дачыненне паміж фігурамі называецца роўнасцю фігур; падобнасцю фігур?

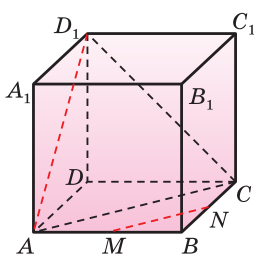
54. Сфармулюйце прыметы роўнасці трохвугольнікаў; прыметы падобнасці трохвугольнікаў.

55. Сфармулюйце прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.

56. Сфармулюйце тэарэму Фалеса; абагульненую тэарэму Фалеса.

57. Чаму роўная адносіна лінейных элементаў падобных фігур; плошчаў падобных фігур; аб'ёмаў падобных фігур?

58. Як дачыненне роўнасці звязана з дачыненнем падобнасці?



Рыс. 287

Задача 1. У кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пункты M і N — сярэдзіны кантаў AB і BC . Знайдзіце вугал паміж прамымі MN і AD_1 .

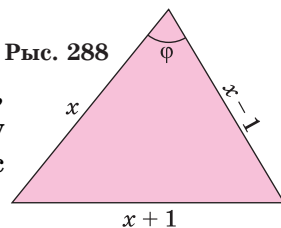
Рашэнне. У кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ правядзём дыяганалі AC і CD_1 граняў $ABCD$ і $CDD_1 C_1$ (рыс. 287).

Паколькі ў трохвугольніку ABC адрэзак MN — сярэдняя лінія, то $MN \parallel AC$ і вугал паміж прамымі MN і AD_1 роўны вуглу паміж прамымі AC і AD_1 . Улічым цяпер, што ў кубе ўсе грані — роўныя квадраты, у якіх роўныя дыяганалі. Таму трохвугольнік ACD_1 — роўнастаронні і, значыць, $\angle CAD_1 = 60^\circ$.

Адказ: 60° .

Задача 2. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, у якога сярэдняя па даўжыні старана на адзінку адрозніваецца ад кожнай іншай стараны, а косінус найбольшага вугла роўны $\frac{5}{13}$.

Рыс. 288



Рашэнне. Няхай даўжыня сярэдняй па велічыні стараны роўная x (рыс. 288). Тады даўжыні дзвюх іншых старон будуць роўнымі $x-1$ і $x+1$. Улічыўшы, што найбольшы вугал φ у трохвугольніку размешчаны насупраць найбольшай стараны, па тэарэме косінусаў атрымаем: $(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2x(x-1) \cos \varphi$.

Паколькі $\cos \varphi = \frac{5}{13}$, то $(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2x(x-1) \cdot \frac{5}{13}$,

або $3x^2 - 42x = 0$. Паколькі x ёсць даўжыня стараны трохвугольніка, то $x > 1$. Таму $x = \frac{42}{3}$. Знайдзем цяпер перыметр P трохвугольніка:

$$P = (x-1) + x + (x+1) = 3x = 3 \cdot \frac{42}{3} = 42.$$

Адказ: 42.

Задача 3. Вуглы ACB , ACD і BAD чатырохвугольніка $ABCD$ адпаведна роўныя 46° , 52° і 82° . Знайдзіце вугал ABD .

Р а ш э н н е. Каля трохвугольніка BCD апішам акружнасць (рыс. 289). Паколькі $\angle BCD = 46^\circ + 52^\circ = 98^\circ$, то градусная мера дугі BD , якая не змяшчае пункта C , роўная $2 \cdot 98^\circ$, г. зн. 196° , а градусная мера дапаўняльнай дугі BCD — $360^\circ - 196^\circ = 164^\circ$.

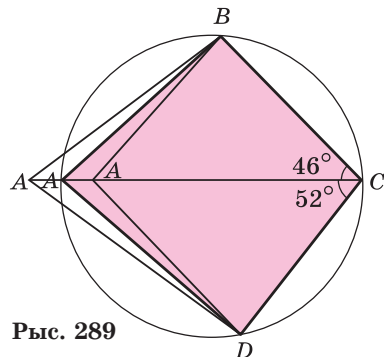


Рис. 289

Заўважыўшы, што $164^\circ : 2 = 82^\circ = \angle BAD$, робім вывад, што пункт A не можа знаходзіцца ні па-за акружнасцю, бо тады вугал BAD быў бы меншы за 82° , ні ўнутры акружнасці, бо тады вугал BAD быў бы большы за 82° . Таму вуглы ACD і ABD з'яўляюцца ўмежанымі і абпіраюцца на адну дугу. Значыць, яны роўныя: $\angle ABD = \angle ACD = 52^\circ$.

А д к а з: 52° .

Задача 4. Дакажыце, што адрэзкі, якія злучаюць вяршыню паралелаграма з сярэдзінамі старон, што збягаюцца ў супрацьлеглай яго вяршыні, раздзяляюць на тры долі дыяганаль, што злучае дзве іншыя вяршыні.

Няхай у чатырохвугольніку $ABCD$ пункты M і N — сярэдзіны старон AD і BC , прамыя AN і CM перасякаюць дыяганаль BD у пунктах P і Q адпаведна (рыс. 290). Трэба даказаць, што $BP = PQ = QD$.

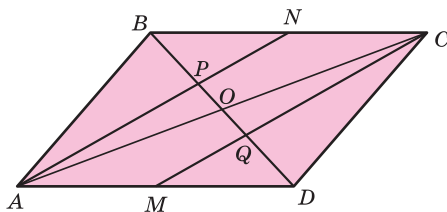


Рис. 290

Правядзём дыяганаль AC , і няхай O — пункт перасячэння AC з BD . Паколькі O — цэнтр сіметрыі як паралелаграма $ABCD$, так і паралелаграма $ANCM$, то $OB = OD$, $OQ = OP$ і $BP = OB - OP = OD - OQ = QD$. Таму застаецца ўпэўніцца, што $BP = 2OP$.

Разгледзім трохвугольнік ABC . У ім AN і BO — медыяны, P — пункт іх перасячэння. Таму роўнасць $BP = 2OP$ праўдзіцца.

Задача 5. У трапецыі $ABCD$ асновы AB і CD роўныя a і b адпаведна. Акружнасць, што праходзіць праз пункты A , D , C , датыкаецца прамой BC . Знайдзіце AC .

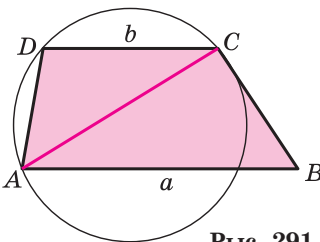


Рис. 291

Р а ш э н н е. Няхай у трапецыі $ABCD$ (рыс. 291) $AB = a$, $CD = b$. Паколькі $AB \parallel CD$, то $\angle ACD = \angle BAC$. Вугал ADC як ўмежаны ў акружнасць вымяраецца палавінай дугі AC , на якую ён абпіраецца. Вугал ACB як вугал паміж хордай AC і датычнай BC вымяраецца палавінай дугі AC , якая заключана ўнутры вугла. Таму $\angle ACB = \angle ADC$ і $\triangle BCA \sim \triangle ADC$ па

двух вуглах. Значыць, $AB : AC = AC : CD$, адкуль $AC^2 = AB \cdot CD = ab$. Таму $AC = \sqrt{ab}$.

Адказ: $\sqrt{ab}$.



380. OA і OB — адрэзкі адной прамой з даўжынямі a і b адпаведна.

Знайдзіце адлегласць паміж:

а) пунктамі A і B ; б) пунктам O і сярэдняй C адрэзка AB .

381. Выкарыстаўшы рысунак:

а) 292, знайдзіце вугал паміж прамымі c і d ;

б) 293, знайдзіце вугал APQ ;

в) 294 і тое, што $BF \parallel CD$, знайдзіце вугал FBD ;

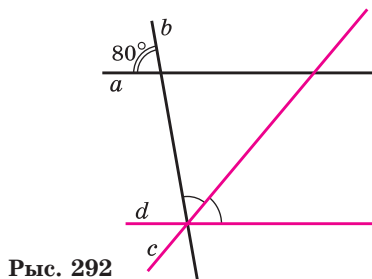
г) 295, знайдзіце вугал AED , улічыўшы, што $CD \parallel AB$;

д) 296, знайдзіце вугал CDE ;

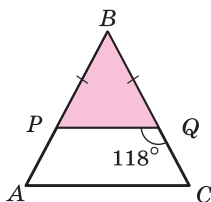
е) 297, знайдзіце вугал KNL ;

ж) 298, дакажыце, што $DE \parallel BC$;

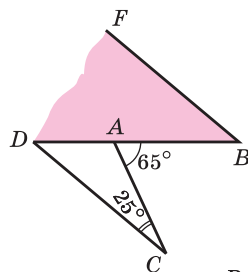
з) 299, дакажыце, што $QN \parallel MP$.



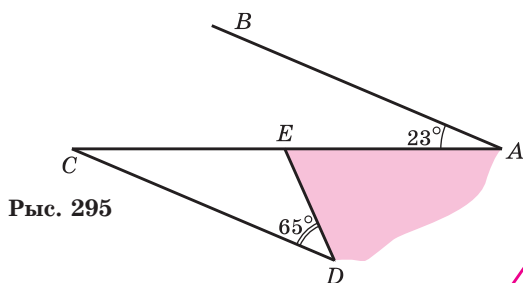
Рыс. 292



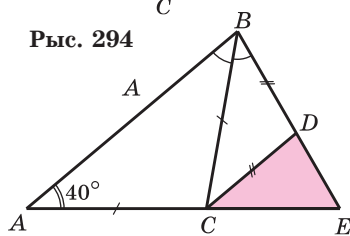
Рыс. 293



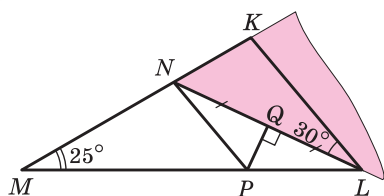
Рыс. 294



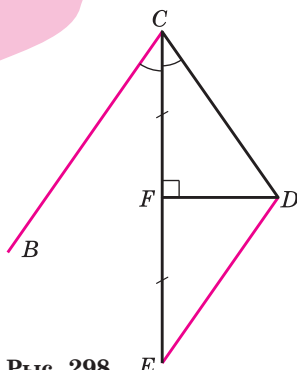
Рыс. 295



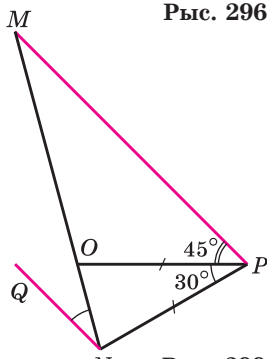
Рыс. 296



Рыс. 297

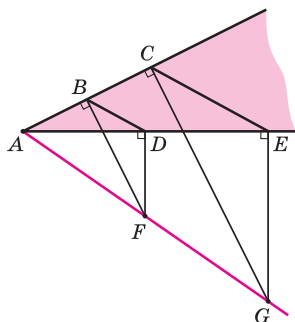


Рыс. 298

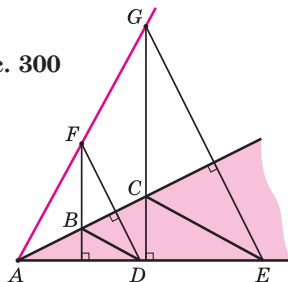


Рыс. 299

382. Дакажыце, што прамень, які выходзіць з вяршыні раўнабедранага трохвугольніка, супрацьлеглай яго аснове, і паралельны гэтай аснове, дзеліць адпаведны знешні вугал папалам.
383. Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі:
 а) двух вуглоў з агульнай стараной, велічыні якіх роўныя α і β і прымяніце вынік да выпадку сумежных вуглоў;
 б) вуглоў AOB і COD , улічыўшы, што яны і вугал BOC адпаведна роўныя α , β і γ , і прымяніце вынік да выпадку вертыкальных вуглоў.
384. Ёсць два паралельныя адрэзкі BD і CE з канцамі на старанах вугла A (рыс. 300). Прамыя, якія праходзяць праз канцы адрэзка BD і перпендыкулярныя старанам вугла, перасякаюцца ў пункце F , а такія самыя прамыя для адрэзка CE — у пункце G . Дакажыце, што пункты A , F , G ляжаць на адной прамой.



Рыс. 300



385. Вызначце, колькі старон мае правільны многавугольнік, кожны з унутраных вуглоў якога роўны:
- а) 135° ; б) 144° ; в) 150° ; г) 156° ; д) $128\frac{4}{7}^\circ$; е) $163\frac{7}{11}^\circ$.
386. Вызначце, колькі старон мае правільны многавугольнік, кожны са знешніх вуглоў якога роўны:
- а) 36° ; б) 24° ; в) $14,4^\circ$; г) $6\frac{2}{3}^\circ$.
387. Знайдзіце старану BC трохвугольніка ABC , у якога вугал A роўны 60° , а стараны AB і AC — адпаведна 5 і 8.
388. Знайдзіце старану AC трохвугольніка ABC і дайце геаметрычнае тлумачэнне атрыманаму выніку, улічыўшы, што:
- а) вугал A роўны 60° , а стараны AB і BC — адпаведна 15 і 13;
 б) вугал A роўны 120° , а стараны AB і BC — адпаведна 16 і 19;
 в) вугал A роўны 60° , а стараны AB і BC — адпаведна $2\sqrt{6}$ і $6\sqrt{2}$;
 г) вугал A роўны α , а стараны AB і BC — адпаведна c і a ; устанавіце, колькі рашэнняў мае задача пры розных значэннях a , b і α .

- 389.** Знайдзіце перыметр трохвугольніка, у якога адна старана роўная 6 см, а прылеглыя да яе вуглы — 45° і 60° .
- 390.** Знайдзіце адносіну старон AC і BC трохвугольніка ABC , вуглы A і B якога адпаведна роўныя 30° і 45° .
- 391.** Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, у якога:
- а) адна старана роўная 10, а вугал супраць яе — 120° ;
 - б) адна старана роўная m , а прылеглыя да яе вуглы — α і β ;
 - в) дзве стараны роўныя a і b , а вышыня, праведзеная да трэцяй стараны, — h .
- 392.** З пункта K , што ляжыць унутры вугла ABC велічынёй 60° , апущаны перпендыкуляры KM і KN на яго стараны. Знайдзіце адрэзак MN , улічыўшы, што $KB = a$.
- 393.** Знайдзіце радыус акружнасці, якая праходзіць праз:
- а) дзве супрацьлеглыя вяршыні прамавугольніка з вымярэннямі 4 і 6 і сярэдзіну большай стараны;
 - б) дзве супрацьлеглыя вяршыні прамавугольніка з вымярэннямі 4 і 6 і сярэдзіну меншай стараны;
 - в) вяршыні вострых вуглоў і сярэдзіну большага катэта прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 12 і 5;
 - г) праз цэнтр квадрата са стараной a , яго вяршыню і сярэдзіну стараны, што не выходзіць з гэтай вяршыні.
- 394.** Дакажыце, што акружнасці, апісаныя каля трохвугольнікаў:
- а) ACK і BCK , дзе K — пункт асновы AB раўнабедранага трохвугольніка ABC , роўныя адна адной;
 - б) ABC і ABH , дзе H — пункт перасячэння вышынь непрамавугольнага трохвугольніка ABC , сіметрычныя адносна прамой AB .
- 395.** Катэты прамавугольнага трохвугольніка роўныя a і b , а гіпатэнуза — c . Знайдзіце радыусы ўмежанай і пазаўмежаных акружнасцей.
- 396.** Улічыўшы, што пункт M — аснова медыяны AM трохвугольніка ABC і $AB > AC$, параўнайце вуглы:
- а) AMB і AMC ; б) BAM і CAM .
- 397.** Улічыўшы, што пункт L — аснова бісектрысы AL трохвугольніка ABC і $AB > AC$, параўнайце:
- а) вуглы ALB і ALC ; б) адрэзкі BL і CL .
- 398.** Улічыўшы, што пункты M , L і H — адпаведна асновы медыяны AM , бісектрысы AL і вышыні AH трохвугольніка ABC з няроўнымі старанамі AB і AC , устанавіце ўзаемнае размяшчэнне гэтых пунктаў на прамой BC .

399. Дакажыце, што сума адлегласцей ад любога:

- а) пункта асновы раўнабедранага трохвугольніка да яго бакавых старон роўная вышыні гэтага трохвугольніка, праведзенай да бакавой стараны;
- б) унутранага пункта роўнастаронняга трохвугольніка да яго старон роўная вышыні гэтага трохвугольніка.

400. Дакажыце, што:

- а) сума дзвюх старон трохвугольніка большая за трэцюю старану менш чым на падвоены адрэзак, што злучае агульны пункт гэтых дзвюх старон з адвольным пунктам трэцяй стараны;
- б) сума адлегласцей ад адвольнага пункта многавугольніка да ўсіх яго вяршынь большая за паўперыметр многавугольніка;
- в) медыяна трохвугольніка меншая за паўсуму старон, што яе заключаюць, і большая за рознасць гэтай паўсумы і палавіны трэцяй стараны.

401. Знайдзіце:

- а) межы, паміж якімі заключана сума медыян трохвугольніка, улічыўшы, што яго стараны роўныя a, b, c ;
- б) пункт, сума адлегласцей ад якога да вяршынь дадзенага чатырхвугольніка найменшая.

402. Дакажыце, што адрэзак, які злучае:

- а) вяршыню трохвугольніка і адвольны пункт супрацьлеглай стараны, меншы за найбольшую з дзвюх іншых старон;
- б) пункты дзвюх старон трохвугольніка, меншы за найбольшую яго старану;
- в) два ўнутраныя пункты трохвугольніка, меншы за найбольшую яго старану.

403. Дакажыце, што бісектрыса прамога вугла прамавугольнага трохвугольніка з рознымі катэтамі дзеліць папалам вугал паміж медыянай і вышынёй, праведзенымі да гіпатэнузы.

404. Знайдзіце:

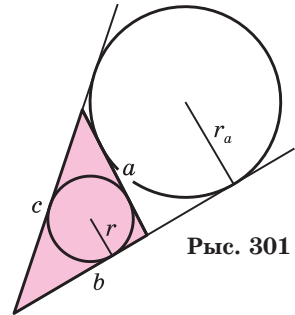
- а) праведзеную да гіпатэнузы вышыню прамавугольнага трохвугольніка, улічыўшы, што яго катэты роўныя a і b ;
- б) старану трохвугольніка, улічыўшы, што праведзеная да яе вышыня роўная h , а дзве іншыя стараны — a і b ;
- в) вышыні трохвугольніка і яго плошчу, улічыўшы, што яго стараны роўныя a, b, c ;
- г) плошчу трохвугольніка, улічыўшы, што яго вышыні роўныя h_a, h_b, h_c ;
- д) медыяны трохвугольніка, улічыўшы, што яго стараны роўныя a, b, c ;
- е) стараны трохвугольніка і яго плошчу, улічыўшы, што яго медыяны роўныя m_a, m_b, m_c ;

- ж) бісектрысы трохвугольніка, улічыўшы, што яго стораны роўныя a, b, c ;
- з) радыус апісанай каля трохвугольніка акружнасці, улічыўшы, што яго стораны роўныя a, b, c .
- 405.** Вызначце, да якой стараны трохвугольніка бліжэй размешчаны пункт перасячэння:
- а) пасярэдніх перпендыкуляраў старон трохвугольніка;
 - б) вышынь трохвугольніка;
 - в) медыян трохвугольніка.
- 406.** Вызначце, да якой вяршыні трохвугольніка бліжэй размешчаны пункт перасячэння:
- а) бісектрыс трохвугольніка;
 - б) вышынь трохвугольніка;
 - в) медыян трохвугольніка.
- 407.** Вызначце, які з трох адрэзкаў найменшы, улічыўшы, што гэтыя адрэзкі ёсць:
- а) вышыні аднаго трохвугольніка;
 - б) медыяны аднаго трохвугольніка;
 - в) бісектрысы трохвугольніка.
- 408.** Вызначце:
- а) ці можна рознастаронні трохвугольнік разрэзаць на два роўныя трохвугольнікі;
 - б) колькімі спосабамі роўнастаронні трохвугольнік можна разрэзаць на два роўныя трохвугольнікі.
- 409.** Дакажыце, што квадрат бісектрысы трохвугольніка роўны здабытку старон, якія выходзяць з той самай вяршыні, што і бісектрыса, паменшанаму на здабытак адрэзкаў, на якія аснова бісектрысы дзеліць супрацьлеглую старану.
- 410.** Знайдзіце вугал паміж:
- а) вышынёй і бісектрысай, праведзенымі з адной вяршыні трохвугольніка, улічыўшы, што вуглы, прылеглыя да стараны, супрацьлеглай гэтай вяршыні, роўныя α і β ;
 - б) вышынёй і медыянай, праведзенымі з вяршыні прамога вугла прамавугольнага трохвугольніка, улічыўшы, што яго востры вугал роўны α .
- 411.** Дакажыце, што плошча востравугольнага трохвугольніка роўная здабытку радыуса апісанага круга і паўперыметра трохвугольніка, утворанага асновамі вышынь.
- 412.** На старанах вугла A велічынёй 75° выбраны такія пункты K і L , што $AK = \sqrt{2}$ і $AL = \sqrt{3}$, а на прамені, што выходзіць з пункта A і праходзіць унутры вугла пад вуглом 45° да праменя AL , — такі пункт M ,

што $AM = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Дакажыце, што пункты K, L, M ляжаць на адной прамой.

413. Вышыня трохвугольніка роўная h , а адрэзкі, на якія супрацьлеглая старана раздзяляецца асновай вышыні, — k і l . Знайдзіце адрэзкі, на якія раздзяляецца гэтая вышыня другой вышынёй трохвугольніка.

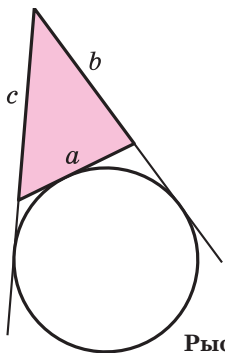
414. Дакажыце, што радыус r акружнасці, умежанай у трохвугольнік са старанамі a, b, c , і радыус r_a яго пазаўмежанай акружнасці, якая датыкаецца да стараны даўжынёй a (рыс. 301), звязаны формулай $rr_a = (p - b)(p - c)$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка.



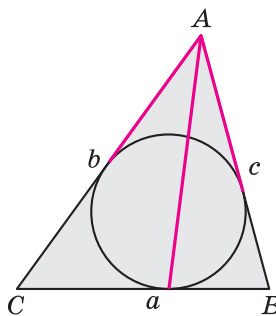
Рыс. 301

415. Стороны трохвугольніка роўныя a, b, c . Знайдзіце:

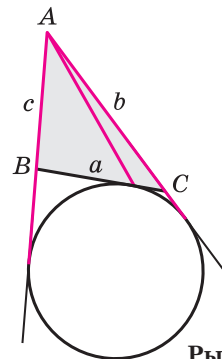
- радыус пазаўмежанай акружнасці, якая датыкаецца да стараны a (рыс. 302);
- адлегласці ад вяршыні A да пункта дотыку ўмежанай акружнасці і стараны AB трохвугольніка (рыс. 303);
- адлегласці ад вяршыні A да пунктаў дотыку супрацьлеглай пазаўмежанай акружнасці да прамой AB (рыс. 304).



Рыс. 302



Рыс. 303



Рыс. 304

- 416.** Ёсць трохвугольнік, у якога адзін з вуглоў не меншы за 90° . Яго востры вугал раздзелены прамянямі на некалькі доляў. Дакажыце, што гэтыя прамені дзеляць супрацьлеглую старану на часткі, даўжыні якіх нарастаюць, калі лічыць ад вяршыні большага вугла.
- 417.** Ёсць трохвугольнік, у якога адзін з вуглоў не меншы за 90° . Адна са старон гэтага вугла раздзелена на некалькі доляў. Дакажыце, што прамені, якія выходзяць з вяршыні супрацьлеглага вугла і праходзяць праз пункты дзялення, раздзяляюць гэты вугал на часткі,

велічыні якіх спадаюць, калі лічыць ад другой стараны большага вугла.

418. Знайдзіце:

а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ$; в) $\operatorname{tg} 105^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 135^\circ$.

419. Выкарыстаўшы рыс. 305, на якім каля акружнасці апісаны квадрат і ў яго ўмежаны правільны шасцівугольнік, дакажыце, што лік π заключаны паміж лікамі 3 і 4.

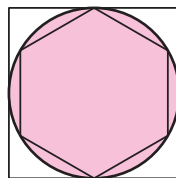


Рис. 305

420. Устаноўце, як два кругі з радыусамі r і $3r$ размешчаны ў дачыненні адзін да аднаго, улічыўшы, што іх цэнтры адлеглыя на:

а) r ; б) $2r$; в) $3r$; г) $4r$; д) $5r$.

421. Улічыўшы, што M — унутраны пункт трохвугольніка ABC , параўнайце вуглы BAC і BMC .

422. Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўная a , аснова — b , а вышыня, праведзеная да асновы, — h . Выразіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, праз кожныя дзве з трох дадзеных зменных.

423. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі дотыку знешняй датычнай дзвюх датыкальных акружнасцей з радыусамі r і R .

424. Цэнтры дзвюх акружнасцей з радыусамі r і R адлеглыя на d . Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі дотыку іх:

а) знешняй датычнай; б) унутранай датычнай.

425. Знайдзіце радыус круга, які датыкаецца да дзвюх знешне датыкальных акружнасцей з радыусамі r і R і да іх агульнай датычнай (рыс. 306).

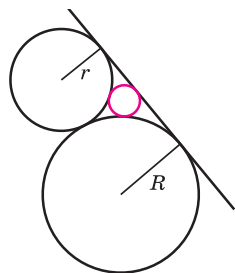
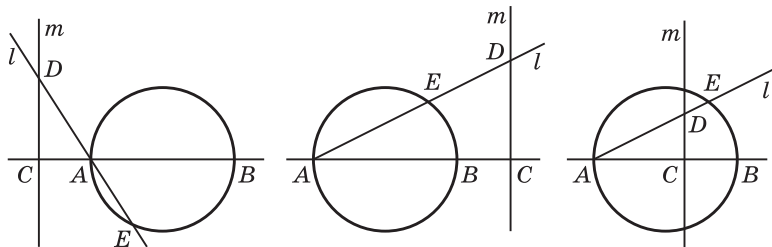


Рис. 306

426. Вызначце, колькі аднолькавых кругоў можна размясціць вакол круга такога самага радыуса так, каб кожны з іх датыкаўся да гэтага круга і двух суседніх.

427. Праз адвольна выбраны пункт прамой, якой належыць агульная хорда дзвюх перасякальных акружнасцей, праведзены іх датычныя. Дакажыце, што адлегласці ад гэтага пункта да пунктаў дотыку роўныя адна адной.

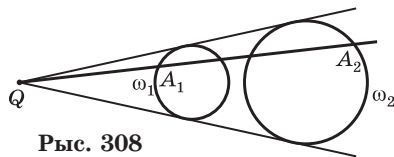
428. У акружнасць умежаны трохвугольнік ABC , у якога $AB = 2\sqrt{3}$. Знайдзіце вугал C , улічыўшы, што цэнтр акружнасці знаходзіцца па-за трохвугольнікам на адлегласці 1 ад стараны AB .



Рыс. 307

429. Праз канец A дыяметра AB дадзенай акружнасці праведзена прамая l , якая перасякае другую прамую m , перпендыкулярную прамой AB (рыс. 307). Дакажыце, што здабытак адлегласцей ад пункта A да пунктаў D і E перасячэння прамой l з прамой m і акружнасцю ёсць пастаянная велічыня.

430. Праз пункт Q перасячэння знешніх датычных акружнасцей ω_1 і ω_2 праведзена іх сечная (рыс. 308). Дакажыце, што для любой такой сечнай здабытак $QA_1 \cdot QA_2$ ёсць пастаянная велічыня.



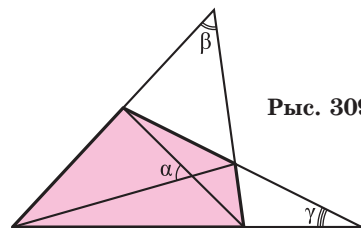
Рыс. 308

431. Вуглы, прылеглыя да адной стараны ўмежанага ў акружнасць трохвугольніка, роўныя α і β . Знайдзіце вугал паміж гэтай стараной і датычнай акружнасці, праведзенай праз супрацьлеглую вяршыню.

432. Знайдзіце вуглы ўмежанага ў акружнасць чатырохвугольніка, улічыўшы, што вуглы паміж супрацьлеглымі старанамі роўныя α і β (рыс. 309).

433. Вызначце, якая з:

- хордаў, што праходзяць праз пункт унутры круга, найменшая;
- сечных, што праходзяць праз дадзены пункт па-за кругам, мае з ім найбольшую агульную частку.



Рыс. 309

434. Два вуглы востравугольнага трохвугольніка, умежанага ў акружнасць, роўныя α і β . Знайдзіце вуглы трохвугольніка, утворанага датычнымі акружнасці, праведзенымі праз вяршыні дадзенага трохвугольніка.

435. Дакажыце, што:

- вышыня трохвугольніка і радыус апісанага каля яго круга, праведзеныя з адной вяршыні, утвараюць роўныя вуглы са старанамі трохвугольніка, што выходзяць з той самай вяршыні;
- асновы вышын трохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі трохвугольніка, для якога вышыні дадзенага трохвугольніка з'яўляюцца бісектрысамі;

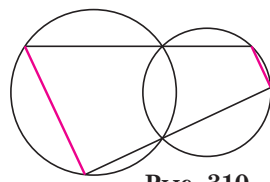
в) калі з чатырох пунктаў адзін з'яўляецца артацэнтрам трохвугольніка з вяршынямі ў трох астатніх пунктах, то кожны з гэтых пунктаў з'яўляецца артацэнтрам трохвугольніка з вяршынямі ў трох астатніх пунктах;

г) бісектрыса ўнутранага вугла трохвугольніка і бісектрысы двух знешніх вуглоў пры дзвюх іншых вяршынях перасякаюцца ў адным пункце, які роўнаадлеглы ад стараны, супрацьлеглай гэтаму ўнутранаму вуглу, і ад прамых, што праходзяць праз дзве іншыя стараны;

д) з шасці бісектрыс унутраных і знешніх вуглоў трохвугольніка кожныя тры, якія перасякаюцца ў адным пункце, з'яўляюцца вышынямі трохвугольніка з вяршынямі ў трох астатніх пунктах.

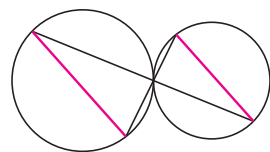
436. Дакажыце, што хорды дзвюх:

а) перасякальных акружнасцей, якія злучаюць пункты перасячэння з імі дзвюх сечных, што праходзяць праз пункты перасячэння акружнасцей, паралельныя адна адной (рыс. 310);



Рыс. 310

б) датыкальных акружнасцей, якія злучаюць пункты перасячэння з імі дзвюх сечных, што праходзяць праз пункт дотыку акружнасцей, паралельныя адна адной (рыс. 311).



Рыс. 311

437. Адрэзак, які злучае вяршыню трохвугольніка з унутраным пунктам супрацьлеглай стараны, раздзяляе яго на два трохвугольнікі. Дакажыце, што гэтая вяршыня і цэнтры акружнасцей, апісаных каля гэтых і дадзенага трохвугольнікаў, ляжаць на адной акружнасці.

438. Дакажыце, што адлегласць ад цэнтра акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, да стараны трохвугольніка ў два разы меншая за адлегласць ад артацэнтра да супрацьлеглай вяршыні.

439. Дакажыце, што прамая, якая паралельная датычнай у вяршыні ўмежанага трохвугольніка і перасякае стараны, што выходзяць з гэтай вяршыні, адсякае ад трохвугольніка такі чатырохвугольнік, каля якога можна апісаць акружнасць.

440. Дакажыце, што:

а) сума квадрата адлегласці артацэнтра трохвугольніка ад яго вяршыні і квадрата супрацьлеглай стараны роўная квадрату дыяметра апісанай акружнасці;

б) сума трох складаемых, кожнае з якіх ёсць здабытак вышыні востравугольнага трохвугольніка і адлегласці артацэнтра да вяршыні, з якой праведзена гэтая вышыня, роўная паўсуме квадратаў старон трохвугольніка.

441. На адрэзку і дзвюх яго палавінах у адной паў-
плоскасці пабудаваны паўкругі (рыс. 312).
Улічыўшы, што радыус меншага паўкруга
роўны r , знайдзіце радыус круга, які даты-
каецца да ўсіх трох паўкругоў.

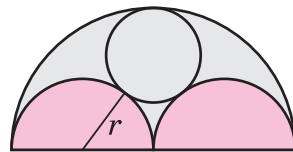


Рис. 312

442. На адрэзку і дзвюх яго няроўных частках па адзін бок пабудаваны
паўкругі. Улічыўшы, што радыусы двух меншых паўкругоў роўныя
 R і r , знайдзіце радыус круга, які датыкаецца да ўсіх трох паў-
кругоў.

443. Прамавугольны сектар з радыусам r , дугой з такім
самым радыусам і з цэнтрам у канцы дугі сектара
раздзелены на дзве часткі (рыс. 313). Знайдзіце ра-
дыус круга, умежанага ў:

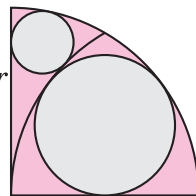


Рис. 313

- а) большую частку; б) меньшую частку.

444. Устаноўце, ці можа:

- а) умежаны многавугольнік мець роўныя вуглы і няроўныя стораны;
б) умежаны многавугольнік мець роўныя стораны і няроўныя вуглы;
в) апісаны многавугольнік мець роўныя вуглы і няроўныя стораны;
г) апісаны многавугольнік мець роўныя стораны і няроўныя вуглы.

445. Знайдзіце радыус кожнага з:

- а) трох роўных кругоў, якія ўмежаны ў круг
з радыусам R і датыкаюцца адзін да аднаго
(рыс. 314);
б) чатырох роўных кругоў, якія датыкаюцца
да круга з радыусам R і да двух з гэтых роўных
кругоў (рыс. 315).

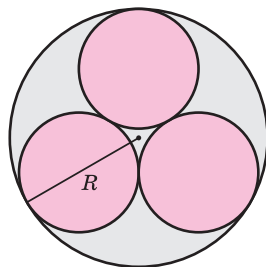


Рис. 314

446. Ёсць роўнастаронні трохвугольнік, умежаны
ў акружнасць. Дакажыце, што адлегласць лю-
бога пункта дугі, што сцягваецца якой-
небудзь стараной трохвугольніка, ад супраць-
леглай вяршыні роўная суме адлегласцей
гэтага пункта ад дзвюх іншых вяршынь.

447. Выразіце праз радыус r акружнасці старану
правільнага апісанага:

- а) трохвугольніка; г) васьмівугольніка;
б) чатырохвугольніка; д) пяцівугольніка.
в) шасцівугольніка;

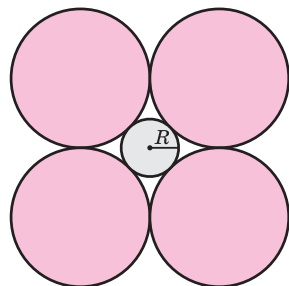


Рис. 315

448. Выразіце праз радыус акружнасці старану і дыяганалі правільнага
ўмежанага:

- а) трохвугольніка; г) пяцівугольніка;
б) чатырохвугольніка; д) дзесяцівугольніка.
в) шасцівугольніка;

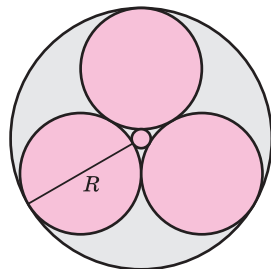
449*. Стораны трохвугольніка роўныя a, b, c . Знайдзіце адлегласць:



- а) ад артацэнтра трохвугольніка да яго вяршыні A ;
- б) ад цэнтра акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, да яго стараны AB ;
- в) ад цэнтра акружнасці, умежанай у трохвугольнік, да яго вяршыні A ;
- г) ад цэнтра J_A пазаўмежанай акружнасці трохвугольніка да вяршыні A ;
- д) паміж цэнтрамі ўмежанай і пазаўмежанай акружнасцей.

450. Тры роўныя акружнасці папарна датыкаюцца. Яшчэ адна акружнасць датыкаецца да іх знешнім чынам, а другая — унутраным (рыс. 316). Знайдзіце адносіну іх радыусаў.

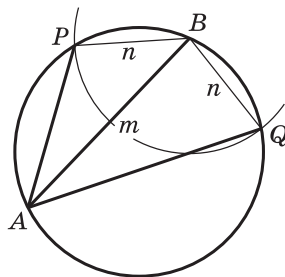
451. Канец B хорды AB акружнасці з радыусам R з'яўляецца цэнтрам акружнасці з радыусам n , якая перасякае дадзеную акружнасць у пунктах P і Q (рыс. 317). Знайдзіце хорды AP і AQ , улічыўшы, што хорда AB роўная m .



Рыс. 316

452. Знайдзіце адлегласць:

- а) паміж сярэдзінамі дыяганалей трапецыі, улічыўшы, што асновы трапецыі роўныя a і b ;
- б) адлегласць ад сярэдзіны адрэзка да прамой, улічыўшы, што яго канцы адлеглы ад гэтай прамой на a і b ;
- в) адлегласць ад вяршыні паралелаграма да прамой, якая праходзіць праз супрацьлеглую вяршыню, улічыўшы, што дзве іншыя вяршыні адлеглы ад гэтай прамой на a і b .



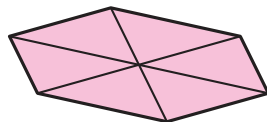
Рыс. 317

453. Вуглы A, B, C чатырохвугольніка $ABCD$ роўныя α, β і γ . Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі:

- а) вуглоў A і B ;
- б) вуглоў A і C ;
- в) двух вуглоў, утвораных парамі прамых, якім належаць супрацьлеглыя стараны.

454. Дакажыце, што:

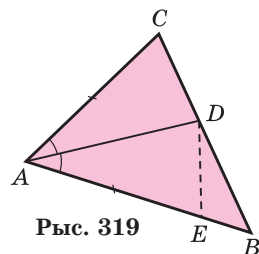
- а) калі супрацьлеглыя стараны шасцівугольніка роўныя і паралельныя, то тры яго дыягалі, якія злучаюць супрацьлеглыя вяршыні, перасякаюцца ў адным пункце (рыс. 318);
- б) калі супрацьлеглыя стараны чатырохвугольніка не паралельныя, то тры прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны супрацьлеглых старон і сярэдзіны дыяганалей, перасякаюцца ў адным пункце;



Рыс. 318

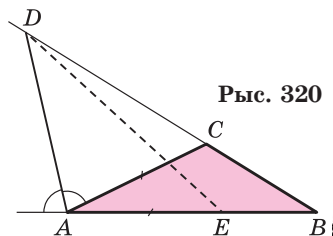
- в) сярэдзіны дыяганаляў трапецыі і сярэдзіны бакавых старон ляжаць на адной прамой.
455. Асновы трапецыі роўныя a і b , а бакавыя стараны — c і d . Знайдзіце:
а) дыяганалі трапецыі; б) плошчу трапецыі.
456. Дакажыце, што сума квадратаў дыяганаляў трапецыі роўная суме квадратаў бакавых старон і падвоянага здабытку асноў.
457. Знайдзіце рознасць квадратаў дыяганаляў паралелаграма, улічыўшы, што:
а) яго ўнутраны пункт адлеглы ад вяршынь на a, b, c, d ;
б) яго стараны роўныя m і n , а плошча — S .
458. Знайдзіце плошчу паралелаграма, улічыўшы, што яго стараны роўныя m і n , а ўнутраны пункт адлеглы ад вяршынь на a, b, c, d .
459. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка, улічыўшы, што яго стараны роўныя a, b, c і d , а дыяганалі — k і l .
460. Вызначце, пры якой умове:
а) каля паралелаграма можна апісаць акружнасць;
б) каля трапецыі можна апісаць акружнасць;
в) у паралелаграм можна ўмежыць акружнасць.
- 461*. Дакажыце, што здабытак дыяганаляў умежанага чатырохвугольніка роўны суме здабыткаў яго супрацьлеглых старон (тэарэма Пталемея).
462. Стараны умежанага чатырохвугольніка роўныя a, b, c і d . Знайдзіце яго:
а) дыяганалі; б) плошчу.
463. Ёсць два падобныя трохвугольнікі, стараны аднаго з якіх роўныя 5, 6, 8, а найменшая старана другога — 15. Знайдзіце дзве іншыя стараны другога трохвугольніка.
- 464*. Дакажыце, што:
 а) два паралелаграмы падобныя, калі ў іх ёсць па роўным вугле, стараны якіх прапарцыянальныя;
б) два прамавугольнікі падобныя, калі яны маюць пару прапарцыянальных сумежных старон;
в) два любыя квадраты падобныя.
465. Знайдзіце даўжыню адрэзка, канцы якога:
а) ляжаць на старанах трохвугольніка і дзеляць кожную ў адносіне $n : m$, калі лічыць ад іх агульнай вяршыні, улічыўшы, што трэцяя старана трохвугольніка роўная a ;
б) ляжаць на бакавых старанах трапецыі і дзеляць іх у адносіне $m : n$, калі лічыць ад большай асновы даўжынёй a , пры гэтым меншая аснова роўная b .

466. Вяршыні трохвугольніка адлеглыя ад прамой, якая не перасякае яго, на k , l , m . Знайдзіце адлегласць ад гэтай прамой да артацэнтра трохвугольніка.
467. Ёсць трапецыя з асновамі a і b . Знайдзіце:
- адносіну адрэзкаў кожнай дыяганалі, на якія яны дзеляцца пунктамі перасячэння;
 - адносіну адлегласцей ад пункта перасячэння бакавых старон да канцоў кожнай з іх;
 - даўжыню адрэзка прамой, праведзенай паралельна асновам праз пункт перасячэння дыяганаляў, прычым канцы адрэзка належаць бакавым старанам;
 - даўжыню адрэзка прамой, праведзенай паралельна асновам праз пункт перасячэння прамых, што змяшчаюць бакавыя староны, прычым канцы адрэзка належаць прамым, што змяшчаюць дыяганалі.
468. Дакажыце, што прамой, якая праходзіць праз сярэдзіны асноў трапецыі, належыць пункт перасячэння яе дыяганаляў і пункт перасячэння прамых, праведзеных праз бакавыя староны.
469. Вуглы B і C трохвугольніка ABC роўныя β і γ адпаведна, прычым $\beta < \gamma$. Аснова D бісектрысы AD злучана з такім пунктам E стараны AB , што $AE = AC$. Знайдзіце вугал BDE , улічыўшы, што адрэзак AD з'яўляецца бісектрысай:
- унутранага вугла A (рыс. 319);
 - знешняга вугла пры вяршыні A (рыс. 320).



Рыс. 319

470. Ёсць трохвугольнік са старанамі a , b , c . Знайдзіце адлегласці ад канцоў стараны даўжынёй a да пункта, у якім бісектрыса знешняга вугла пры супрацьлеглай вяршыні перасякае прамую, што праходзіць праз гэтую старану.



Рыс. 320

471. Праз пункт перасячэння бісектрыс трохвугольніка праведзена прмая, паралельная адной са старон. Дакажыце, што адрэзак гэтай прамой, заключаны паміж старанамі трохвугольніка, роўны суме адрэзкаў старон, заключаных паміж паралельнымі прамымі.
472. Адзін з вуглоў трохвугольніка роўны α . Знайдзіце вугал, які ўтвараюць:
- бісектрысы ўнутраных вуглоў, прылеглых да стараны, супрацьлеглай вуглу α ;
 - бісектрысы знешніх вуглоў, прылеглых да стараны, супрацьлеглай вуглу α ;

в) бісектрыса аднаго з унутраных вуголоў, прылеглых да стараны, супрацьлеглай вуглу α , і бісектрыса знешняга вугла пры другім канцы гэтай стараны.

473. Прамая перасякае дзве стараны трохвугольніка і прамую, якая праходзіць праз трэцюю яго старану. Улічыўшы, што пунктамі перасячэння першая і другая стараны дзеляцца ў адносінах k і l , знайдзіце адносіну адлегласцей ад пункта перасячэння прамой з працягам трэцяй стараны да яе канцоў.

474. Праз сярэдзіну хорды даўжынёй a праведзена другая хорда даўжынёй b . Знайдзіце адрэзкі, на якія гэтая хорда дзеліцца першай хордай.

475. Акружнасць датыкаецца да адной стараны трохвугольніка і перасякае другую яго старану ў пунктах, адлеглых ад вяршыні на a і на b . Знайдзіце адлегласць ад вяршыні трохвугольніка да пункта дотыку.

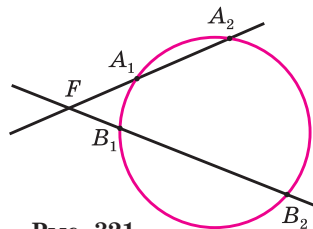
476. Праз пункт унутры круга з радыусам r , адлеглы ад цэнтра на a , праведзены дыяметр і перпендыкулярная яму хорда. Знайдзіце гэтую хорду.

477. Праз пункт па-за кругам з радыусам r , адлеглы ад цэнтра на a , праведзена датычная. Знайдзіце адлегласць ад гэтага пункта да пункта дотыку.

478*. Выкарыстаўшы ўласцівасць унутранага пункта хорды акружнасці, дакажыце тэарэму косінусаў і тэарэму Піфагора.



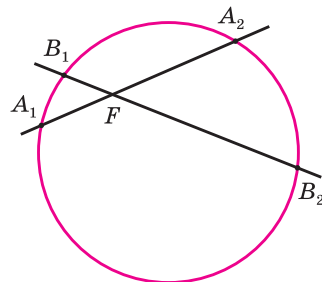
479. Дакажыце, што адлегласць пункта акружнасці ад яе хорды роўная сярэдняму геаметрычнаму адлегласцей канцоў хорды ад датычнай акружнасці ў гэтым пункце.



Рыс. 321

480. Ад пункта F перасячэння прамых на адной з іх адзначаны такія пункты A_1 і A_2 , а на другой — такія пункты B_1 і B_2 , што $FA_1 \cdot FA_2 = FB_1 \cdot FB_2$, пры гэтым пункты азначаліся на абедзвюх прамых па адзін бок (рыс. 321) або на абедзвюх прамых па розныя бакі ад пункта F (рыс. 322). Дакажыце, што пункты A_1, A_2, B_1 і B_2 ляжаць на адной акружнасці.

481*. Знайдзіце плошчу правільнага дзесяцівугольніка, улічыўшы, што яго старана роўная a .



Рыс. 322

482*. Выразіце праз радыус акружнасці старану правільнага ўмежанага:



- а) дванаццацівугольніка;
- б) пятнаццацівугольніка;
- в) шаснаццацівугольніка.

483*. Пабудуйце правільны дванаццацівугольнік і правядзіце ўсе яго дыяганалі. Знайдзіце пункты, праз якія дакладна праходзяць:



- а) тры дыяганалі;
 - б) чатыры дыяганалі.
- Абгрунтуйце атрыманыя гіпотэзы.

§ 9. Геаметрычныя велічыні

У школьнай матэматыцы вывучаюць чатыры велічыні — градусную меру вугла, даўжыню адрэзка, плошчу фігуры, аб’ём цела.

Выкарыстанне велічыні дазваляе выразіць вынік параўнання геаметрычнай фігуры Φ з фігурай, з якой супастаўлены лік 1, пэўным рэчаісным лікам r . Гэтае супастаўленне задае пэўную функцыю $r = f(\Phi)$. Выбар фігуры-эталона азначае выбар адзінкі вымярэння. Акрамя асноўнай адзінкі выкарыстоўваюць і вытворныя ад яе, якія ў метрычнай сістэме мер утвараюцца аднастайным чынам з дапамогай прыставак грэчаскага паходжання.

Прыстаўка	Абазначэнне	Множнік
гіга	Г	10^9
мега	М	10^6
кіла	к	10^3
гекта	г	10^2

Прыстаўка	Абазначэнне	Множнік
дэцы	д	10^{-1}
санты	с	10^{-2}
мілі	м	10^{-3}
мікра	мк	10^{-6}

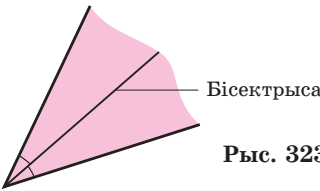
З дапамогай функцыі $r = f(\Phi)$ можна так сфармуляваць агульныя ўласцівасці геаметрычных велічынь:

- вынік вымярэння ёсць неадмоўны лік, г. зн. $f(\Phi) \geq 0$;
- калі фігуры Φ_1 і Φ_2 роўныя, то вынікі іх вымярэння таксама роўныя, г. зн. калі $\Phi_1 = \Phi_2$, то $f(\Phi_1) = f(\Phi_2)$;
- калі фігура Φ раздзелена на часткі Φ_1 і Φ_2 , то вынік вымярэння фігуры Φ роўны суме вынікаў вымярэння фігур Φ_1 і Φ_2 , г. зн. $f(\Phi) = f(\Phi_1) + f(\Phi_2)$.

А) Меры вугла і дугі

Два прамені з агульным пачаткам раздзяляюць плоскасць на дзве часткі (гл. рыс. 266), кожную з якіх разам з прамянямі называюць *вуглом*, самі прамені — *старанамі* вугла, а іх агульны пачатак — *вяршыняй* вугла. Вугал абазначаюць знакам $\angle$.

Прамень, што выходзіць з вяршыні вугла і дзеліць яго папалам, называюць *бісектрысай вугла* (рыс. 323).



Рыс. 323

$$\angle RST = \angle QST$$

$$\angle RST + \angle QST = 180^\circ$$

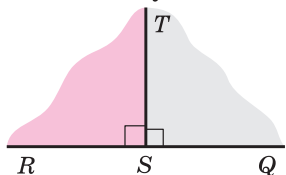


Рис. 324

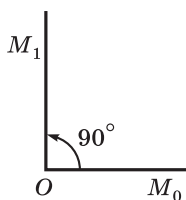


Рис. 325



Рис. 326

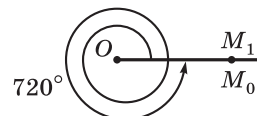


Рис. 327

Вугал, стораны якога з'яўляюцца супрацьлеглымі праменьнямі, называюць *разгорнутым*, яго стовасьмідзясятую долю называюць *градусам* і абазначаюць знакам $^\circ$. Градус ёсць адзінка вымярэння велічыні вугла, якую называюць *градуснай мерай вугла*.

Шасцідзясятую долю градуса называюць *мінутай*, шасцідзясятую долю минуты — *секундай*. Мінуту абазначаюць знакам $'$, секунду — знакам $''$.

Вугал, роўны свайму сумежнаму вуглу, называюць *прамым*, гэта паказваюць так, як на рис. 324.

Вугал, меншы за прамы, называюць *вострым*, а вугал, большы за прамы і меншы за разгорнуты, — *тупым*.

Вугал можна разглядаць як меру павароту праменя OM вакол свайго пачатку O ад яго поўнага першапачатковага становішча OM_0 . Тады чвэрць поўнага абароту дае прамы вугал (рис. 325), поўны абарот — вугал велічынёй 360° (рис. 326), а два поўныя абароты — вугал велічынёй 720° (рис. 327).

Пры вымярэнні вуглоў, звязаных з акружнасцю, карыстаюцца паняццем градуснай меры дугі. *Градуснай мерай дугі* акружнасці называецца градусная мера адпаведнага цэнтральнага вугла. Напрыклад, градусная мера чвэрці акружнасці роўная 90° , паўакружнасці — 180° , трох чвэрцяў акружнасці — 270° , усёй акружнасці — 360° (рис. 328).

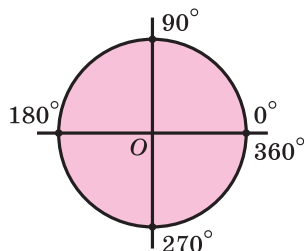


Рис. 328

Яшчэ адной адзінкай вугла з'яўляецца *град*, пад ім разумеюць сотую долю прамога вугла.

Важным для матэматыкі з'яўляецца радыяннае вымярэнне вуглоў. Няхай зафіксавана адна са старон вугла. Калі вярцець другую яго старану вакол вяршыні, то ўтвараецца поўны вугал. Адносіна шляху s , які апісвае адвольны пункт M праменя пры вярчэнні вакол яго пачатку O , да адрэзка OM роўная $\frac{\pi\alpha}{180}$, г. зн. не залежыць ад выбару пункта M (рис. 329).

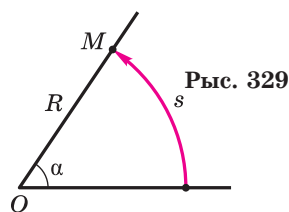
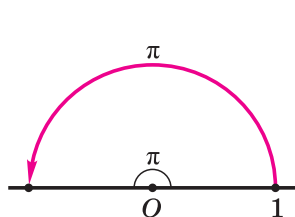
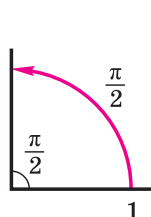


Рис. 329

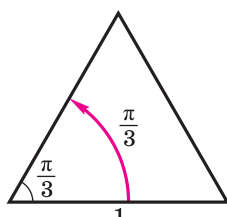
Таму гэтая адносіна прымаецца за меру вугла. Колькасца яна роўная шляху, пройдзенаму пунктам па адзінкавай акружнасці.



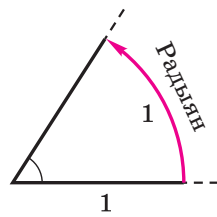
Рыс. 330



Рыс. 331



Рыс. 332



Рыс. 333

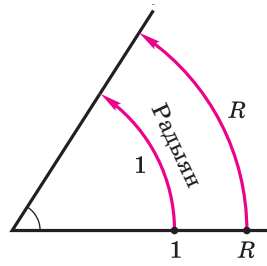
Разгорнутаму вуглу адпавядае палавіна даўжыні адзінкавай акружнасці, г. зн. лік π (рыс. 330).

Прамы вугал роўны $\frac{\pi}{2}$ (рыс. 331), вугал правільнага

трохвугольніка — $\frac{\pi}{3}$ (рыс. 332). Вугал, мера якога

роўная ліку 1, называецца **радыянам** (рыс. 333).

Вугал у 1 радыян выразае з акружнасці дугу, роўную радыусу гэтай акружнасці (рыс. 334).



Рыс. 334

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радыян} \approx 0,017453 \text{ радыян};$$

$$1 \text{ радыян} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,2958^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Прынята абазначэнне радыяна ў запісе меры вугла апускаць. Запіс выгляду $\alpha = 1,23$ азначае, што велічыня вугла α роўная 1,23 радыяна.

Адпаведнасць паміж градуснай і радыянай мерамі для часта ўжывальных вуглоў даецца наступнай табліцай:

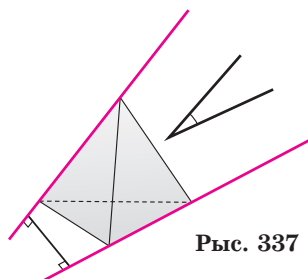
Градусы	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
Радыяны	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Вуглом паміж перасякальнымі прамымі называецца адзін з чатырох утвораных імі вуглоў, не большы за 90° (рыс. 335).

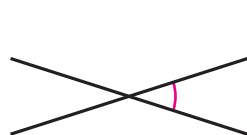
Вугал паміж паралельнымі прамымі прымаецца роўным нулю (рыс. 336).

Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, ім паралельнымі (рыс. 337).

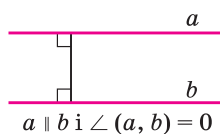
Вуглом паміж перасякальнай прамой і плоскасцю называецца вугал паміж гэтай прамой і яе праекцыяй на плоскасць (рыс. 338).



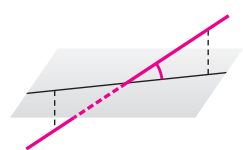
Рыс. 337



Рыс. 335



Рыс. 336



Рыс. 338

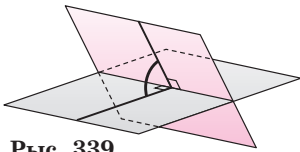


Рис. 339

Вугал паміж паралельнымі прамой і плоскасцю прымаецца роўным нулю.

Вуглом паміж перасякальнымі плоскасцямі называецца адзін з чатырох утвораных імі двухгранных вуглоў, не большы за 90° (рис. 339).

Вугал паміж паралельнымі плоскасцямі прымаецца роўным нулю.

Сума вуглоў многавугольніка, як выпуклага, так і нявыпуклага, з колькасцю старон n роўная $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Сума плоскіх вуглоў мнагаграннага вугла меншая за 360° .

Б) Даўжыня адрэзка. Адлегласць

Два пункты прамой M і N раздзяляюць яе на тры часткі (рис. 340), якія разам з пунктамі M і N утвараюць прамень з пачаткам у пункце M , прамень з пачаткам у пункце N і адрэзак MN . Калі выбраць адзінку даўжыні, то можна вымераць даўжыню адрэзка. У якасці адзінкі даўжыні прыняты метр, пад якім разумеюць шлях, пройдзены ў вакууме

святлом за $\frac{1}{299\,792\,458}$ долі секунды.

З даўжынёй адрэзка звязана другая велічыня — адлегласць.

З пункта A у пункт B можна трапіць рознымі шляхамі (рис. 341). Найкарацейшым з іх з'яўляецца шлях 2 па адрэзку AB . Адлегласцю паміж пунктамі называецца даўжыня адрэзка, што іх злучае.

Найменшай адлегласцю ад пункта E да прамой l з'яўляецца адлегласць да пункта P — асновы перпендыкуляра EP (рис. 342). Адлегласцю паміж пунктамі і прамой называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з пункта да прамой.

Любыя два пункты адной з паралельных прамых роўнаадлеглыя ад другой прамой (рис. 343). Адлегласцю паміж паралельнымі прамымі называецца адлегласць ад якога-небудзь пункта адной прамой да другой прамой.

Дзве скрыжаваныя прамыя маюць адзіны агульны перпендыкуляр (рис. 344). Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

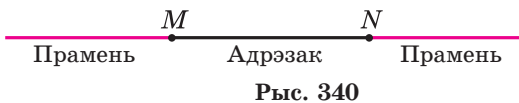


Рис. 340

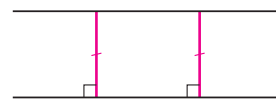


Рис. 343

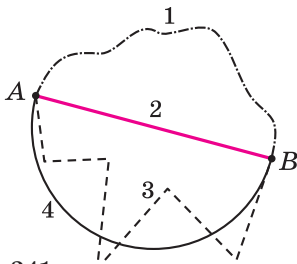


Рис. 341

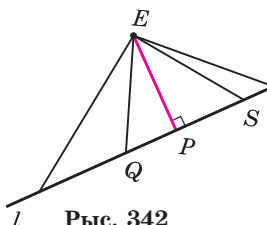


Рис. 342

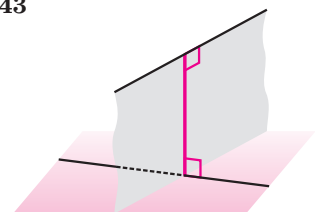


Рис. 344

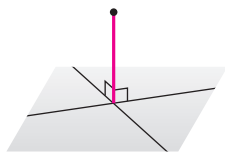


Рис. 345

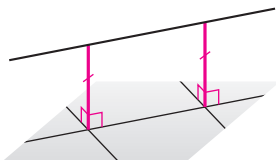


Рис. 346

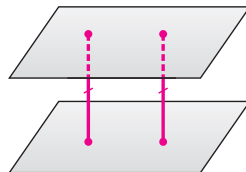


Рис. 347

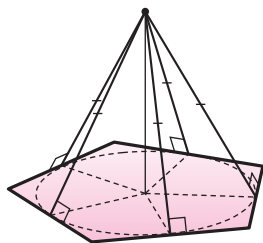


Рис. 348

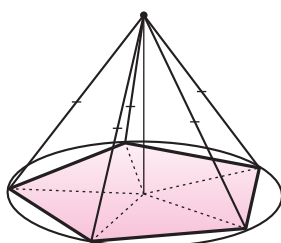


Рис. 349

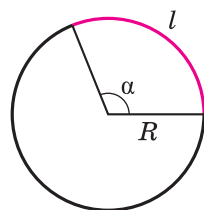


Рис. 350

Перпендыкуляр да плоскасці, праведзены з пэўнага пункта, меншы за любую нахіленую да гэтай плоскасці, праведзеную з таго самага пункта (рис. 345). *Адлегласцю ад пункта да плоскасці* называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з гэтага пункта да плоскасці.

Адлегласць ад любога пункта прамой, паралельнай плоскасці, да гэтай плоскасці адна і тая і роўная даўжыні перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці (рис. 346). *Адлегласцю паміж паралельнымі прамой і плоскасцю* называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

Адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці адна і тая і роўная даўжыні іх агульнага перпендыкуляра (рис. 347). *Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі* называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

Калі дадзены пункт прасторы роўнаадлеглы ад старон многавугольніка, то ў гэты многавугольнік можна ўмежыць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апущанага з дадзенага пункта на плоскасць многавугольніка (рис. 348).

Калі дадзены пункт прасторы роўнаадлеглы ад вяршынь многавугольніка, то каля гэтага многавугольніка можна апісаць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апущанага з дадзенага пункта на плоскасць многавугольніка (рис. 349).

Даўжыня C акружнасці з радыусам R выяўляецца формулай $C = 2\pi R$. Даўжыня l дуі акружнасці з радыусам R і радыяльнай мерай α выяўляецца формулай $l = R\alpha$ (рис. 350).

В) Плошча фігуры

Калі выбраць адзінку плошчы, то можна вымераць плошчу фігуры. У якасці адзінкі плошчы прыняты *квадратны метр*, пад якім разумеюць

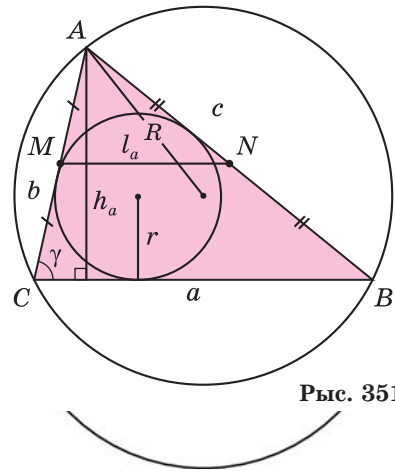
плошчу квадрата са стараной, роўнай 1 м.

Плошча S трохвугольніка (рыс. 351) роўная

- палавіне здабытку стараны a і праведзенай да яе вышыні h_a : $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$;
- здабытку вышыні h трохвугольніка і перпендыкулярнай ёй сярэдняй лініі l : $S = h_a \cdot l_a$;
- палавіне здабытку дзвюх яго старон a і b і сінуса вугла γ паміж імі: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;
- квадратнаму караню са здабытку паўперыметра p і трох рознасцей паўперыметра з кожнай стараной a, b, c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ дзе } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

- здабытку паўперыметра p і радыуса r умежанай акружнасці: $S = pr$;
- здабытку трох старон a, b, c трохвугольніка, падзеленаму на пачацвяроны радыус R апісанай акружнасці: $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.



Рыс. 351

Плошча S чатырохвугольніка (рыс. 352) роўная палавіне здабытку

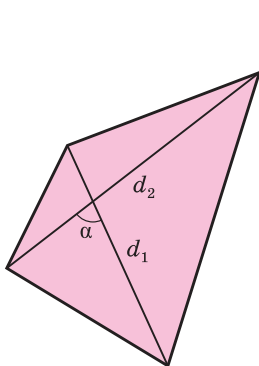
яго дыяганаляў d_1 і d_2 і сінуса вугла α паміж імі: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$.

Плошча S трапецыі (рыс. 353) роўная здабытку яе сярэдняй лініі l і вышыні h : $S = l \cdot h$.

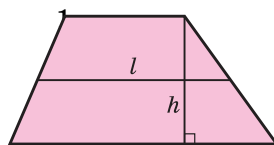
Плошча S паралелаграма (рыс. 354) роўная здабытку стараны a і праведзенай да яе вышыні h : $S = a \cdot h$.

Плошча S прамавугольніка (рыс. 355) роўная здабытку яго сумежных старон a і b : $S = a \cdot b$.

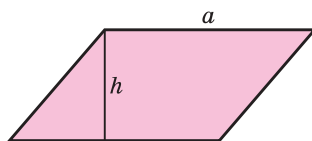
Плошча S ромба (рыс. 356) роўная



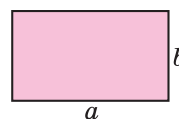
Рыс. 352



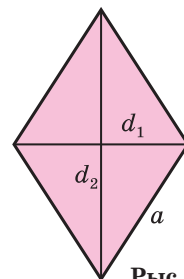
Рыс. 353



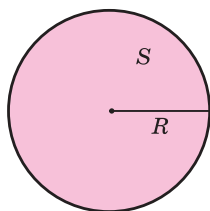
Рыс. 354



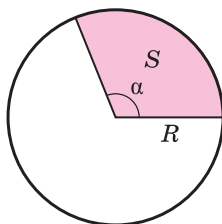
Рыс. 355



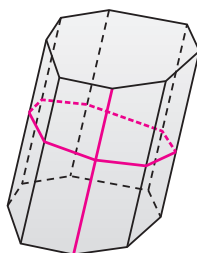
Рыс. 356



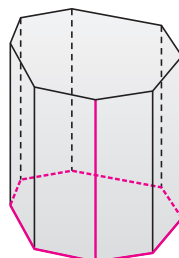
Рыс. 357



Рыс. 358



Рыс. 359



Рыс. 360

Плошча S круга (рыс. 357) з радыусам R выяўляецца формулай $S = \pi R^2$.

Плошча S сектара з радыусам R і цэнтральным вуглом (рыс. 358), радзяная мера якога роўная α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, выяўляецца формулай $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

Плошча S бакавой паверхні прызмы (рыс. 359) роўная здабытку перыметра яе перпендыкулярнага сячэння $P_{\text{перпенд. сяч}}$ і даўжыні l бакавога канта: $S = P_{\text{перпенд. сяч}} \cdot l$.

Плошча S бакавой паверхні прамой прызмы (рыс. 360) роўная здабытку перыметра яе асновы $P_{\text{асн}}$ і вышыні h : $S = P_{\text{асн}} \cdot h$.

Плошча S бакавой паверхні цыліндра (рыс. 361) роўная здабытку даўжыні C акружнасці асновы і вышыні h : $S = C \cdot h$.

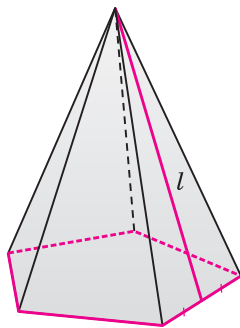
Плошча S бакавой паверхні правільнай піраміды (рыс. 362) роўная здабытку паўперыметра p яе асновы і апафемы l : $S = p \cdot l$.

Плошча S бакавой паверхні правільнай усечанай піраміды (рыс. 363) роўная здабытку паўсумы перыметраў P_1 і P_2 яе асноў і апафемы l або здабытку перыметра $\frac{P_1 + P_2}{2}$ пасярэдняга сячэння і апафемы l : $S = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$.

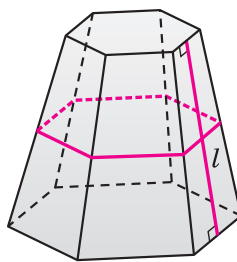
Плошча S бакавой паверхні конуса (рыс. 364) роўная здабытку палавіны даўжыні C акружнасці яго асновы і ўтваральніка l : $S = \frac{1}{2} C \cdot l$.



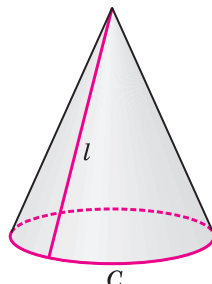
Рыс. 361



Рыс. 362



Рыс. 363



Рыс. 364

Плошча S бакавой паверхні ўсечанага конуса (рыс. 365) роўная здабытку паўсумы C_1 і C_2 даўжынь акружнасцей яго асноў і ўтваральніка l або здабытку перыметра $\frac{C_1 + C_2}{2}$

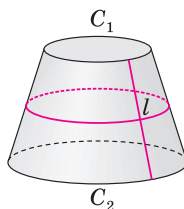
пасярэдняга сячэння і ўтваральніка l :

$$S = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l.$$

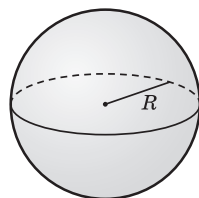
Плошча S сферы з радыусам R (рыс. 366) роўная пачацвяронай плошчы вялікага круга: $S = 4\pi R^2$.



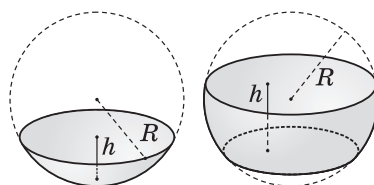
Плошча S сферычнага купала, а таксама сферычнага пояса з радыусам R і вышынёй h (рыс. 367) роўная здабытку даўжыні акружнасці вялікага круга і вышыні h адпаведнага цела: $S = 2\pi R h$.



Рыс. 365



Рыс. 366



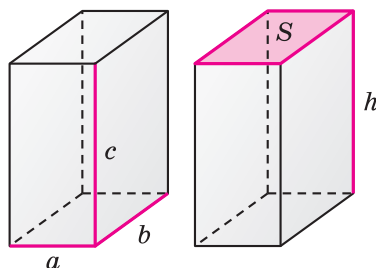
Рыс. 367

Г) Аб'ём цела

Калі выбраць адзінку аб'ёму, то можна вымераць аб'ём цела. У якасці адзінкі аб'ёму прыняты кубічны метр, пад якім разумеюць аб'ём куба са стараной, роўнай 1 м.

Аб'ём V прамавугольнага паралелепіпеда (рыс. 368) роўны:

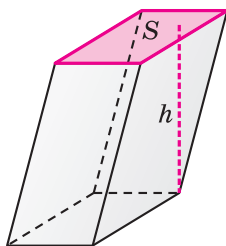
- здабытку трох яго вымярэнняў a , b , c : $V = abc$;
- здабытку плошчы S яго асновы і вышыні h : $V = Sh$.



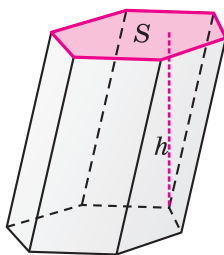
Рыс. 368

Аб'ём V адвольнага паралелепіпеда (рыс. 369) роўны здабытку плошчы S яго асновы і вышыні h : $V = Sh$.

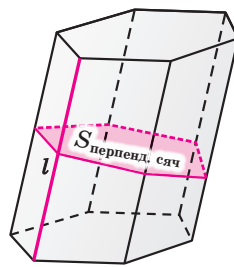
Аб'ём V прызмы роўны здабытку плошчы S яе асновы і вышыні h (рыс. 370) або здабытку плошчы $S_{\text{перпенд. сяч}}$ яе перпендыкулярнага сячэння і даўжыні l бакавога канта (рыс. 371): $V = Sh = S_{\text{перпенд. сяч}} \cdot l$.



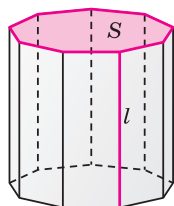
Рыс. 369



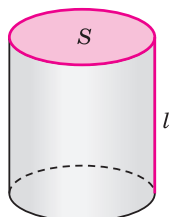
Рыс. 370



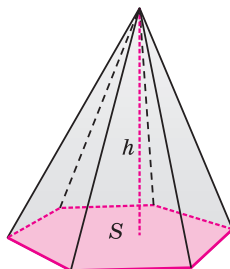
Рыс. 371



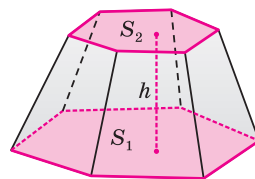
Рыс. 372



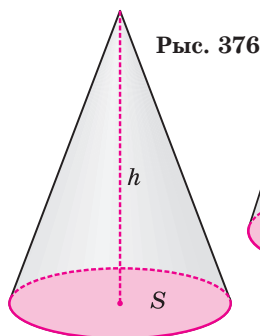
Рыс. 373



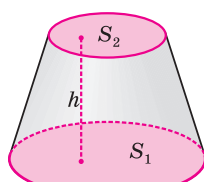
Рыс. 374



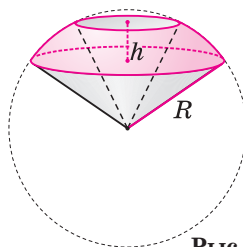
Рыс. 375



Рыс. 376



Рыс. 377



Рыс. 378

Аб'ём V *прамой прызмы* (рыс. 372) роўны здабытку плошчы S яе асновы і даўжыні l бакавога канта: $V = Sl$.

Аб'ём V *цыліндра* (рыс. 373) роўны здабытку плошчы S яго асновы і ўтваральніка l : $V = Sl$.

Аб'ём V *піраміды* (рыс. 374) роўны трэцяй долі здабытку плошчы S яе асновы і вышыні h : $V = \frac{1}{3} Sh$.

 Аб'ём V *усечанай піраміды* (рыс. 375) роўны трэцяй долі здабытку вышыні h піраміды і сумы плошчаў S_1 і S_2 асноў піраміды і іх сярэдняга геаметрычнага: $V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

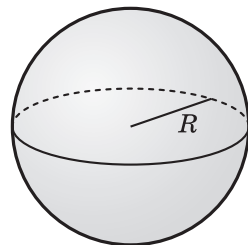
Аб'ём V *конуса* (рыс. 376) роўны трэцяй долі здабытку плошчы S яго асновы і вышыні h : $V = \frac{1}{3} Sh$.

 Аб'ём V *усечанага конуса* (рыс. 377) роўны трэцяй долі здабытку вышыні конуса і сумы плошчаў S_1 і S_2 асноў конуса і іх сярэдняга геаметрычнага: $V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Аб'ём V *шара* з радыусам R (рыс. 379) роўны трэцяй долі здабытку яго паверхні і радыуса:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

 Аб'ём V *шаровага сектара пояса* з радыусам R і вышынёй h (рыс. 378) роўны трэцяй долі



Рыс. 379

здабытку паверхні адпаведнага сферычнага пояса або купала і радыуса: $V = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R h \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^2 h$.



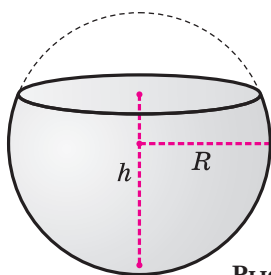
Аб'ём V шаравога сегмента (рыс. 380) з радыусам R і вышынёй h вызначаецца формулай $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$.



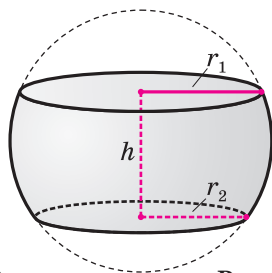
Аб'ём V шаравога пласта (рыс. 381) з радыусамі r_1 і r_2 асноў і вышынёй h вызначаецца формулай $V = \frac{1}{6} \pi h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.



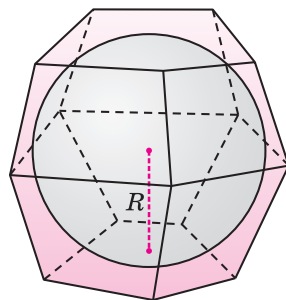
Аб'ём V апісанага каля шара мнагагранніка (рыс. 382) роўны трэцяй долі здабытку поўнай паверхні S мнагагранніка і радыуса r шара: $V = \frac{1}{3} SR$.



Рыс. 380



Рыс. 381



Рыс. 382



1. Што такое адзінка вымярэння і як з асноўнай адзінкі пэўнай велічыні ўтвараюцца вытворныя адзінкі?

2. Сфармулюйце асноўныя ўласцівасці велічыні.

3. Якую фігуру называюць вуглом і што называюць яго старанамі і вяршыняй?

4. Які прамень называюць бісектрысай вугла?

5. Які вугал называюць прамым; вострым; тупым; разгорнутым?

6. Як называюць велічыню, з дапамогай якой вымяраюць вуглы?

7. Як называюць асноўную адзінку вымярэння вуглоў і як яна абазначаецца?

8. Назавіце вытворныя адзінкі вымярэння вугла і ўкажыце, як яны звязаны з асноўнай адзінкай?

9. Які сэнс маюць вуглы з градуснай мерай, большай за 360° ?

10. Што называюць градуснай мерай дугі?

11. Якая адзінка вымярэння вуглоў называецца радыянам і як радыян звязаны з градусам?

12. Што называюць вуглом паміж перасякальнымі прамымі; паміж скрывава-нымі прамымі?

13. Што называюць вуглом паміж перасякальнымі прамой і плоскасцю; перасякальнымі плоскасцямі?

14. Што прымаюць за велічыню вугла паміж паралельнымі прамымі; паміж паралельнымі прамой і плоскасцю; паміж паралельнымі плоскасцямі?

15. Што называюць двухгранным вуглом; гранямі двухграннага вугла; кантам двухграннага вугла?

16. Які вугал называюць лінейным вуглом двухграннага вугла і якую ўласцівасць маюць лінейныя вуглы аднаго і таго ж двухграннага вугла?

17. Што прымаюць за меру двухграннага вугла?

18. Чаму роўная сума ўнутраных вуглоў плоскага многавугольніка?

19. Якую ўмову праўдзіць сума плоскіх вуглоў мнагаграннага вугла?

20. Якую фігуру называюць адрэзкам?

21. Як называюць велічыню, з дапамогай якой вымяраюць адрэзкі?

22. Як называюць асноўную адзінку вымярэння адрэзкаў?

23. Назавіце вытворныя адзінкі вымярэння даўжыні і ўкажыце, як яны звязаны з асноўнай адзінкай?

24. Што называюць адлегласцю паміж двума пунктамі; адлегласцю паміж пунктам і прамой; адлегласцю паміж паралельнымі прамымі; адлегласцю паміж паралельнымі прамой і плоскасцю; адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі?

25. Сфармулюйце ўласцівасць многавугольніка, для якога існуе такі пункт прасторы, што ён роўнаадлеглы ад усіх вяршынь многавугольніка.

26. Сфармулюйце ўласцівасць многавугольніка, для якога існуе такі пункт прасторы, што ён роўнаадлеглы ад усіх старон многавугольніка.

27. Чаму роўная даўжыня акружнасці з радыусам R ; даўжыня дугі акружнасці з радыусам R і радыянальнай мерай α ?

28. Як называюць велічыню, з дапамогай якой вымяраюць паверхні?

29. Як называюць асноўную адзінку вымярэння плошчаў і як яна абазначаецца?

30. Назавіце вытворныя адзінкі вымярэння плошчаў і ўкажыце, як яны звязаны з асноўнай адзінкай.

31. Як плошча трохвугольніка выражаецца праз старану і праведзеную да яе вышыню; праз сярэдняю лінію і вышыню; праз дзве стараны і вугал паміж імі; праз стараны; праз паўперыметр і радыус умежанай акружнасці; праз стараны і радыус апісанай акружнасці?

32. Як плошча чатырхвугольніка выражаецца праз яго дыяганалі і вугал паміж імі?

33. Як плошча трапецый выражаецца праз сярэдняю лінію і вышыню?

34. Як плошча паралелаграма выражаецца праз яго старану і праведзеную да яе вышыню?

35. Як плошча прамавугольніка выражаецца праз яго стараны?

36. Як плошча ромба выражаецца праз яго дыяганалі?

37. Чаму роўная плошча круга з радыусам R ; плошча сектара з радыусам R і цэнтральным вуглом, радыянальная мера якога роўная α ?

38. Чаму роўная плошча бакавой паверхні прызмы; прамой прызмы; цыліндра?

39. Чаму роўная плошча бакавой паверхні правільнай піраміды; конуса; правільнай усечанай піраміды; усечанага конуса?

40. Чаму роўная плошча сферы; сферычнага купала; сферычнага пояса?

41. Як называюць велічыню, з дапамогай якой вымяраюць геаметрычныя целы?

42. Як называюць асноўную адзінку вымярэння аб'ёмаў і як яна абазначаецца?

43. Назавіце вытворныя адзінкі вымярэння аб'ёмаў і ўкажыце, як яны звязаны з асноўнай адзінкай?

44. Чаму роўны аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда; адвольнага паралелепіпеда?

45. Чаму роўны аб'ём прызмы; прамой прызмы; цыліндра?

46. Чаму роўны аб'ём піраміды; конуса; усечанай піраміды; усечанага конуса?

47. Чаму роўны аб'ём шара?

48. Як аб'ём апісанага каля шара мнагагранніка звязаны з паверхняй шара і яго радыусам?



Задача 1. Прамыя AB , CD , EF перасякаюцца ў адным пункце O , пры гэтым прамая CD утварае роўныя вуглы з прамымі AB і EF (рыс. 383). Знайдзіце $\angle AOF$, улічыўшы, што яго велічыня на 75° большая за велічыню $\angle BOD$.

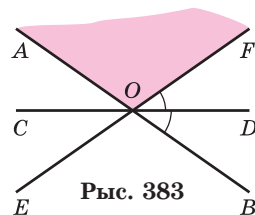


Рис. 383

Рашэнне. У адпаведнасці з умовай:

$$\angle BOD = \angle DOF \text{ і } \angle AOF = \angle BOD + 75^\circ.$$

Цяпер, улічыўшы, што $\angle AOF + \angle FOD + \angle DOB = 180^\circ$, атрымаем:
 $\angle BOD + 75^\circ + \angle FOD + \angle DOB = 180^\circ$ або $3\angle BOD + 75^\circ = 180^\circ$.

Таму $\angle BOD = 35^\circ$, а $\angle AOF = 35^\circ + 75^\circ = 110^\circ$.

Адказ: 110° .

Задача 2. Знайдзіце стораны трохвугольніка, улічыўшы, што адзін з яго вуглоў прамы, бісектрыса другога вугла дзеліць супрацьлеглую старану ў адносіне $3 : 5$, а перыметр роўны 72 см.

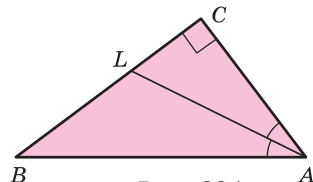


Рис. 384

Рашэнне. Няхай ёсць трохвугольнік ABC , у якога $\angle C = 90^\circ$, AL — бісектрыса, $CL : LB = 3 : 5$ і $AB + BC + CA = 72$ см (рыс. 384).

Тады, па ўласцівасці бісектрысы, трохвугольніка:

$$CA : 3 = AB : 5 = t, \quad CA = 3t, \quad AB = 5t,$$

а па тэарэме Піфагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(5t)^2 - (3t)^2} = 4t$. Улічыўшы ўмову, маем $AB + BC + CA = 72$ см, $5t + 4t + 3t = 72$. Значыць, $t = 6$ і $AB = 5 \cdot 6 = 30$ (см), $BC = 4 \cdot 6 = 24$ (см), $CA = 3 \cdot 6 = 18$ (см).

Адказ: 30 см, 24 см, 18 см.

Задача 3. Знайдзіце стораны трохвугольніка, улічыўшы, што яго вуглы, прылеглыя да адной стараны, роўныя 45° і 60° , а праведзеная да яе вышыня — 12 см.

Рашэнне. Няхай ёсць трохвугольнік ABC , у якога $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, CH — вышыня і $CH = 12$ см (рыс. 385).

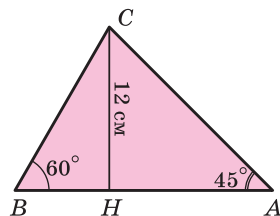


Рис. 385

Маем $\angle ACH = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, $\angle BCH = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Паколькі $\triangle ACH$ — прамавугольны і раўнабедраны, то $AH = CH = 12$ см,

$AC = CH\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ см. $BC = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3}$ см, $BH = \frac{1}{2}BC = 4\sqrt{3}$ см, бо

$\angle BHC = 90^\circ$, $\angle CBH = 60^\circ$. Таму $AB = AH + HB = 12 + 4\sqrt{3} = 4(3 + \sqrt{3})$ (см).

Адказ: $4(3 + \sqrt{3})$ см, $8\sqrt{3}$ см, $12\sqrt{2}$ см.

Задача 4. Прамыя, што праходзяць праз канцы A і C асновы AC раўнабедранага трохвугольніка ABC і сярэдзіну K яго вышыні BH , праведзенай да асновы, раздзяляюць трохвугольнік на тры трохвугольнікі ADK , CFK і ACK і чатырохвугольнік $BDKF$ (рыс. 386). Вызначце, якую частку кожны з іх складае ад плошчы дадзенага трохвугольніка ABC .

Рашэнне. Няхай $HG \parallel AK$.

$BF = FG$, бо KF — сярэдняя лінія ў $\triangle BHG$,

$FG = GC$, бо HG — сярэдняя лінія ў $\triangle AFC$.

Значыць, $BF = FG = GC = \frac{1}{3}BC$. Цяпер знаходзім:

$$\frac{S_{BKF}}{S_{BCH}} = \frac{BK \cdot BF}{BH \cdot BC} = \frac{BK}{BH} \cdot \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$\frac{S_{HKC}}{S_{HBC}} = \frac{HK \cdot HC}{HB \cdot HC} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \quad \frac{S_{CKF}}{S_{BCH}} = \frac{S_{BCH} - S_{CKH} - S_{BKF}}{S_{BCH}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Паколькі BH — вось сіметрыі, то:

$$\frac{S_{BDKF}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{BKF}}{2S_{BCH}} = \frac{1}{6}, \quad \frac{S_{AKC}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{HKC}}{2S_{HBC}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_{AKD}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CKF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CKF}}{2S_{HBC}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

Адказ: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$.

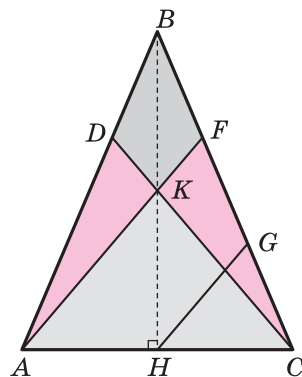


Рис. 386



Задача 5. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, улічыўшы, што ён умежаны ў шар з радыусам R , а дыяганаль восевага сячэння складае з асновай вугал α .

Рашэнне. Няхай дыяганаль AC восевага сячэння цыліндра, умежанага ў шар з радыусам R , нахілена да асновы цыліндра пад вуглом α (рыс. 387). Восевае сячэнне $ABCD$ ёсць прамавугольнік, умежаны ў акружнасць радыуса R , якая атрымліваецца ў сячэнні сферы.

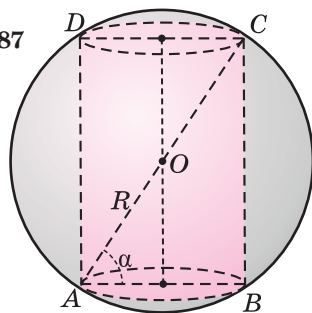
З прамавугольнага трохвугольніка ABC для дыяметра AB асновы цыліндра і яго вышыні BC атрымаем:

$$AB = AC \cos \alpha = 2R \cos \alpha; \quad BC = AC \sin \alpha = 2R \sin \alpha.$$

$$\text{Таму } S = 2\pi rh = \pi \cdot AB \cdot BC = \pi \cdot 2R \cos \alpha \cdot 2R \sin \alpha = 4\pi R^2 \cos \alpha \sin \alpha = 2\pi R^2 \sin 2\alpha.$$

Адказ: $2\pi R^2 \sin 2\alpha$.

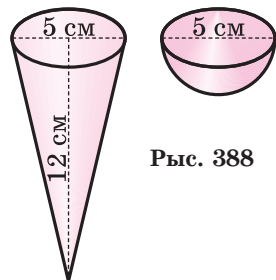
Рис. 387





Задача 6. Рожок для марожанага ў выглядзе конуса мае глыбіню 12 см і дыяметр асновы 5 см. У яго ўкладлі дзве лыжкі марожанага ў выглядзе паўшароў дыяметрам 5 см. Вывядзіце, ці змесціцца марожанае ў форме, калі яно растане.

Рашэнне. Як геаметрычная фігура рожок для марожанага ўяўляе сабой конус вышыняй 12 см і радыусам $\frac{5}{2}$ см, а ўкладзенае ў гэтую форму марожанае — паўшар з радыусам $\frac{5}{2}$ см (рыс. 388).



Умяшчальнасць V_1 формы складае $\frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12$, г. зн. $\frac{150\pi}{6} \text{ см}^3$.

Укладзенае ў форму марожанае мае аб'ём V_2 шара з радыусам 5 см, г. зн. $\frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$, або $\frac{125\pi}{6} \text{ см}^3$.

Параўнанне аб'ёмаў V_1 і V_2 дае: $V_1 = \frac{150\pi}{6} \text{ см}^3 > \frac{125\pi}{6} \text{ см}^3 = V_2$.

Таму паколькі пры раставанні марожанага яго аб'ём істотна не павялічыцца, то яно цалкам змесціцца ў канічнай форме.

Адказ: змесціцца.



484. Тры прамыя a , b , c плоскасці перасякаюцца ў адным пункце, прычым прамая a складае з прамой b вугал 20° , а з прамой c — вугал 72° . Знайдзіце:

а) вугал паміж прамымі b і c ;

б) вугал паміж бісектрысамі вуглоў, якія прамая c складае з прамымі a і b , прычым гэтыя вуглы размешчаны па адзін бок ад прамой c .

485. Знайдзіце велічыню кожнага з вуглоў, што ўтварыліся пры перасячэнні дзвюх прамых, улічыўшы, што велічыня аднаго з іх:

а) у 8 разоў меншая за супольную велічыню трох астатніх;

б) складае $\frac{2}{7}$ ад супольнай велічыні трох астатніх.

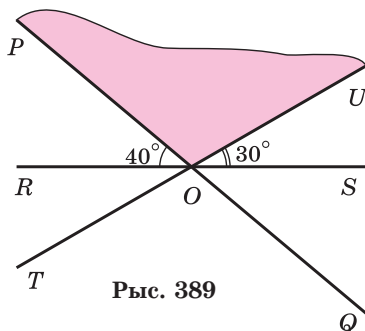


Рис. 389

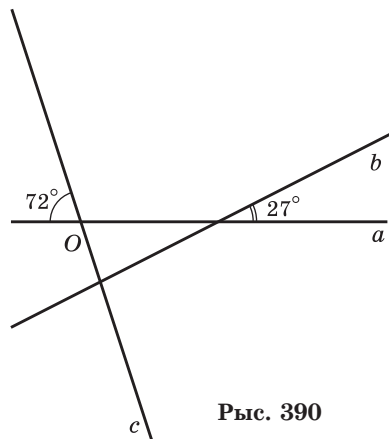
486. Прамыя AB , CD , EF праходзяць праз пункт Q . Пры гэтым QE — бісектрыса вугла AQC , роўнага 161° . Знайдзіце велічыню вугла CQF .

487. Выкарыстаўшы рыс. 389, знайдзіце велічыню вугла TOQ .

488. Тры прамыя a , b , c плоскасці размешчаны так, як паказана на рыс. 390.

Знайдзіце:

- а) вугал паміж прамымі b і c ;
- б) вугал паміж бісектрысамі вуглоў, якія прамая c складае з прамымі a і b , прычым гэтыя вуглы размешчаны па розныя бакі ад прамой c .



Рыс. 390

489. Правільныя трох-, чатырох-, пяці-, шасцівугольнікі маюць вуглы, якія вымяраюцца цэлай колькасцю градусаў, а вуглы правільнага сямівугольніка гэтай уласцівасці не маюць. Знайдзіце:

- а) велічыню вугла правільнага сямівугольніка;
- б) колькасць правільных многавугольнікаў, вуглы якіх вымяраюцца цэлай колькасцю градусаў.

490. Дакажыце, што калі адна з граняў умежанай у цыліндр трохвугольнай прызмы праходзіць праз вось цыліндра, то дзве другія грані ўзаемна перпендыкулярныя.

491. Адзін катэт прававугольнага трохвугольніка з перыметрам 84 см роўны 35 см. Знайдзіце яго гіпатэнузу.

492. Катэты прававугольнага трохвугольніка адносяцца як 5 : 6, а гіпатэнуза роўная 122 см. Знайдзіце праекцыі катэтаў на гіпатэнузу.

493. Катэты прававугольнага трохвугольніка роўныя 12 см і 35 см. Знайдзіце медыяну, праведзеную з вяршыні прамога вугла.

494. Знайдзіце перыметр прававугольнага трохвугольніка, гіпатэнуза якога большая за адзін катэт на 2 см, а за другі — на 25 см.

495. Бісектрыса, праведзеная да гіпатэнузы прававугольнага трохвугольніка, дзеліць яе ў адносіне 2 : 5. Вызначце, у якой адносіне дзеліць гіпатэнузу праведзеная да яе вышыня.

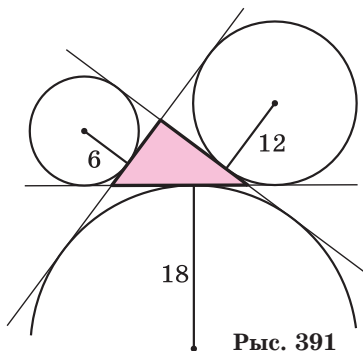
496. Дыяганалі трапецыі роўныя 15 см і 20 см, а сярэдняя лінія — 12,5 см. Знайдзіце вышыню трапецыі.

497. Вышыня, праведзеная да гіпатэнузы прававугольнага трохвугольніка, раздзяляе яго на два трохвугольнікі, у якіх найбольшыя бісектрысы роўныя 5 см і 12 см. Знайдзіце найбольшую бісектрысу трохвугольніка.

498. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля:

- а) прававугольнага трохвугольніка, бісектрыса якога раздзяляе адзін з катэтаў на часткі 4 см і 5 см;

- б) раўнабедранай трапецыі, асновы якой роўныя 60 см і 80 см, а бакавая старана — 26 см.
- 499.** Дакажыце, што сума велічынь, адваротных квадратам катэтаў прамавугольнага трохвугольніка, роўная велічыні, адваротнай квадрату вышыні, што праведзена да гіпатэнузы.
- 500.** Асновы прамавугольнай трапецыі роўныя 17 см і 25 см, а большая бакавая старана — 10 см. Знайдзіце адрэзак, які злучае пункт працягу меншай бакавой стараны з сярэдзінай большай і перпендыкулярны ёй.
- 501.** Вышыня, праведзеная да бакавой стараны раўнабедранага трохвугольніка, раздзяляе яе на часткі 3 см і 2 см, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце гэтую вышыню і перыметр трохвугольніка.
- 502.** Вышыня раўнабедранага трохвугольніка раздзелена ў адносіне 2 : 3, калі лічыць ад вяршыні. Праз вяршыню асновы і пункт дзялення праведзена прамая. Вызначце, у якой адносіне яна раздзяляе бакавую старану.
- 503.** Знайдзіце бісектрысу вугла трохвугольніка, улічыўшы, што гэты вугал роўны 120° , а прылеглыя да яго стараны — 6 см і 12 см.
- 504.** Знайдзіце адрэзкі, на якія раздзяляе старану трохвугольніка яго бісектрыса даўжынёй 24 см, праведзеная з вяршыні, у якой збягаюцца стараны даўжынямі 20 см і 45 см.
- 505.** Знайдзіце перпендыкуляры, апущаныя на стараны роўнастаронняга трохвугольніка даўжынямі 24 см з яго ўнутранага пункта, улічыўшы, што яны адносяцца як 1 : 2 : 3.
- 506.** Знайдзіце старану трохвугольніка, улічыўшы, што:
- а) дзве іншыя яго стараны роўныя 5 см і 6 см, а плошча трохвугольніка — 12 см^2 ;
 - б) дзве іншыя яго стараны роўныя 10 м і 17 м, а радыус апісанай акружнасці — $10\frac{5}{8}$ м.
- 507.** Знайдзіце стараны трохвугольніка, улічыўшы, што:
- а) адна з іх меншая ў два разы за другую і на 4 см за трэцюю, а плошча трохвугольніка роўная $4\sqrt{5} \text{ см}^2$;
 - б) радыусы пазаўмежаных акружнасцей роўныя 6 см, 12 см і 18 см (рыс. 391).
- 508.** Знайдзіце найменшую і найбольшую адлегласці:
- а) пункта M ад пунктаў акружнасці з радыусам r , улічыўшы, што пункт M адлеглы ад цэнтра акружнасці на a ;



Рыс. 391

- б) паміж пунктамі акружнасцей з радыусамі r_1 і r_2 , улічыўшы, што адлегласць паміж іх цэнтрамі роўная d ;
- в) паміж пунктамі прамой і акружнасці з радыусам r , улічыўшы, што прамая адлеглая ад цэнтра акружнасці на d .
- 509.** Вызначце, ці ёсць трохвугольнік, вышыні якога роўныя:
- а) 3 см, 4 см і 5 см;
- б) 1 см, 1 см і 3 см;
- в) 5 см, 10 см і 12 см.
- 510.** Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда са стараной асновы 2. Вугал пры вяршыні паміж кантамі адной грані роўны α . Праз цэнтр асновы праведзена плоскасць, паралельная бакавой грані. Знайдзіце перыметр і плошчу атрыманага сячэння.
- 511*.** У конус умежаны цыліндр, поўная паверхня якога роўная бакавой паверхні конуса. Найбольшы вугал паміж утваральнікамі конуса — прамы. Дакажыце, што вяршыня конуса адлеглая ад верхняй асновы цыліндра на палавіну ўтваральніка конуса.
- 512.** Знайдзіце радыус шара, улічыўшы, што:
- а) плошча сячэння шара плоскасцю, якая перпендыкулярная радыусу і праходзіць праз яго сярэдзіну, роўная 36π см²;
- б) агульная хорда перпендыкулярных сячэнняў, праведзеных на адлегласці 8 см і 12 см ад цэнтра, роўная 18 см;
- в)* ён апісаны каля правільнай трохвугольнай прызмы, у якой вышыня роўная H , а дыяганаль бакавой грані нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α ;
- г)* ён умежаны ў правільную n -вугольную піраміду, у якой старана асновы роўная a , а двухгранны вугал пры аснове — φ ;
- д)* ён апісаны каля правільнай n -вугольнай піраміды, у якой старана асновы роўная a , а бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α ;
- е)* ён апісаны каля піраміды, у якой асновай з'яўляецца прамавугольнік з дыяганаллю 8 см, а кожны бакавы кант складае з асновай вугал 15° ;
- ж) ён апісаны каля правільнай чатырохвугольнай піраміды, кожны кант якой роўны 4 см.
- 513.** Плошча вялікага круга шара роўная 50π см², а два ўзаемна перпендыкулярныя сячэнні шара маюць агульную хорду даўжынёй 6 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра шара да сячэнняў, улічыўшы, што плошча аднаго з іх роўная 25π см².
- 514.** Чатыры шары ляжаць на сталё так, што кожны датыкаецца да трох астатніх і плоскасці стала. Тры шары маюць радыус, роўны R . Знайдзіце радыус чацвёртага шара.

515*. Дакажыце, што цэнтр шара, апісанага каля:



- а) правільнай прызмы, ляжыць на сярэдзіне адрэзка, што злучае цэнтры асноў гэтай прызмы;
- б) правільнай піраміды, ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вышыню піраміды.

516*. Бакавы кант правільнай трохвугольнай прызмы роўны 2 м, а старана асновы — 3 м. Знайдзіце:



- а) дыяметр апісанага шара;
- б) вугал, пад якім бачны з цэнтра бакавы кант.

517*. Правільная n -вугольная прызма ўмежана ў шар з радыусам R . Кант асновы прызмы роўны a . Знайдзіце вышыню прызмы, улічыўшы, што:



- а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

518*. Знайдзіце дыяметр шара, апісанага каля правільнай трохвугольнай піраміды, у якой:



- а) старана асновы роўная 4 см, а бакавы кант — 6 см;
- б) вышыня роўная 28 см, а бакавы кант — 35 см;
- в) усе канты роўныя a .

519*. Знайдзіце радыус шара, апісанага каля правільнай піраміды, у якой бакавы кант роўны:



- а) b і складае з асновай вугал α ; б) l , а вышыня — h .

520*. Вышыня правільнай піраміды роўная h , а радыус апісанай каля асновы акружнасці — r . Вызначце:



- а) радыус апісанага шара;
- б) пры якім дачыненні паміж h і r цэнтр шара ляжыць унутры піраміды; на яе аснове; па-за пірамідай.

521*. Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная 3 см, а бакавы кант — 2 см. Вызначце, як у дачыненні да піраміды размешчаны цэнтр апісанага каля яе шара.



522*. Каля правільнай чатырохвугольнай піраміды апісаны шар. Знайдзіце радыус гэтага шара, улічыўшы, што старана асновы роўная:



- а) 6 см, а бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° ;
- б) $2a$, а бакавыя грані піраміды нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° .

523*. У шар з радыусам r умежана правільная чатырохвугольная піраміда, бакавы кант якой складае з асновай піраміды вугал α . Знайдзіце гэты кант.



524*. Знайдзіце радыус шара, улічыўшы, што:



- а) у яго ўмежана правільная трохвугольная піраміда, старана асновы якой роўная a , а вышыня роўная старане асновы;

б) ён умежаны ў піраміду, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной a і вуглом α , а кожная бакавая грань піраміды нахілена да плоскасці асновы пад вуглом β ;

в) у яго ўмежана піраміда, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік з дыяганаллю 10 , а яе бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вуглом δ ;

г) ён умежаны ў трохвугольную піраміду, бакавыя канты якой узаемна перпендыкулярныя і роўныя a ;

д) у яго ўмежана піраміда, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік з дыяганаллю $2a$, а кожны яе бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом β ;

е) ён умежаны ў правільную чатырохвугольную піраміду са стараной асновы a і вышынёй h .

525*. Асновай піраміды з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік, бакавая старана якога роўная a , а вугал пры аснове трохвугольніка — α . Бакавыя грані піраміды нахілены да асновы пад вуглом φ . Знайдзіце радыус умежанага ў піраміду шара.



526*. Дакажыце, што на вышыні правільнай піраміды ляжыць цэнтр:



а) апісанага каля яе шара;

б) умежанага ў яе шара.

527*. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў правільную трохвугольную піраміду, у якой:



а) бакавая грань нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 60° , а радыус акружнасці, апісанай каля асновы, — 4 см;

б) старана асновы роўная a , а вышыня — h ;

в) бакавы кант складае з плоскасцю асновы вугал 60° , а старана асновы роўная a ;

г) плоскі вугал пры вяршыні роўны α , а старана асновы — a .

528*. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў правільную трохвугольную піраміду, бакавыя грані якой нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° , а старана яе асновы роўная:



а) 12 см; б) 18 см; в) l .

529*. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў правільную піраміду, вышыня якой роўная h , а двухгранны вугал пры аснове складае:



а) 60° ; б) α .

530*. Старана асновы правільнай трохвугольнай піраміды роўная a , а бакавы кант — $2a$. Знайдзіце радыусы ўмежанага і апісанага шароў.



531*. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная a , а вугал паміж супрацьлеглымі бакавымі гранямі — α . Знайдзіце радыус умежанага шара.



532*. Знайдзіце радыус шара, умежанага ў правільную чатырохвугольную піраміду, улічыўшы, што:



- а) старана яе асновы роўная a і плоскі вугал пры вяршыні — α ;
- б) яе вышыня роўная старане асновы, а аб'ём — 9 см^3 ;
- в) яе бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 30° , а сярэдзіна апафемы піраміды адлеглая ад плоскасці асновы на 2 см ;
- г) яе бакавы кант — 2 см і нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° ;
- д) яе вышыня роўная 12 см , а бакавы кант — 15 см .

533*. Радыусы шароў, умежанага ў правільную чатырохвугольную піраміду і апісанага каля яе, роўныя 4 см і 10 см . Знайдзіце старану асновы і вышыню піраміды.



534*. Асновай піраміды з'яўляецца раўнабедраны трохвугольнік, бакавая старана якога роўная a , а вугал пры аснове трохвугольніка — α . Бакавыя грані піраміды нахілены да асновы пад вуглом φ . Знайдзіце радыус умежанага ў піраміду шара.



535. Апішыце спосаб раздзялення:

- а) трохвугольніка на два роўнавялікія трохвугольнікі адной прамой;
- б) паралелаграма дзвюма прамымі, якія праходзяць праз адвольны пункт яго дыяганалі, на такія часткі, што часткі, размешчаныя па розных бакі дыяганалі, будуць папарна роўнавялікія;
- в) прамавугольніка на роўнавялікія фігуры прамой, якая не праходзіць праз вяршыню.

536. Знайдзіце стораны прамавугольніка, улічыўшы, што адна з іх адносіцца да яго дыяганалі як $5 : 13$, а дыяганаль квадрата, роўнавялікага прамавугольніку, роўная $4\sqrt{30} \text{ см}$.

537. Знайдзіце адносіну старон прамавугольніка, плошча якога складае 75% ад плошчы квадрата з перыметрам, роўным перыметру прамавугольніка.

538. Знайдзіце плошчы двух падобных прамавугольнікаў, на якія раздзелены прамавугольнік са старанамі 4 м і 17 м .

539. Знайдзіце стораны ромба, дыяганалі якога адносяцца як $m : n$, а плошча роўная S .

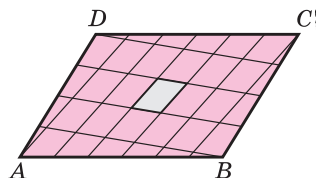
540. Унутраны пункт паралелаграма злучылі з яго вяршынямі. Дакажыце, што сума плошчаў трохвугольнікаў, прылеглых да адной пары супрацьлеглых старон, роўная суме плошчаў трохвугольнікаў, прылеглых да другой пары старон.

541. На старанах AB і AD паралелаграма $ABCD$ выбраны адпаведна такія пункты M і N , што $AM : MB = k$ і $AN : ND = l$. Знайдзіце, якую частку плошчы паралелаграма $ABCD$ складае плошча чатырохвугольніка $AMPN$, улічыўшы, што P ёсць пункт перасячэння прамых BN і DM .

542. Знайдзіце плошчы трохвугольнікаў, на якія трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см, 15 см раздзяляецца:

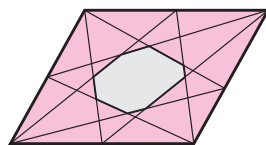
а) сваімі медыянамі;
б) медыянай і вышыняй, праведзенымі да сярэдняй па даўжыні стараны.

543. Кожная са старон AB і DC паралелаграма $ABCD$ раздзелена на m адрэзкаў-доляў, а кожная з дзвюх іншых старон — на n адрэзкаў-доляў. Пачатак першага, другога і г. д. адрэзкаў стараны AB пры лічэнні ад вяршыні A злучаны з канцом першага, другога і г. д. адрэзкаў стараны CD пры лічэнні ад вяршыні D . Гэтаксама канец першага, другога і г. д. адрэзкаў стараны AD пры лічэнні ад вяршыні A злучаны з пачаткам першага, другога і г. д. адрэзкаў стараны BC пры лічэнні ад вяршыні B . У выніку паралелаграм раздзяліўся на трохвугольнікі, трапецыі і паралелаграмы (рыс. 392). Вызначце, якую частку плошчы паралелаграма $ABCD$ складае плошча аднаго такога паралелаграма.



Рыс. 392

544. Кожная вяршыня паралелаграма злучана з сярэдзінамі дзвюх супрацьлеглых старон. Вызначце, якую частку плошчы паралелаграма складае плошча васьмівугольніка, абмежаванага гэтымі адрэзкамі (рыс. 393).



Рыс. 393

545. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, у якога:
а) дзве стараны разам складаюць 15 см, а праведзеныя да іх вышыні роўныя 4 см і 6 см;

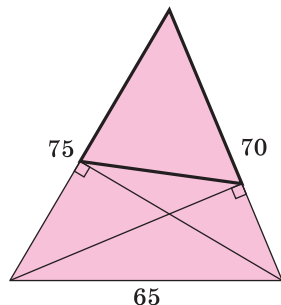
б) дзве стараны роўныя 5 см і 7 см, а вугал супраць адной з іх — 45° ;

в) дзве стараны роўныя 27 см і 29 см, а медыяна да трэцяй стараны — 26 см;

г) дзве вяршыні з'яўляюцца асновамі вышынь, праведзеных да дзвюх большых старон трохвугольніка са старанамі 65 см, 70 см, 75 см, а трэцяя вяршыня з'яўляецца вяршыняй дадзенага трохвугольніка (рыс. 394), з якой выходзіць яго трэцяя вышыня;

д) адна старана роўная 10 см, а медыяны, праведзеныя да дзвюх другіх старон, — 9 см і 12 см;

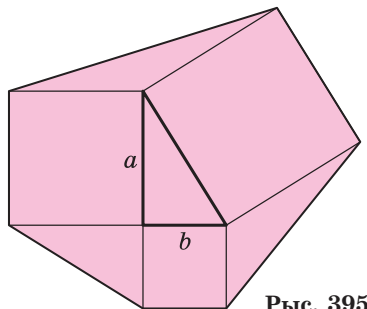
е) медыяны роўныя 9 см, 12 см, 15 см.



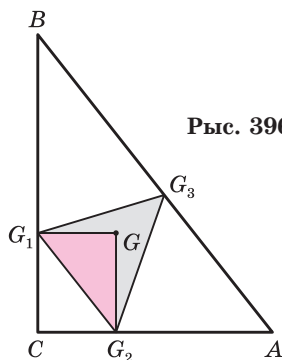
Рыс. 394

546. Унутраны пункт трохвугольніка са старанамі 4 см, 13 см, 15 см адлеглы на 5 см ад першай стараны і на 1 см ад другой. Знайдзіце яго адлегласць ад трэцяй стараны.

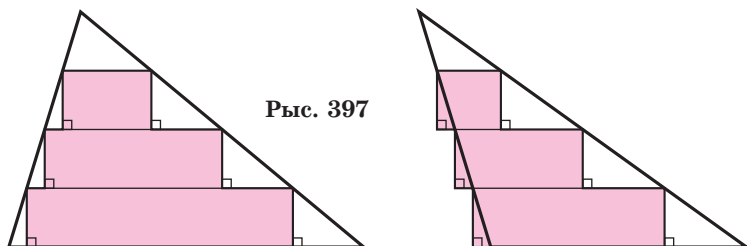
547. Знайдзіце стораны трохвугольніка, улічыўшы, што адрэзкі, якія злучаюць цэнтр ўмежанай акружнасці з вяршынямі трохвугольніка, раздзяляюць яго на трохвугольнікі з плошчамі 12 см^2 , 39 см^2 і 45 см^2 .
548. Дакажыце, што плошча прамавугольнага трохвугольніка роўная здабытку адрэзкаў, на якія раздзяляе яго гіпатэнузу пункт дотыку да яе ўмежанай у трохвугольнік акружнасці.
549. На старанах прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі a і b пабудаваны квадраты, а іх свабодныя вяршыні злучаны (рыс. 395). Знайдзіце плошчу атрыманага шасцівугольніка.
550. Пункты G_1 , G_2 , G_3 ёсць праекцыі цэнтра G прамавугольнага трохвугольніка ABC з прамым вуглом C на стараны BC , AC , AB адпаведна (рыс. 396). Дакажыце, што плошча трохвугольніка GG_1G_2 роўная плошчы чатырохвугольніка $GG_1G_3G_2$.
551. Вызначце, на якой адлегласці ад вяршыні трохвугольніка з вышынёй 4 см трэба правесці прамую, паралельную старане, да якой праведзена гэтая вышыня, каб плошча трохвугольніка раздзялілася ў адносіне $m : n$, калі лічыць ад вяршыні.
552. Адна старана трохвугольніка з плошчай S раздзелена на n доляў прамымі, паралельнымі другой старане, і з абодвух канцоў кожнага з паралельных адрэзкаў, заключаных паміж старанамі трохвугольніка, апущаны перпендыкуляры на наступную прамую (рыс. 397). Знайдзіце плошчу фігуры, утворанай атрыманымі прамавугольнікамі.
553. Вызначце, у якой адносіне, калі лічыць ад вяршыні, трэба раздзяліць старану трохвугольніка дзвюма прамымі, паралельнымі другой старане, каб трохвугольнік раздзяліўся на роўнавялікія часткі.



Рыс. 395



Рыс. 396



Рыс. 397

554. Кожная старана трохвугольніка з плошчай Q разделена ў адносіне $m : n : t$. Знайдзіце плошчу шасцівугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца пункты дзялення.
555. Пункт P стараны AB трохвугольніка ABC раздзяляе яе ў адносіне $m : n$, а пункты Q і R старану BC — у адносіне $i : j : k$. Знайдзіце, у якой адносіне плошча трохвугольніка раздзяляецца прамымі PQ і PR .
556. З трохвугольніка ABC са старанамі 13 см, 37 см і 40 см выразаны трохвугольнік KLM , плошча якога складае шаснаццатую долю плошчы трохвугольніка ABC , а стараны паралельныя старанам трохвугольніка ABC і роўнаадлеглыя ад іх (рыс. 398). Знайдзіце адлегласць паміж паралельнымі старанамі трохвугольнікаў.
557. Прамая, якая праходзіць праз вяршыню A трохвугольніка ABC і раздзяляе яго медыяну BG у адносіне $1 : 2$, калі лічыць ад вяршыні, перасякае старану BC у пункце K . Вызначце, якую частку плошчы трохвугольніка ABC складае плошча трохвугольніка ABK .
558. Дакажыце, што трохвугольнікі ABM і CBM , дзе M — унутраны пункт трохвугольніка ABC , роўнавялікія тады і толькі тады, калі пункт M з'яўляецца пунктам медыяны BB_1 .
559. Прамая, паралельная старане трохвугольніка, раздзяліла яго на роўнавялікія часткі. Вызначце, у якой адносіне гэтая прамая раздзяліла дзве іншыя стараны.
560. Прамая, паралельная старане трохвугольніка з плошчай S , адсякае ад яго трохвугольнік з плошчай Q . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка, тры вяршыні якога супадаюць з вяршынямі меншага трохвугольніка, а чацвёртая належыць старане большага трохвугольніка.
561. Знайдзіце ўсе такія ўнутраныя пункты X трохвугольніка ABC , што трохвугольнікі XAB і XAC роўнавялікія.
562. Выкарыстаўшы плошчы, дакажыце тэарэму пра пункт перасячэння медыян трохвугольніка.
563. Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой:
 а) асновы роўныя 142 см і 89 см, а дыяганалі — 120 см і 153 см;
 б) вышыня роўная 12 см, а дыяганалі — 20 см і 15 см;
 в) асновы роўныя 6 см і 20 см, а бакавыя стараны — 13 см і 15 см.
564. Асновы трапецыі роўныя 5 см і 11 см, а вышыня — 5 см. Вызначце, на якой адлегласці ад меншай асновы трэба правесці прамую,

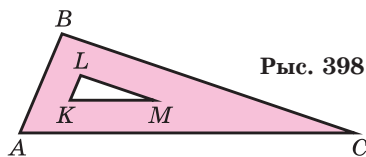


Рис. 398

паралельную ёй, каб плошча трапецыі раздзялілася ў адносіне $9 : 8$, калі лічыць ад меншай асновы.

- 565.** Прамая, праведзеная праз вяршыню тупога вугла трапецыі паралельна бакавой старане, раздзяляе аснову ў адносіне $1 : 2$. Знайдзіце:
а) асновы трапецыі, улічыўшы, што плошча аддзеленага трохвугольніка роўная 6 см^2 , а вышыня трапецыі — 3 см ;
б) большую аснову трапецыі, улічыўшы, што яе сярэдняя лінія роўная 15 см .
- 566.** Знайдзіце большую старану трапецыі, улічыўшы, што тры яе стараны роўныя адна адной, плошча — 8 см^2 , а востры вугал — 30° .
- 567.** Дакажыце, што плошча трапецыі роўная:
а) падвоенай плошчы трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца канцы адной бакавой стараны і сярэдзіна другой;
б) здабытку адной бакавой стараны і перпендыкуляра да яе, апушчанага з сярэдзіны другой бакавой стараны.
- 568.** Знайдзіце плошчу трапецыі, дыяганалі якой роўныя:
а) 6 і 8 , а адрэзак, што злучае сярэдзіны асноў, — 5 ;
б) m і n , а сярэдняя лінія — l .
- 569.** З чатырох трохвугольнікаў, на якія раздзелена трапецыя сваімі дыяганалямі, трохвугольнікі, прылеглыя да асноў, маюць плошчы S_1 і S_2 . Знайдзіце плошчу трапецыі.
- 570.** Вызначце, у якой адносіне дыяганалі дзеляць на чатыры часткі плошчу трапецыі, асновы якой адносяцца як $m : n$.
- 571.** Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ABCD$, у якога супрацьлеглыя стараны AB і CD даўжынямі адпаведна 2 і 4 перпендыкулярныя, а стараны AD і BC роўныя 5 і 7 адпаведна.
- 572.** Дакажыце, што:
а) два чатырохвугольнікі, сярэдзіны старон якіх супадаюць (рыс. 399), роўнавялікія;
б) калі сярэдзіны M і N старон BC і AD чатырохвугольніка $ABCD$ злучыць з яго вяршынямі (рыс. 400), то супольная плошча трохвугольнікаў ABN і CDN будзе роўная плошчы трохвугольніка ADM ;
в) калі M і N — такія пункты старон AB і CD чатырохвугольніка $ABCD$, што $AM : BM = CN : DN$, а P і Q — пункты перасячэння адрэзка AN з адрэзкам DM і адрэзка CM

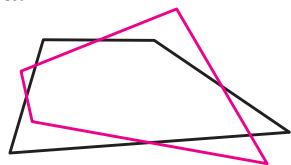


Рис. 399

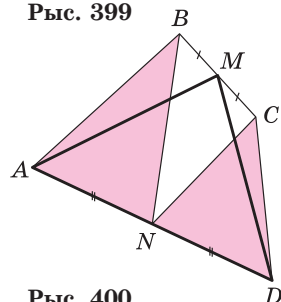
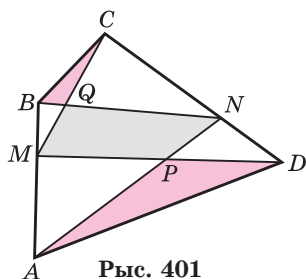
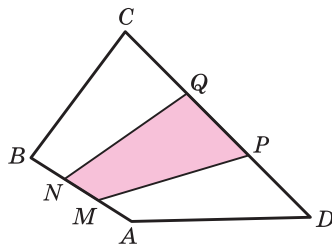


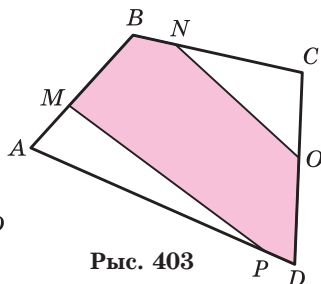
Рис. 400



Рыс. 401



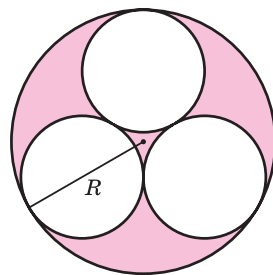
Рыс. 402



Рыс. 403

з адрэзкам BN адпаведна (рыс. 401), то плошча чатырохвугольніка $MQNP$ роўная супольнай плошчы трохвугольнікаў APD і BQC ; г) калі M і N — пункты раздзялення старон AB чатырохвугольніка $ABCD$ на тры доли, а P і Q — пункты раздзялення стараны DC таксама на тры доли (рыс. 402), то плошча чатырохвугольніка $MNQP$ роўная трэцяй долі плошчы дадзенага чатырохвугольніка.

- 573.** M, N, O, P — такія пункты старон чатырохвугольніка $ABCD$, што $AM : BM = 3 : 5$, $BN : CN = 1 : 3$, $CO : DO = 4 : 5$, $DP : AP = 1 : 8$. Вызначце, якую частку плошчы шасцівугольніка $MBNODP$ (рыс. 403) складае ад плошчы дадзенага чатырохвугольніка, і ўстанавіце, ці пры любых адносінах $AM : BM$, $BN : CN$, $CO : DO$, $DP : AP$ задача мае рашэнне.
- 574.** Знайдзіце плошчу кожнага з трохвугольнікаў, на якія раздзяляецца чатырохвугольнік з плошчай 45 м^2 пунктам перасячэння дыяганалей, улічыўшы, што гэты пункт раздзяляе іх у адносіне $2 : 3$ і $4 : 5$.
- 575.** Прамыя, якія праходзяць праз вяршыні C і D чатырохвугольніка $ABCD$ і адпаведна паралельныя прамым BD і BC , перасякаюцца ў пункце E . Дакажыце, што трохвугольнік ACE роўнавялікі дадзенаму чатырохвугольніку.
- 576.** Праз сярэдзіну кожнай дыяганалі чатырохвугольніка правялі прамую, паралельную другой дыяганалі, і праз пункт перасячэння гэтых прамых і сярэдзіну кожнай стараны чатырохвугольніка правялі прамыя. Дакажыце, што яны раздзялілі чатырохвугольнік на роўнавялікія чатырохвугольнікі.
- 577.** Стараны AB, BC, CD, DA чатырохвугольніка роўныя 17 см , 25 см , 26 см , 30 см , а дыяганаль AC — 28 см . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка і яго дыяганаль BD .
- 578.** У круг з радыусам R умежаны тры роўныя кругі, якія датыкаюцца адзін да аднаго. Знайдзіце плошчу той часткі вялікага круга, якая не пакрываецца ўмежанымі кругамі (рыс. 404).



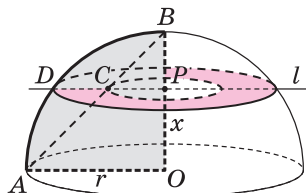
Рыс. 404

- 579.** Асновай прамой прызмы з’яўляецца прамавугольны трохвугольнік, адзін з катэтаў якога роўны 4 см. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы, праведзенага праз другі катэт і супрацьлеглую вяршыню верхняй асновы, улічыўшы, што бакавы кант прызмы роўны 3 см, а плошча апісанага каля яе шара — 61π см².
- 580.** Каля шара з радыусам r апісана правільная трохвугольная прызма. Знайдзіце яе:
а) бакавую паверхню; б) поўную паверхню.
- 581.** Дзве паўплоскасці з адной мяжой датыкаюцца да цыліндра, а двухгранны вугал паміж імі, звернуты да цыліндра, роўны 60° . Вызначце, у якой адносіне лініі дотыку гэтых паверхняў падзялілі бакавую паверхню цыліндра.
- 582.** Вось цыліндра з радыусам асновы r і ўдвая большай вышынёй з’яўляецца мяжой дзвюх паўплоскасцей, двухгранны вугал паміж якімі роўны 36° . Знайдзіце поўную паверхню атрыманай меншай часткі цыліндра.
- 583.** Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, улічыўшы, што плошча яго восевага сячэння роўная S .
- 584.** Знайдзіце поўную паверхню конуса, улічыўшы, што:
а) яго ўтваральнік складае з плоскасцю асновы вугал 45° , а вышыня роўная 6 см;
б) ён апісаны каля шара з радыусам r , а вугал паміж утваральнікам і асновай конуса роўны α ;
в) ён атрыманы згортваннем бляшанага сектара з вуглом 270° і радыусам 7,1 см і закрыты бляшаным кругам.
- 585.** Цэнтральны вугал разгорткі бакавой паверхні конуса роўны 90° . Знайдзіце плошчу яго восевага сячэння, улічыўшы, што радыус асновы конуса роўны 6 см.
- 586.** У конус вышынёй 24 см умежана піраміда, асновай якой з’яўляецца прамавугольнік са старанамі 12 см і 16 см. Знайдзіце адносіну поўных паверхняў піраміды і конуса.
- 587.** Ва ўсечаны конус умежана правільная ўсечаная n -вугольная піраміда. Радыусы асноў усечанага конуса роўныя 2 см і 5 см, а вышыня — 4 см. Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.
- 588.** Знайдзіце бакавую паверхню правільнай чатырохвугольнай піраміды, улічыўшы, што:
а) яе вышыня роўная 8 см, а сама яна апісана каля шара, цэнтр якога адлеглы ад бакавой грані піраміды на 3 см;
б) радыус умежанай у яе сферы роўны 8 см, а бакавая грань піраміды нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 60° ;

- в) яна апісана каля шара з радыусам R , а плоскі вугал пры яе вяршыні роўны α ;
- г) яна ўсечаная, апісаная каля шара з радыусам r , а двухгранны вугал пры яе аснове роўны α .
- 589.** Знайдзіце адносіну:
- а) поўнай паверхні цыліндра, умежанага ў шар, да паверхні шара, улічыўшы, што вышыня цыліндра роўная дыяметру яго асновы;
 - б) поўнай паверхні цыліндра да паверхні ўмежанага ў яго шара.
- 590.** Вызначце, як зменіцца паверхня шара, калі яго радыус павялічыць у 2 разы.
- 591.** Дыяметры трох шароў такія, што яны могуць быць старанамі прамавугольнага трохвугольніка. Устаноўце залежнасць паміж паверхнямі шароў.
- 592.** Праз сярэдзіну радыуса шара праведзена перпендыкулярная яму плоскасць. Вызначце, як адносіцца плошча атрыманага сячэння да плошчы вялікага круга.
- 593.** Знайдзіце плошчу сячэння шара плоскасцю, якая:
- а) адлеглая ад цэнтра на 10 см, а радыус шара роўны 60 см;
 - б) адлеглая ад цэнтра на 19 дм, а радыус шара роўны 82 см;
 - в) праведзена праз сярэдзіну радыуса даўжынёй 28 см;
 - г) праведзена праз канец радыуса даўжынёй R пад вуглом 60° да яго.
- 594.** Дакажыце, што сячэнні шара дзвюма плоскасцямі, што праходзяць праз канец аднаго дыяметра пад роўнымі вугламі да яго, роўнавялікія.
- 595.** Унутры шара з радыусам r узяты пункт, адлеглы ад цэнтра на d . Праз яго праведзены тры папарна перпендыкулярныя плоскасці. Знайдзіце суму плошчаў трох атрыманых сячэнняў.
- 596.** У цыліндр, дыяметр d якога роўны вышыні, умежаны шар. Знайдзіце паверхню шара і поўную паверхню цыліндра.
- 597.** Знайдзіце паверхню шара, улічыўшы, што:
- а) ён умежаны ў цыліндр з бакавой паверхняй 36π см²;
 - б) у яго ўмежана прамая прызма, асновай якой з'яўляецца раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік, вышыня прызмы роўная 12 см, а даўжыня дыяганалі меншай грані — 13 см;
 - в) ён апісаны каля прамой прызмы, асновай якой з'яўляецца раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 см кожны, а плошча сячэння, праведзенага праз адзін з катэтаў асновы і супрацьлеглую вяршыню верхняй асновы, роўная 7,5 см²;
 - г) ён датыкаецца да паверхні дадзенага шара з радыусам r , да бакавой паверхні цыліндра, апісанага каля дадзенага шара, і да адной асновы цыліндра;

- д) восевае сячэнне цыліндра, умежанага ў шар, з'яўляецца квадра-
там, а бакавая паверхня цыліндра роўная $16\pi \text{ см}^2$;
- е) ён умежаны ў правільную чатырохвугольную піраміду са стараной
асновы 4 см і бакавой гранню, нахіленай да плоскасці асновы пад
вуглом α ;
- ж) ён умежаны ў правільную чатырохвугольную піраміду, вышыня
якой у тры разы большая за радыус шара, а старана асновы роўная a ;
- з) ён апісаны каля правільнай піраміды, бакавы кант якой роўны b
і складае з асновай піраміды вугал α ;
- і) ён умежаны ў конус, утваральнік якога роўны l і складае з плос-
касцю асновы вугал 60° .
- 598.** Знайдзіце паверхню шара, апісанага каля правільнай чатырох-
вугольнай піраміды, у якой:
- а) старана асновы роўная 2 см, а бакавыя грані нахілены да плос-
касці асновы пад вуглом 60° ;
- б) старана асновы роўная a , а яе бакавыя канты нахілены да плос-
касці пад вуглом 30° ;
- в) бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° ,
а радыус акружнасці, апісанай каля асновы, роўны 6 см;
- г) кант якой роўны a і складае з плоскасцю асновы вугал α .
- 599.** Улічыўшы, што шар умежаны ў правільную чатырохвугольную пі-
раміду, адлегласць вяршыні якой да цэнтра шара роўная a , а вугал
нахілу бакавой грані да плоскасці асновы — α , знайдзіце поўную
паверхню піраміды.
- 600.** Радыус шара, умежанага ў правільную піраміду, роўны r , а двух-
гранны вугал пры аснове — α . Знайдзіце поўную паверхню пірамі-
ды, улічыўшы, што яна з'яўляецца:
- а) чатырохвугольнай; б) трохвугольнай.
- 601.** Праз пункт вышыні паўшара праведзена перпендыкулярная ёй
плоскасць і ў атрыманыя шаравыя сегмент і пласт умежаны такія
конус і цыліндр адпаведна, што сячэнне паўшара з'яўляецца іх
агульнай асновай. Знайдзіце такое становішча сячэння, пры якім
бакавыя паверхні конуса і цыліндра роўныя.
- 602.** Паўшар і ўмежаны ў яго конус маюць агульную аснову і агульную
вышыню. Праз сярэдзіну вышыні праведзена плоскасць, паралель-
ная аснове. Дакажыце, што плошча сячэння, заключанага паміж
бакавой паверхняй конуса і паверхняй паўшара, роўная палавіне
плошчы асновы.
- 603.** Радыус шара роўны 18 см. Вызначце, якую плошчу мае частка яго
паверхні, бачная з пункта, адлеглага ад цэнтра на 30 см.

- 604.** Чвэрць круга AOB з радыусам r верціцца вакол радыуса OB . Вызначце, на якой адлегласці x ад цэнтра O трэба выбраць пункт P і праз яго правесці прамую l , паралельную радыусу OA , каб кольца, апісанае адрэзкам CD , дзе C і D — пункты перасячэння прамой l з хордай AB і дугой AB адпаведна (рыс. 405), мела дадзеную плошчу πt , і знайдзіце найбольшае значэнне гэтай плошчы пры змяненні x ад 0 да r .



Рыс. 405

- 605.** Знайдзіце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, умежанага ў цыліндр:
- з радыусам асновы r , улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда складае з асновай цыліндра вугал α , а вугал паміж дыяганалямі асновы роўны 60° ;
 - з вышынёй h , улічыўшы, што вугал паміж дыяганалямі адной грані паралелепіпеда, звернуты да бакавога канта, роўны α , а вугал паміж дыяганалямі паралелепіпеда, звернуты да таго самага канта, — β .
- 606.** Ёсць цыліндр з радыусам асновы r , восевае сячэнне якога з'яўляецца квадратам. У яго ўмежана прамая трохвугольная прызма, у якой два двухгранныя вуглы пры бакавых кантах роўныя α кожны. Знайдзіце аб'ём прызмы.
- 607.** Асновай прамога паралелепіпеда з'яўляецца ромб з вострым вуглом α . У яго ўмежаны цыліндр з радыусам r , у якім дыяганаль восевага сячэння складае з асновай вугал 60° . Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.
- 608.** Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай прызмы, апісанай каля шара з радыусам r .
- 609.** Жалезабетонная пліта для перакрыцця столі памераў $180 \times 24 \times 580$ см мае па даўжыні 9 круглых скразных адтулін дыяметрам 10 см. Знайдзіце масу пліты, прыняўшы шчыльнасць жалезабетону роўнай 2400 кг/м^3 .
- 610.** Знайдзіце аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, умежанага ў шар з радыусам R , улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда складае з адной гранню вугал α , а:
- з другой — вугал 60° ;
 - вугал паміж дыяганаллю гэтай грані і стараной асновы роўны 60° .
- 611.** Знайдзіце аб'ём правільнай прызмы, умежанай у шар з радыусам:
- 9 см, улічыўшы, што яна чатырохвугольная і яе вышыня роўная 14 дм;
 - R , улічыўшы, што яна трохвугольная і яе вышыня роўная H ;

- в) R , улічыўшы, што яна чатырохвугольная і дыяганаль бакавой грані нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α .
- 612.** Знайдзіце аб'ём цыліндра, улічыўшы, што ён умежаны ў:
- а) правільную чатырохвугольную прызму, кожны кант якой роўны a ;
 - б) правільную шасцівугольную прызму, кожны кант якой роўны a ;
 - в) шар з радыусам R , а вышыня роўная дыяметру асновы;
 - г) шар з радыусам R , а дыяганаль яго восевага сячэння складае з асновай вугал α .
- 613.** Цыліндр з радыусам асновы r і вышынёй h рассечаны плоскасцю, паралельнай восі. Знайдзіце аб'ём меншай часткі цыліндра, улічыўшы, што дуга яе асновы роўная 120° .
- 614.** Знайдзіце аб'ём правільнай чатырохвугольнай піраміды, улічыўшы, што яна:
- а) апісана каля шара з радыусам 3 см, а дыяганаль яе асновы — $14\sqrt{2}$ см;
 - б) апісана каля шара з радыусам r , а двухгранны вугал пры яе аснове роўны α ;
 - в) умежана ў шар з радыусам 4 см, а бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 30° .
- 615.** Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, улічыўшы, што яна:
- а) апісана каля шара з аб'ёмам V , а двухгранны вугал пры аснове піраміды роўны α ;
 - б) умежана ў шар з радыусам R , а плоскі вугал пры вяршыні роўны α ;
 - в) умежана ў шар з радыусам R , а бакавы кант піраміды складае з асновай вугал α ;
 - г) умежана ў шар з радыусам r , а бакавая грань нахілена да асновы пад вуглом α ;
 - д) апісана каля шара з радыусам r , а вышыня піраміды роўная H .
- 616.** Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, улічыўшы, што:
- а) радыус шара, умежанага ў яе, роўны 10 см, а яе бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° ;
 - б) яе вышыня роўная H , а радыус апісанага каля яе шара — R .
- 617.** Знайдзіце аб'ём правільнай шасцівугольнай піраміды, улічыўшы, што:
- а) радыус шара, умежанага ў яе, роўны 10 см, а яе бакавыя грані нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 60° ;
 - б) яе вышыня роўная H , а радыус апісанага каля яе шара — R .
- 618.** Знайдзіце аб'ём конуса, улічыўшы, што:
- а) у яго ўмежана піраміда, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік з меншай стараной a , востры вугал паміж яго дыяганалямі — α ,

- а бакавая грань, якая змяшчае меншую старану асновы, складае з плоскасцю асновы вугал β ;
- б) ён умежаны ў піраміду, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной a і вострым вуглом φ , а ўтваральнік конуса складае з плоскасцю асновы вугал θ .
- 619.** Знайдзіце плошчу восевага сячэння конуса з аб'ёмам 48 см^3 і даўжынёй акружнасці асновы 9 см .
- 620.** Радыус конуса роўны r , а ўтваральнік складае з асновай вугал α . Знайдзіце аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, умежанай у конус.
- 621.** Утваральнік конуса роўны l і складае з асновай вугал α . У яго ўмежана піраміда, асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом β . Знайдзіце аб'ём піраміды.
- 622.** Знайдзіце аб'ём конуса, улічыўшы, што радыус яго асновы роўны 18 дм , а радыус умежанага ў конус шара роўны 9 дм .
- 623.** Знайдзіце аб'ём конуса, у які ўмежаны шар з радыусам r , улічыўшы, што:
- а) утваральнік конуса роўны дыяметру яго асновы;
 - б) гэта конус найменшага аб'ёму;
 - в) вугал нахілу ўтваральніка да плоскасці асновы роўны α .
- 624.** Правільная чатырохвугольная піраміда, у якой старана асновы роўная a , а плоскі вугал пры вяршыні роўны α , верціцца вакол прамой, якая праходзіць праз вяршыню і паралельная старане асновы. Знайдзіце аб'ём атрыманага цела вярчэння.
- 625.** Параўнайце паверхню шара з поўнай паверхняй цыліндра, улічыўшы, што яны маюць роўныя аб'ёмы, а радыус шара роўны радыусу асновы цыліндра.
- 626.** Вызначце, як адносяцца аб'ёмы шароў, калі іх паверхні адносяцца як $m : n$.
- 627.** Знайдзіце адносіну:
- а) аб'ёмаў шара і ўмежанага конуса, асновай якога служыць вялікі круг, а вяршыня належыць паверхні шара;
 - б) аб'ёмаў усечанага конуса з радыусамі асноў r і r_1 і ўмежанага ў яго шара.
- 628.** Знайдзіце аб'ём шара, улічыўшы, што:
- а) яго дыяметр роўны D ;
 - б) аб'ём яго часткі, заключаны паміж датычнай плоскасцю шара і плоскасцю, паралельнай ёй і адлеглай на 3 см , роўны $72\pi \text{ см}^3$;

- в) ён апісаны каля прамой прызмы з аб'ёмам 24 см^3 , асновай якой з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, а катэты асновы і бакавы кант адносяцца паміж сабой як $1 : 2 : 3$.
- 629.** Улічыўшы, што шар умежаны ў правільную трохвугольную піраміду са стараной асновы a і двухгранным вуглом пры ёй α , знайдзіце аб'ём шара.
- 630.** Знайдзіце аб'ём шара, улічыўшы, што ён:
а) апісаны каля правільнай трохвугольнай піраміды, старана асновы якой роўная 24 см , а бакавы кант — 16 см ;
б) умежаны ў правільную шасцівугольную піраміду, старана асновы якой роўная a , а двухгранны вугал пры аснове — α .
- 631.** Каб адліць свінцовы шар дыяметрам 3 см , выкарыстоўваюць свінцовыя шарыкі дыяметрам 5 мм . Вызначце, колькі такіх шарыкаў трэба ўзяць.
- 632.** Плоскасць, адлеглая на 3 см ад цэнтра шара, перасякае яго па крузе з радыусам 4 см . Знайдзіце аб'ём шара.
- 633.** Знайдзіце масу гранітнага шара дыяметрам $1,8 \text{ м}$, улічыўшы, што шчыльнасць граніту роўная $2,6 \text{ кг/дм}^3$.
- 634.** Знайдзіце радыус шара, улічыўшы, што яго маса роўная:
а) 150 кг , ён выраблены з жалеза, шчыльнасць якога роўная $7,9 \text{ г/см}^3$;
б) 10 кг , ён выраблены з чыгуну, шчыльнасць якога роўная $7,2 \text{ г/см}^3$.
- 635.** Вызначце:
а) шар якога дыяметра атрымаецца пры пераплаўцы двух чыгунных шароў з дыяметрамі 25 см і 35 см ;
б) колькі шарыкаў дыяметрам 1 см можна адліць з кавалка свінцу масай 1 кг , улічыўшы, што шчыльнасць свінцу роўная $11,4 \text{ г/см}^3$.
- 636.** Знешні дыяметр лага шара роўны 30 см , а таўшчыня сценак — 5 см . Знайдзіце аб'ём матэрыялу, з якога выраблены шар.
- 637.** Знайдзіце масу лага жалезнага шара, улічыўшы, што шчыльнасць жалеза роўная $7,9 \text{ г/см}^3$, а:
а) унутраны і знешні дыяметры адпаведна роўныя 35 мм і 50 мм ;
б) радыусы ўнутранай і знешняй паверхняў адпаведна роўныя 50 мм і 100 мм .
- 638.** Чыгунны шар дыяметрам 10 см пакрыты бронзавай абалонкай таўшчынёй 3 мм . Знайдзіце масу бронзы, зрасходаванай на пакрыццё шара, улічыўшы, што шчыльнасць бронзы роўная $8,7 \text{ г/см}^3$.



639*. Радыус шара роўны 2 м, а радыус сячэння шара плоскасцю — 1 м.



Знайдзіце аб'ём сектара, што адпавядае сегменту, адсечанаму плоскасцю.

640*. Вызначце, якую частку аб'ёму шара складае аб'ём шаравога сегмента, вышыня якога роўная дзясятай долі дыяметра шара.



641*. Знайдзіце аб'ём часткі шара, якую адсякае ад яго плоскасць, улічыўшы, што радыус акружнасці сячэння роўны:



а) 24 см, а радыус шара — 30 см; б) 60 см, а радыус шара — 75 см.

642*. Знайдзіце аб'ём часткі шара, улічыўшы, што яна заключана паміж:



а) двюма плоскасцямі, якія перпендыкулярныя дыяметру шара з радыусам R і раздзяляюць дыяметр на тры долі;

б) паралельнымі плоскасцямі α і β , з якіх плоскасць α перасякае шар з радыусам R па акружнасці з радыусам r , а плоскасць β роўна-адлеглая ад плоскасці α і паралельнай ёй датычнай плоскасці шара.

643*. Паверхня шара роўная 100π см². Знайдзіце аб'ёмы сегментаў, на якія плоскасць, перпендыкулярная дыяметру, дзеліць шар, улічыўшы, што плошча сячэння шара гэтай плоскасцю роўная 16π см².



644*. Плоскасць, перпендыкулярная дыяметру шара з радыусам 9 см, дзеліць гэты дыяметр у адносіне 1 : 2. Знайдзіце аб'ём меншага шаравога сегмента.



645*. Знайдзіце аб'ём шаравога сектара, улічыўшы, што:



а) яго радыус роўны r , а вугал яго восевага сячэння — 120° ;

б) радыус акружнасці асновы адпаведнага купала роўны 60 см, а радыус шара — 75 см;

в) радыус акружнасці адпаведнага купала роўны 100 см, а радыус шара — 125 см.

646*. Шаравы сектар утвораны вярчэннем кругавога сектара вакол сваёй восі сіметрыі. Дакажыце, што калі плошча яго восевага сячэння роўная трэцяй долі плошчы вялікага круга, то аб'ём яго роўны чацвёртай долі аб'ёму шара.



647. Шарпадобны прыёмнік газу мае ў дыяметры 9,22 м. Вызначце:

а) якая яго ўмяшчальнасць;

б) да колькіх атмасфер сціснута газ у газапрыёмніку, улічыўшы, што напампаваны ў яго газ пры нармальным ціску займае 2500 м³.

648. Вызначце, колькі вады змяшчае кацёл, памеры якога на рыс. 406 дадзены ў сантыметрах.

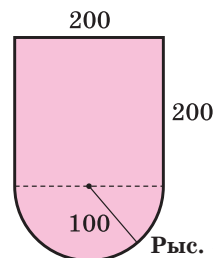


Рис. 406

- 649.** Газавы рэзервуар мае форму цыліндра, які зверху прыкрыты шаравым сегментам. Радыус цыліндра роўны 15,0 дм, вышыня цыліндрычнай часткі — 100 дм, а поўная вышыня рэзервуара — 125 дм. Знайдзіце яго аб'ём.
- 650.** Цыстэрна мае форму цыліндра, да асноў якога прыстаўлены роўныя шаравыя сегменты. Радыус цыліндра роўны 1,5 м, а вышыня сегмента — 0,5 м. Вызначце, якой даўжыні павінен быць утваральнік цыліндра, каб умяшчальнасць цыстэрны была роўнай 50 м^3 .
- 651.** Шар атрыманы вярчэннем паўкруга вакол прамой, якая змяшчае дыяметр. Пры гэтым паверхня, утвораная вярчэннем хорды, адзін канец якой супадае з канцом дадзенага дыяметра, раздзяляе шар на часткі з роўнымі аб'ёмамі. Знайдзіце косінус вугла паміж гэтай хордай і дыяметрам.
- 652.** Шар з радыусам 15 см цыліндрычна прасвідраваны па восі. Дыяметр адтуліны 18 см. Знайдзіце поўную паверхню атрыманага цела.

§ 10. Каардынаты і вектары

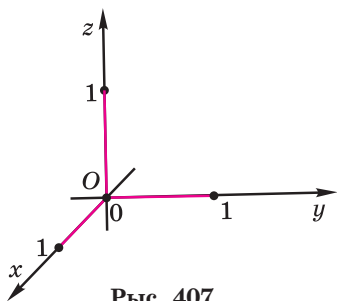


А) Каардынаты

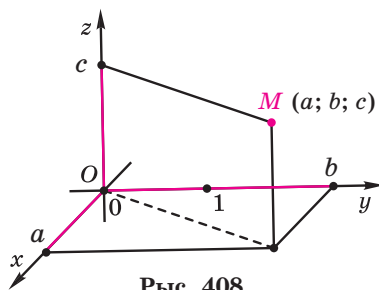
Дэкартава сістэма каардынат у прасторы дазваляе ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць паміж пунктамі прасторы і ўпарадкаванымі тройкамі рэчаісных лікаў. Дэкартаву сістэму каардынат утвараюць тры папарна перпендыкулярныя каардынатныя восі з агульным пачаткам і аднолькавымі адзінкавымі адрэзкамі (рыс. 407). Кожнаму пункту M прасторы адпавядае ўпарадкаваная тройка лікаў $(A; B; C)$ — каардынаты гэтага пункта (рыс. 408).

Па каардынатах канцоў $A(x_A; y_A; z_A)$ і $B(x_B; y_B; z_B)$ адрэзка AB можна вызначыць яго даўжыню: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. Каардынаты сярэдзіны адрэзка ёсць сярэднія арыфметычныя адпаведных каардынат яго канцоў: калі $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ і пункт $C(x_C; y_C; z_C)$ — сярэдзіна адрэзка AB , то:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$



Рыс. 407



Рыс. 408

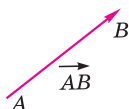
Б) Вектары

Накіраваныя адрэзкі выяўляюць вектары (рыс. 409). Пачатак накіраванага адрэзка лічыцца пачаткам вектара, а канец — канцом вектара, даўжынёй вектара лічыцца даўжыня накіраванага адрэзка. Вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ лічацца роўнымі, калі яны аднолькава накіраваны і маюць аднолькавую даўжыню (рыс. 410). Роўнасць $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ азначае, што сярэдзіны адрэзкаў AD і BC супадаюць (рыс. 411 а, б).

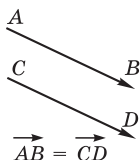
Вектар, які выяўляецца накіраваным адрэзкам $\overrightarrow{AA}$, называюць нулявым: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Вектары, што выяўляюцца накіраванымі адрэзкамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, называюць супрацьлеглымі: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Складваць вектары можна па правіле трохвугольніка $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$ (рыс. 412) або па правіле паралелаграма $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ (рыс. 413).

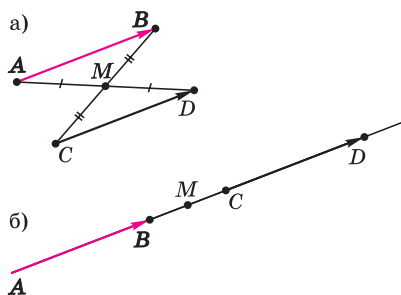
Складанне вектараў мае перамяшчальную ўласцівасць, г. зн. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, спалучальную ўласцівасць, г. зн. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, акрамя таго, ураўненне $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ заўсёды мае адзінае рашэнне, якое называюць рознасцю вектараў $\vec{b}$ і $\vec{a}$: $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ (рыс. 414).



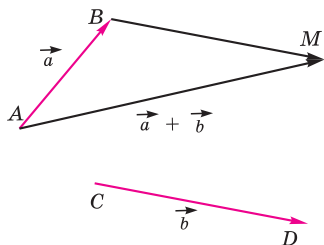
Рыс. 409



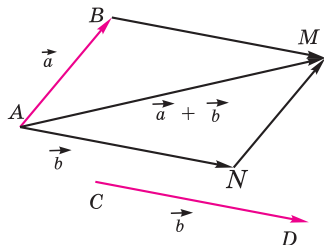
Рыс. 410



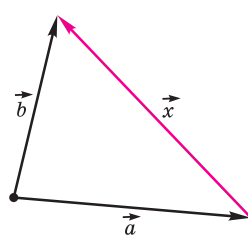
Рыс. 411



Рыс. 412



Рыс. 413



Рыс. 414

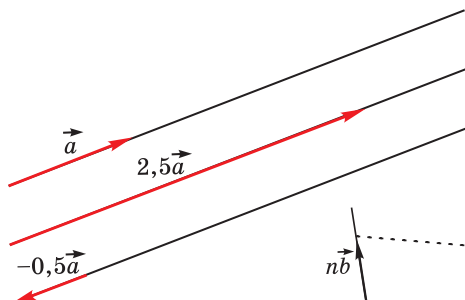


Рис. 415

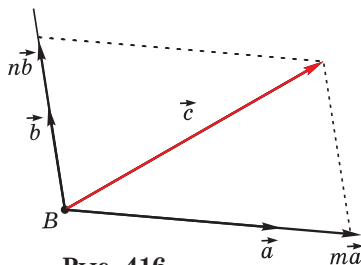


Рис. 416

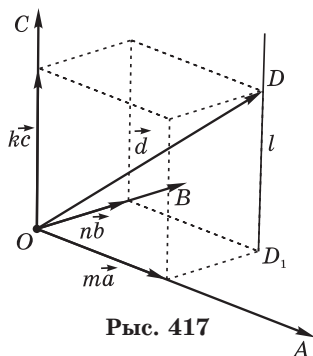


Рис. 417

Здабыткам вектара $\vec{a}$ на лік k з'яўляецца такі вектар $k\vec{a}$, што, першае, вектары $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ аднолькава накіраваны пры $k > 0$ і супрацьскіраваны пры $k < 0$ і, па-другое, даўжыні вектараў $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ звязаны роўнасцю $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ (рис. 415).

Пры гэтым праўдзіцца роўнасць $(m \cdot n)\vec{a} = m(n\vec{a})$. Калі $k = 0$, то здабыткам $k\vec{a}$ з'яўляецца нулявы вектар. З дзеяннем множання вектара на лік звязваюцца дзве размеркавальныя ўласцівасці:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \text{і} \quad (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}.$$

Вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, паралельныя адной прамой, называюць *калінеарнымі*. Калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ калінеарныя, то адзін з іх можна выразіць праз другі: або $\vec{a} = n\vec{b}$, або $\vec{b} = m\vec{a}$ пры пэўных ліках m і n .

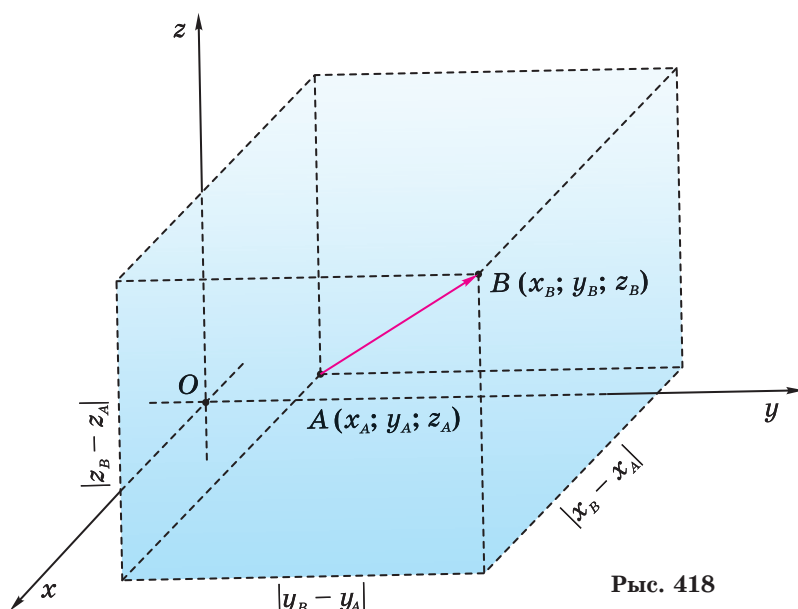
Для любых двух вектараў існуе плоскасць, якой яны паралельныя. Вектары, якія паралельныя адной плоскасці, называюць **кампланарнымі**. Калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ некалінеарныя, то любы вектар $\vec{c}$, кампланарны з імі, можна адназначна выявіць праз вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \quad (\text{рис. 416}).$$

Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне: калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ звязаны роўнасцю $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, то яны кампланарныя.

Калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і не кампланарныя, то для любога вектара $\vec{d}$ існуе адзіная ўпарадкаваная тройка рэчаісных лікаў (m, n, k) такая, што $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$ (рис. 417).

Такім чынам, з двух калінеарных вектараў адзін можа быць выражаны праз другі, з трох кампланарных вектараў адзін можа быць выражаны праз два другія, а з чатырох любых вектараў адзін можа быць выражаны праз тры другія.



Рыс. 418

Калі выбрана дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$, то каардынаты $(a; b; c)$ пункта M прасторы называюць і каардынатамі вектара $\overrightarrow{OM}$. Калі $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, то $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ (рыс. 418). Пры складанні вектараў іх адпаведныя каардынаты складаюцца, пры множанні вектара на лік усе яго каардынаты множацца на гэты лік: калі $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ і $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$ і $k\vec{a}(kx_a; ky_a; kz_a)$.

Скалярным здабыткам ненулявых вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ называецца лік $\vec{a} \cdot \vec{b}$, роўны здабытку даўжынь гэтых вектараў на косінус вугла α паміж імі: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, а калі хаця б адзін з множнікаў ёсць нулявы вектар, то скалярны здабытак такіх вектараў па азначэнні прымаецца роўным нулю.

Скалярны здабытак вектараў мае перамяшчальную ўласцівасць $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, , размеркавальную ўласцівасць $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, множнік можна выносіць за знак скалярнага здабытку $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$. З дапамогай скалярнага здабытку можна знаходзіць даўжыні вектараў і косінусы вуглоў паміж імі: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Два вектары перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі іх скалярны здабытак роўны нулю. Скалярны здабытак вектараў $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ і $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$ выражаецца праз іх каардынаты ў дэкартавай сістэме роўнасцю $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Ураўненне $ax + by + cz + d = 0$, у якім каэфіцыенты a, b, c не роўныя нулю адначасова, праўдзіць любы пункт паўнай плоскасці. Гэтай плоскасці перпендыкулярны вектар $\vec{N} (a; b; c)$. Калі плоскасць мае ўраўненне $ax + by + cz + d = 0$, то адлегласць да яе ад пункта $M_0 (x_0; y_0; z_0)$ роўная
$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

В) Выкарыстанне вектараў і каардынат

Скалярны здабытак вектараў можна выкарыстаць для знаходжання:

- вугла α паміж прамымі AB і CD : $\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|}$;
- вугла β паміж плоскасцямі праз перпендыкулярныя гэтым плоскасцям вектары $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$: $\cos \beta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$;
- вугла γ паміж прамой AB і плоскасцю, якой перпендыкулярны вектар $\vec{N}$: $\sin \gamma = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{N}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{N}|}$;
- адлегласці d ад пункта M да прамой AB : $d = \frac{\sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AM}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AM})^2}}{|\vec{AB}|}$.



1. Як задаць прававугольную дэкартаву сістэму каардынат на плоскасці; у прасторы?
2. Як знайсці каардынаты дадзенага пункта на плоскасці; у прасторы?
3. Як знайсці пункт па яго вядомых каардынатах на плоскасці; у прасторы?
4. Як знайсці каардынаты сярэдзіны адрэзка па вядомых каардынатах яго канцоў на плоскасці; у прасторы?
5. Як выяўляецца вектар? Што называюць пачаткам вектара; канцом вектара; даўжынёй вектара?
6. Якія вектары лічацца роўнымі; супрацьлеглымі?
7. Як можна знайсці суму вектараў?
8. Якія ўласцівасці мае складанне вектараў?
9. Як азначаецца рознасць вектараў? Які вектар лічыцца нулявым?
10. Як азначаецца здабытак вектара на лік?
11. Якія ўласцівасці мае множанне вектара на лік?
12. Якія вектары называюцца калінеарнымі? Якую ўласцівасць маюць калінеарныя вектары?
13. Якія вектары называюцца кампланарнымі? Якую ўласцівасць маюць кампланарныя вектары?
14. Сфармулюйце ўласцівасць, якую маюць любыя чатыры вектары прасторы.
15. Як азначаюцца каардынаты вектара ў дэкартавай сістэме каардынат?

16. Як знайсці каардынаты вектара па каардынатах яго канцоў?
17. Як знайсці каардынаты сумы дадзеных вектараў; здабытку дадзенага вектара на лік?
18. Як азначаецца скалярны здабытак вектараў?
19. Якія ўласцівасці мае скалярны здабытак вектараў?
20. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці двух вектараў.
21. Як выражаецца скалярны здабытак вектараў праз іх каардынаты?
22. Як выкарыстаць скалярны здабытак для знаходжання даўжыні вектара; вугла паміж вектарамі; вугла паміж прамымі?
23. Растлумачце сказ «Плоскасць β мае ўраўненне $ax + by + cz + d = 0$ ». Які сэнс мае тройка лікаў $(a; b; c)$?
24. Як знайсці адлегласць ад зададзенага сваімі каардынатамі пункта да плоскасці, што зададзена сваім ураўненнем?
25. Як можна знайсці вугал паміж прамымі, кожная з якіх праходзіць праз два пункты з вядомымі каардынатамі?
26. Як можна знайсці вугал паміж двюма плоскасцямі, што зададзены сваімі ўраўненнямі?
27. Як можна знайсці вугал паміж плоскасцю, якая зададзена сваім ураўненнем, і прамой, што праходзіць праз два пункты з вядомымі каардынатамі?
28. Як можна знайсці адлегласць ад дадзенага пункта да прамой, што праходзіць праз два пункты з вядомымі каардынатамі?



Задача 1. Знайдзіце каардынаты цэнтра і радыус сферы, апісанай каля трохвугольнай піраміды $ABCD$, вяршыні якой маюць каардынаты $A(1; 2; 13)$, $B(4; 6; 12)$, $C(13; 5; 4)$ і $D(-11; 6; -3)$.

Р а ш э н н е. Няхай у сферы, апісанай каля трохвугольнай піраміды $ABCD$, цэнтр знаходзіцца ў пункце $Q(x, y, z)$, а радыус роўны R . Тады $AQ = BQ = CQ = DQ = R$. Таму:

$$\begin{cases} R^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-13)^2, \\ R^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-12)^2, \\ R^2 = (x-13)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2, \\ R^2 = (x+11)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2, \end{cases} \quad \text{або:} \quad \begin{cases} R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 26z + 174, \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 12y - 24z + 196, \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 26x - 10y - 8z + 210, \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 22x - 12y + 6z + 166, \end{cases}$$

або, пасля аднімання першай роўнасці ад астатніх:

$$\begin{cases} R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 26z + 174, \\ 0 = -6x - 8y + 2z + 22, \\ 0 = -24x - 6y + 18z + 36, \\ 0 = 24x - 8y + 32z - 8. \end{cases}$$

З трэцяй умовы знаходзім, што $y = -4x + 3z + 6$. З улікам гэтага другая і чацвёртая ўмовы даюць:

$$\begin{cases} 13x - 11z = 13, \\ 7x + z = 7, \end{cases}$$

адкуль знаходзім, што $x = 1, z = 0$. Тады $y = 2$ і $R = 13$.

Адказ: $Q(1, 2, 0), R = 13$.

Задача 2. У трохвугольніку ABC адзначаны пункт Q . Дакажыце, што $S_{BQC} \cdot \overrightarrow{QA} + S_{AQC} \cdot \overrightarrow{QB} + S_{AQB} \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$.

Няхай у трохвугольніку ABC адзначаны пункт Q і няхай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — вектары адзінкавай даўжыні, накіраваныя па праменях QA, QB, QC адпаведна (рыс. 419). З улікам таго, што:

$$S_{BQC} = QB \cdot QC \cdot \sin \angle BQC,$$

$$S_{AQC} = QA \cdot QC \cdot \sin \angle AQC,$$

$$S_{AQB} = QA \cdot QB \cdot \sin \angle AQB,$$

$$\overrightarrow{QA} = QA \cdot \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{QB} = QB \cdot \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{QC} = QC \cdot \vec{e}_3,$$

маем:

$$\begin{aligned} S_{BQC} \cdot \overrightarrow{QA} + S_{AQC} \cdot \overrightarrow{QB} + S_{AQB} \cdot \overrightarrow{QC} &= \\ &= QA \cdot QB \cdot QC \cdot (\sin \angle BQC \cdot \vec{e}_1 + \\ &+ \sin \angle AQC \cdot \vec{e}_2 + \sin \angle AQB \cdot \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Правядзём тры прамыя, паралельныя QA, QB, QC , якія папарна перасякаюцца ў пунктах C_1, A_1, B_1 (рыс. 420).

Паколькі $A_1B_1 \parallel QC$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = A_1B_1 \cdot \vec{e}_3$.

Аналагічна $\overrightarrow{C_1A_1} = C_1A_1 \cdot \vec{e}_2$, бо $C_1A_1 \parallel QB$

і $\overrightarrow{B_1C_1} = B_1C_1 \cdot \vec{e}_1$, бо $B_1C_1 \parallel AQ$.

Дадаткова, па ўласцівасці вуглоў з адпаведна паралельнымі старанамі, маем:

$$\sin \angle AQB = \sin \angle A_1C_1B_1, \quad \sin \angle AQC = \sin \angle A_1B_1C_1, \quad \sin \angle BQC = \sin \angle B_1A_1C_1.$$

Выразім стораны трохвугольніка $A_1B_1C_1$ праз яго вуглы і радыус R апісанай акружнасці:

$$A_1B_1 = 2R \sin \angle A_1C_1B_1, \quad B_1C_1 = 2R \sin \angle B_1A_1C_1, \quad C_1A_1 = 2R \sin \angle C_1B_1A_1.$$

Цяпер атрымліваем:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1A_1} = A_1B_1 \cdot \vec{e}_3 + B_1C_1 \cdot \vec{e}_1 + C_1A_1 \cdot \vec{e}_2 = \\ &= 2R (\sin \angle A_1C_1B_1 \cdot \vec{e}_3 + \sin \angle B_1A_1C_1 \cdot \vec{e}_1 + \sin \angle C_1B_1A_1 \cdot \vec{e}_2) = \\ &= 2R (\sin \angle AQB \cdot \vec{e}_3 + \sin \angle BQC \cdot \vec{e}_1 + \sin \angle CQA \cdot \vec{e}_2). \end{aligned}$$

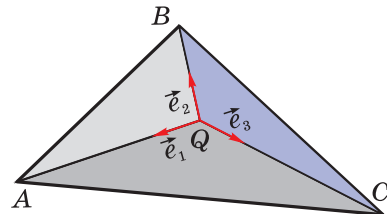


Рис. 419

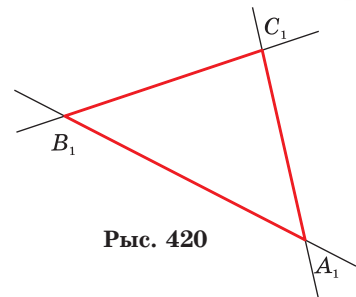


Рис. 420

Задача 3. У чатырохвугольніку $ABCD$ вядомы стораны і вуглы: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$.

Дакажыце, што чацвёртая старана AD праўдзіць роўнасць:

$$AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \beta - 2bc \cos \gamma + 2ac \cos (\beta + \gamma)$$

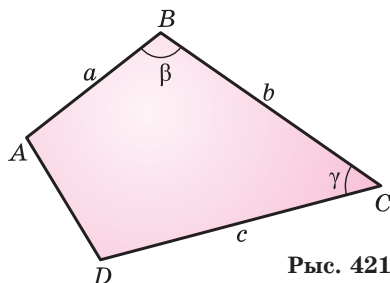
(гэта так званая *першая тэарэма косінусаў для чатырохвугольніка*).

Чатырохвугольнік $ABCD$ цалкам вызначаецца вектарамі $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ (рыс. 421). Тады $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ і:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD}^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

Паколькі вугал паміж вектарамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ дапаўняе вугал ABC да 180° , то $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2ab \cos \beta$. Аналагічна $2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -2bc \cos \gamma$. Вугал паміж вектарамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ роўны суме β і γ , паколькі вектар $\overrightarrow{AB}$ пасля павароту на вугал β атрымае кірунак вектара $\overrightarrow{BC}$, а затым, пасля павароту на вугал γ , — кірунак вектара $\overrightarrow{CD}$, то $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2ac \cos (\beta + \gamma)$.

Гэтым завяршаецца доказ патрэбнага сцверджання.



Рыс. 421



- 653.** У прамавугольнага паралелепіпеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ бакавыя грані паралельныя каардынатым восям. Знайдзіце каардынаты яго вяршынь, улічыўшы, што $B(4; 2; -2)$, $D_1(-1; 3; 4)$.
- 654.** Знайдзіце адлегласць ад пункта $M(4; -3; 12)$ да:
- каардынатых плоскасцей;
 - каардынатых восяў;
 - пачатку каардынат.
- 655.** На каардынатых восях знайдзіце пункты, размешчаныя на адлегласці d ад пункта $K(5; 4; -3)$, калі:
- $d = 10$;
 - $d = 7$;
 - $d = 13$.
- 656.** Знайдзіце ўсе пункты, роўнаадлеглыя ад пунктаў $A(-1; 4; 11)$, $B(3; -4; 11)$ і $C(11; -5; 4)$.
- 657.** Знайдзіце каардынаты цэнтра і радыус сферы, апісанай каля трохвугольнай піраміды $ABCD$, вяршыні якой маюць каардынаты $A(5; 0; 7)$, $B(5; 5; 4)$, $C(-7; 5; 4)$ і $D(-7; 0; 4)$.

658. Вызначце, у якой адносіне плоскасць $2x - 3y + 5z - 5 = 0$ раздзяляе адрэзак AB , калі:
- а) $A(3; -2; -1)$, $B(2; 7; -1)$; б) $A(-1; 4; 11)$, $B(3; -4; 1)$.
659. Знайдзіце мноства такіх пунктаў $M(x; y; z)$, што сума квадратаў адлегласцей ад іх да пунктаў $A(1; 2; 3)$ і $B(3; 4; -1)$ роўная 44.
660. Знайдзіце мноства такіх пунктаў $M(x; y; z)$, што сума квадратаў адлегласцей ад іх да пунктаў $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 4)$ і $C(3; -5; 2)$ роўная 105.
661. Каля квадрата апісана акружнасць. Дакажыце, што сума квадратаў адлегласцей ад любога пункта гэтай акружнасці да вяршынь квадрата роўная пачацвяронамү квадрату яго стараны. Як зменіцца гэтае сцверджанне, калі разглядаць пункты ўмежанай у квадрат акружнасці?
662. Каля куба апісана сфера. Дакажыце, што сума квадратаў адлегласцей ад любога пункта гэтай сферы да вяршынь куба роўная суме квадратаў усіх кантаў куба. Як зменіцца гэтае сцверджанне, калі разглядаць пункты ўмежанай у куб сферы?
663. Няхай M і N — сярэдзіны адрэзкаў AB і CD . Дакажыце, што:
- $$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$
664. Выявіце трохвугольную прызму $ABCA_1B_1C_1$. Пакажыце вектары:
- а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{B_1B}$; в) $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CC_1}$;
 б) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{C_1C}$.
665. У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ супадаюць пункты перасячэння медыян. Дакажыце, што прамыя AA_1 , BB_1 і CC_1 паралельны адной плоскасці.
666. У прасторы размешчаны два паралелаграмы $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$. Пункты A, B, C, D — сярэдзіны адрэзкаў A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 і D_1D_2 адпаведна. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ таксама паралелаграм.
667. У паралелепіпедзе $ABCD A_1B_1C_1D_1$ пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў AA_1 і BD . Дакажыце, што прамыя MN , C_1D_1 і B_1C паралельныя пэўнай плоскасці.
668. У кожнай з бакавых граняў трохвугольнай прызмы праведзена дыяганаль. Дакажыце, што не існуе плоскасці, якой паралельны гэтыя дыяганалі. Ці праўдзіцца аналагічнае сцверджанне для чатырохвугольнай прызмы?
669. У прасторы адзначаны пункты A, B, C, D . Якую фігуру ўтвараюць усе такія пункты M , для якіх:
- а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + x\overrightarrow{AD}$, $0 \leq x \leq 1$;
 б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{AD}$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;
 в) $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{AD}$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

- 670.** У прасторы адзначаны пункты A, B, C, D . Выведзіце, для якіх пунктаў M праўдзіцца роўнасць $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.
- 671.** Дакажыце, што вектары $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- 672.** Дакажыце, што існуе трохвугольнік, стораны якога роўныя і паралельныя медыянам дадзенага трохвугольніка.
- 673.** Стораны трохвугольніка T_1 паралельныя медыянам трохвугольніка T_2 . Дакажыце, што стораны трохвугольніка T_2 паралельныя медыянам трохвугольніка T_1 .
- 674.** Чатыры кампланарныя вектары аднолькавай даўжыні ў суме даюць нулявы вектар. Дакажыце, што гэта дзве пары супрацьлеглых вектараў.
- 675.** З пункта Q , узятага ўнутры выпуклага n -вугольніка, правялі прамені, якія перасякаюць стораны многавугольніка або іх працягі пад прамымі вугламі. На кожным прамені ад пункта Q адкладзі вектар $\vec{a}_i$, даўжыня якога роўная даўжыні адпаведнай стараны. Дакажыце, што $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{0}$.
- 676.** Дакажыце, што для адвольных пунктаў A, B, C, D праўдзіцца роўнасць $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
- 677.** Канты AD і BC асновы піраміды $SABCD$ паралельныя, пункты M і N выбраны на кантах SA і SC так, што $SM : MA = 1 : 2$, $SN : NC = 2 : 1$. Улічыўшы, што $BC = 3AD$, знайдзіце, у якой адносіне плоскасць MNB раздзяляе кант SD .
- 678.** Прамені l_1, l_2 і l_3 — бісектрысы вуглоў, што ўтвораны праменьнямі QA, QB і QC . Дакажыце, што калі $l_1 \perp l_2$, то прамені l_1, l_2 і l_3 папарна перпендыкулярныя.
- 679.** Дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перасякаюцца ў пункце Q . Дакажыце, што:
 а) $\cos \angle AQB + \cos \angle AQD + \cos \angle AQA_1 = 1$;
 б) $\cos \angle AQC + \cos \angle AQD_1 + \cos \angle AQB_1 = -1$.
- 680.** Пункт Q — цэнтр апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці. Дакажыце, што пункт H з'яўляецца пунктам перасячэння вышынь тады і толькі тады, калі $\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$.
- 681.** Знайдзіце мноства пунктаў прасторы, для якіх сума квадратаў адлегласцей да каардынатных восей роўная a^2 .
- 682.** Знайдзіце мноства пунктаў прасторы, для якіх сума квадратаў адлегласцей да каардынатных плоскасцей роўная a^2 .

- 683.** Запішыце ўраўненне плоскасці, якая праходзіць праз вось Oz і паралельная прамой AB , калі $A(2; 1; -1)$, $B(3; -2; 2)$.
- 684.** Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых AB і CD , улічыўшы, што:
- а) $A(2; 1; -1)$, $B(2; 2; -2)$, $C(-2; 2; -2)$, $D(1; 2; 0)$;
 - б) $A(-2; 1; -1)$, $B(3; 2; -2)$, $C(-3; 2; 6)$, $D(3; 2; 10)$;
 - в) $A(-2; 1; -1)$, $B(-3; 2; -2)$, $C(-3; 2; 6)$, $D(-1; 0; 8)$;
 - г) $A(-2; 1; -1)$, $B(-3; 2; -2)$, $C(3; -4; 4)$, $D(1; -2; 6)$.
- 685.** Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамой AB і сферы з цэнтрам Q і радыусам R , улічыўшы, што:
- а) $A(1; -1; 4)$, $B(3; 0; 2)$, $Q(2; -2; 1)$ і $R = 3$;
 - б) $A(1; -1; -3)$, $B(3; 0; -1)$, $Q(2; -2; 1)$ і $R = 1$;
 - в) $A(5; -7; -4)$, $B(5; 1; 0)$, $Q(3; -2; 1)$ і $R = 3$.
- 686.** Знайдзіце даўжыню адрэзка прамой AB , што належыць шару з цэнтрам Q і радыусам R , улічыўшы, што:
- а) $A(-5; -6; 9)$, $B(-7; -6; 7)$, $Q(2; -2; 1)$ і $R = 13$;
 - б) $A(-4; 9; 3)$, $B(4; 15; -3)$, $Q(2; 4; -1)$ і $R = 3$.
- 687.** З пункта M праведзены ўсе датычныя да сферы з цэнтрам Q і радыусам R . Запішыце ўраўненне плоскасці, у якой знаходзяцца пункты дотыку, улічыўшы, што:
- а) $M(0; 2; 3)$, $Q(2; -2; 1)$ і $R = 3$;
 - б) $M(10; 1; 2)$, $Q(-2; 1; 7)$ і $R = 5$.
- 688.** Сфера з цэнтрам Q датыкаецца да прамой AB . Знайдзіце ўмову, якую праўдзіць радыус гэтай сферы, улічыўшы, што:
- а) $Q(2; -2; 1)$, $A(0; 2; 3)$, $B(3; 0; 2)$;
 - б) $Q(-2; 1; 0)$, $A(1; 1; 2)$, $B(2; 1; -1)$.
- 689.** Знайдзіце каардынаты тых пунктаў на сферы з цэнтрам Q і радыусам R , якія найбольш блізкія і найбольш аддаленыя ад прамой AB , улічыўшы, што:
- а) $A(0; 6; -1)$, $B(6; 0; -4)$, $Q(2; -2; 1)$ і $R = 3$;
 - б) $A(4; 1; 1)$, $B(-11; 1; 0)$, $Q(-2; 1; 0)$ і $R = 3$.
- 690.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні A прызмы:
- а) да прамой CD_1 ; в) да прамой DE_1 ; д) да прамой BC_1 ;
 - б) да прамой $C_1 D$; г) да прамой $D_1 E$; е) да прамой $B_1 C$.
- 691.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні A прызмы:
- а) да прамой $D_1 E$; в) да прамой $B_1 D$; д) да прамой DE_1 ;
 - б) да прамой BF_1 ; г) да прамой $B_1 E$; е) да прамой $A_1 C$.

- 692.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:
 а) AB_1 і BC_1 ; в) AB_1 і BE_1 ; д) AC_1 і BD_1 ;
 б) AB_1 і BD_1 ; г) AB_1 і BF_1 ; е) AC_1 і BE_1 .
- 693.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце вугал паміж прамымі:
 а) AB_1 і $B_1 C$; в) AB_1 і $B_1 E$; д) AC_1 і $B_1 D$;
 б) AB_1 і $B_1 D$; г) AB_1 і $B_1 F$; е) AC_1 і $B_1 E$.
- 694.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце вугал паміж плоскасцю ACD_1 і прамой:
 а) AB_1 ; в) BC_1 ; д) AC_1 ; ж) BF_1 ;
 б) BD_1 ; г) BE_1 ; е) BA_1 ; з) $B_1 E$.
- 695.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:
 а) $AB_1 C$ і $A_1 B F$; в) $AB_1 C$ і $A_1 B E_1$; д) $AE_1 C_1$ і $F B D_1$;
 б) $AB_1 C$ і $A_1 B D_1$; г) $AB_1 C$ і $A_1 B F_1$; е) $AE_1 C_1$ і $F_1 B C_1$.
- 696.** У правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні D прызмы да плоскасці:
 а) $AB_1 C$; в) $A_1 B F$; д) $A_1 B E_1$; ж) $F B D_1$;
 б) $A_1 B D_1$; г) $A_1 B F_1$; е) $AE_1 C_1$; з) $F_1 B E_1$.

§ 11. Геаметрычныя пабудаванні

А) Геаметрычныя месцы пунктаў

Мноства ўсіх пунктаў, што маюць пэўную ўласцівасць, называюць *геаметрычным месцам пунктаў*.

Геаметрычным месцам пунктаў, якія:

- роўнаадлеглыя ад старон вугла, з'яўляецца бісектрыса гэтага вугла (рыс. 422);
- роўнаадлеглыя ад дадзенага пункта, з'яўляецца акружнасць (рыс. 423);
- роўнаадлеглыя ад двух дадзеных пунктаў, з'яўляецца пасярэдні перпендыкуляр да адрэзка, што злучае гэтыя пункты (рыс. 424);

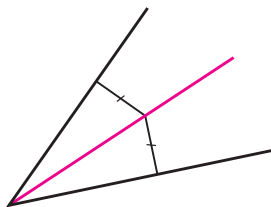


Рис. 422

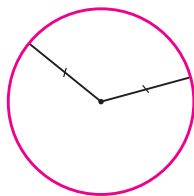


Рис. 423

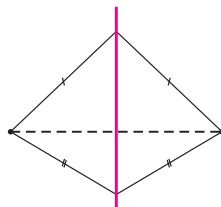


Рис. 424

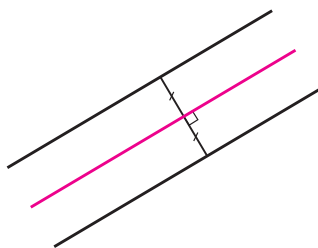


Рис. 425

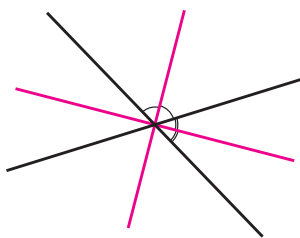


Рис. 426

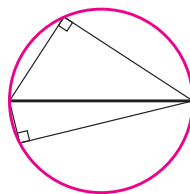


Рис. 427

- роўнаадлеглыя ад дзвюх дадзеных паралельных прамых, з'яўляецца пасярэдні перпендыкуляр да перпендыкуляра, апушчанага з якога-небудзь пункта адной прамоў на другую прамоў (рис. 425);
- роўнаадлеглыя ад дзвюх дадзеных перасякальных прамых, з'яўляецца пара прамых, утвораных бісектрысамі вуглоў, на якія дадзеныя прамыя раздзяляюць плоскасць (рис. 426).

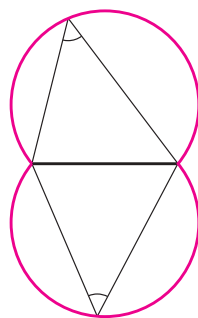


Рис. 428

Геаметрычным месцам пунктаў, з якіх:

- дадзены адрэзак бачны пад прамым вуглом, з'яўляецца акружнасць, для якой дадзены адрэзак служыць дыяметрам (рис. 427);
- дадзены адрэзак бачны пад дадзеным вуглом, адрозным ад разгорнутага, з'яўляецца пара дуг, для якіх дадзены адрэзак служыць агульнай хордай (рис. 428).

Б) Пабудаванні лінейкай і цыркулем

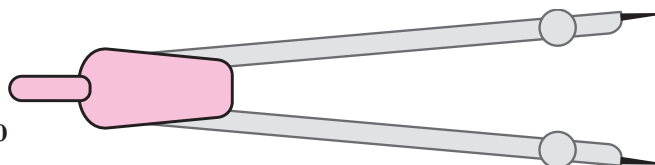
У геаметрыі важную ролю адыгрываюць пабудаванні з выкарыстаннем толькі двух інструментаў — лінейкі і цыркуля.

Геаметрычная лінейка аднабаковая і не мае дзяленняў (рис. 429). З яе дапамогай можна правесці:



Рис. 429

- прамую праз дадзеныя пункты;
- прамень, што пачынаецца ў дадзеным пункце і праходзіць праз іншы дадзены пункт;
- адрэзак, што злучае дадзеныя пункты;
- адвольную прамую;
- адвольны прамень;
- адвольны адрэзак.



Рыс. 430

З дапамогай *цыркуля* (рыс. 430) можна:

- адзначыць два пункты R і S , адлегласць паміж якімі роўная дадзенаму адрэзку AB ;
- пабудаваць акружнасць з цэнтрам у выбраным пункце і радыусам, роўным дадзенаму адрэзку;
- пабудаваць адвольную акружнасць.

Гэта *элементарныя пабудаванні*, якія можна выканаць лінейкай або цыркулем. Іх спалучэнне дазваляе праводзіць больш складаныя пабудаванні.

Рашыць задачу на пабудаванне з дапамогай цыркуля і лінейкі азначае звесці яе да паслядоўнага выканання элементарных пабудаванняў, кожнае з якіх можна выканаць цыркулем або геаметрычнай лінейкай. Разам з гэтым звязанне рашэння кожнай задачы да элементарных пабудаванняў нерацыянальнае. Звычайна пабудаванне патрэбнай фігуры зводзяць да так званых *асноўных пабудаванняў*:

- пабудаванне адрэзка, роўнага дадзенаму адрэзку;
- пабудаванне вугла, роўнага дадзенаму вуглу;
- пабудаванне трохвугольніка, роўнага дадзенаму трохвугольніку;
- пабудаванне трохвугольніка, стараны якога роўныя тром дадзеным адрэзкам;
- пабудаванне трохвугольніка, старана якога роўная дадзенаму адрэзку, а прылеглыя да гэтай стараны вуглы — двум дадзеным вуглам;
- пабудаванне трохвугольніка, вугал якога роўны дадзенаму вуглу, а прылеглыя да яго стараны — двум дадзеным адрэзкам;
- пабудаванне сярэдзіны дадзенага адрэзка;
- пабудаванне бісектрысы дадзенага вугла;
- пабудаванне прамой, якая праходзіць праз дадзены пункт і перпендыкулярная дадзенай прамой;
- пабудаванне прамой, якая праходзіць праз дадзены пункт і паралельная дадзенай прамой;

- пабудаванне прамавугольнага трохвугольніка па гіпатэнузе і вострым вугле;
- пабудаванне прамавугольнага трохвугольніка па гіпатэнузе і катэце;
- пабудаванне прамой, якая праходзіць праз дадзены пункт і датыкаецца дадзенай акружнасці;
- пабудаванне адрэзка, роўнага суме (рознасці) дадзеных адрэзкаў;
- раздзяленне дадзенага адрэзка на n адрэзкаў-доляў;
- раздзяленне дадзенага адрэзка ў дадзенай адносіне $m : n$;
- пабудаванне адрэзка, чацвёртага прапарцыянальнага тром дадзеным адрэзкам;
- пабудаванне адрэзка, сярэдняга прапарцыянальнага двум дадзеным адрэзкам;
- пабудаванне адрэзка, даўжыня якога выражаецца праз даўжыні a і b дадзеных адрэзкаў па формуле $\sqrt{a^2 \pm b^2}$.



1. Якая фігура з'яўляецца геаметрычным месцам пунктаў, роўнаадлеглых ад старон вугла; ад дадзенага пункта; ад двух дадзеных пунктаў?

2. Якая фігура з'яўляецца геаметрычным месцам пунктаў, роўнаадлеглых ад дзвюх дадзеных паралельных прамых; ад дзвюх дадзеных перасякальных прамых?

3. Якая фігура з'яўляецца геаметрычным месцам пунктаў, з якіх дадзены адрэзак бачны пад прамым вуглом; дадзены адрэзак бачны пад дадзеным вуглом, адрозным ад разгорнутага?

4. Якія пабудаванні можна выканаць геаметрычнай лінейкай; цыркулем?

5. Што азначае патрабаванне *рашыць задачу на пабудаванне*?

6. Як пабудаваць адрэзак, роўны дадзенаму; вугал, роўны дадзенаму; трохвугольнік, роўны дадзенаму?

7. Як пабудаваць трохвугольнік па трох яго старанах; трохвугольнік па старане і прылеглых вуглах; трохвугольнік па вугле і прылеглых старанах?

8. Як пабудаваць сярэдзіну адрэзка; бісектрысу вугла?

9. Як пабудаваць прамую, што праходзіць праз дадзены пункт і перпендыкулярная дадзенай прамой; прамую, што праходзіць праз дадзены пункт і паралельная дадзенай прамой?

10. Як пабудаваць прамавугольны трохвугольнік па гіпатэнузе і вострым вугле; па гіпатэнузе і катэце?

11. Як пабудаваць прамую, што праходзіць праз дадзены пункт і датыкаецца да дадзенай акружнасці?

12. Як раздзяліць адрэзак на n адрэзкаў-доляў; адрэзак у адносіне $m : n$?

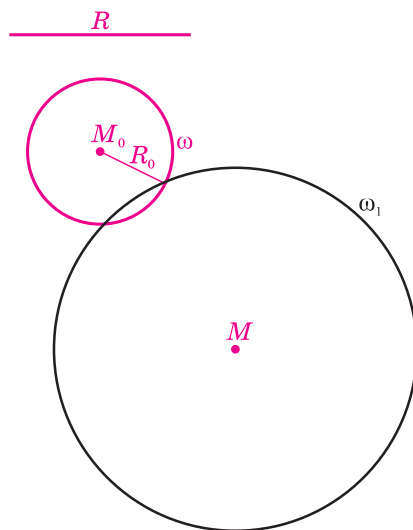
13. Як пабудаваць адрэзак, чацвёрты прапарцыянальны тром дадзеным адрэзкам; сярэдні, прапарцыянальны двум дадзеным адрэзкам; адрэзак, даўжыня якога выражаецца праз даўжыні a і b дадзеных адрэзкаў па формуле $\sqrt{a^2 \pm b^2}$?

Задача 1. Праз дадзены пункт M правядзіце акружнасць дадзенага радыуса R , якая датыкаецца да дадзенай акружнасці ω (M_0, R_0).

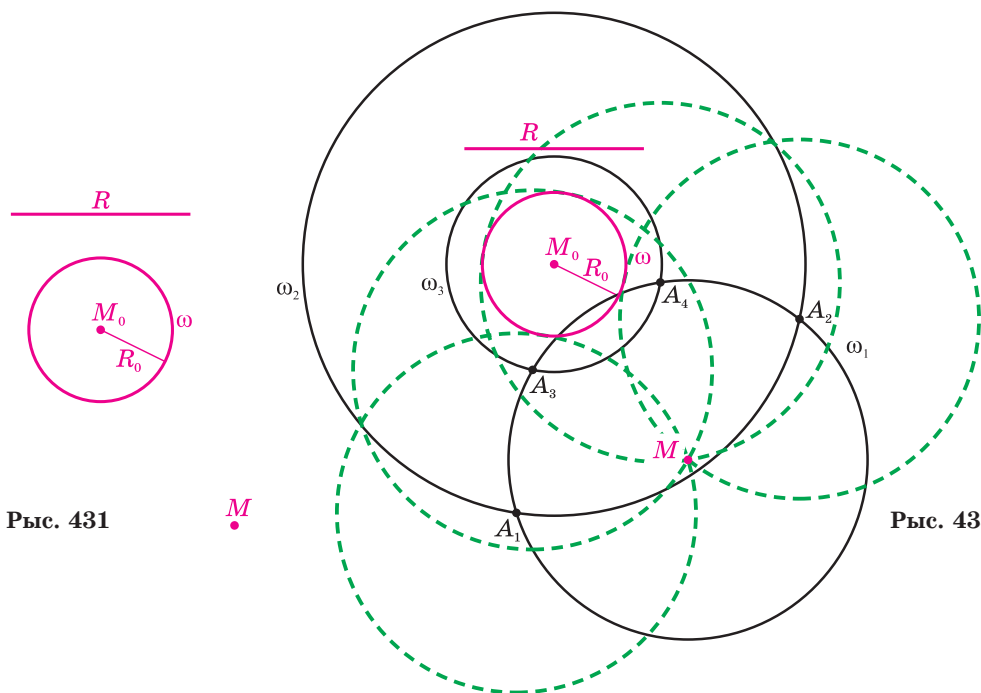
Няхай дадзены адрэзак даўжынёй R , акружнасць ω і пункт M (рыс. 431). Для пабудавання патрэбнай акружнасці трэба ведаць яе цэнтр O .

Паколькі шуканая акружнасць праходзіць праз пункт M , то яе цэнтр адлеглы ад M на R , г. зн. належыць акружнасці $\omega_1(M, R)$ з цэнтрам M і радыусам R (рыс. 432).

Улічым зараз, што умовай датыкання дзвюх акружнасцей з'яўляецца роўнасць адлегласці паміж іх цэнтрамі суме радыусаў гэтых акружнасцей, калі датыканне знешняе, або рознасці іх радыусаў, калі датыканне ўнутранае.



Рыс. 432

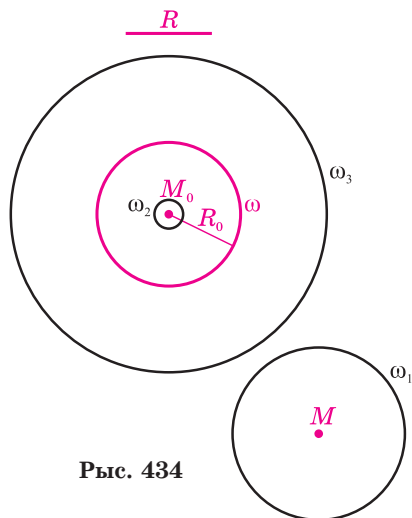


Рыс. 431

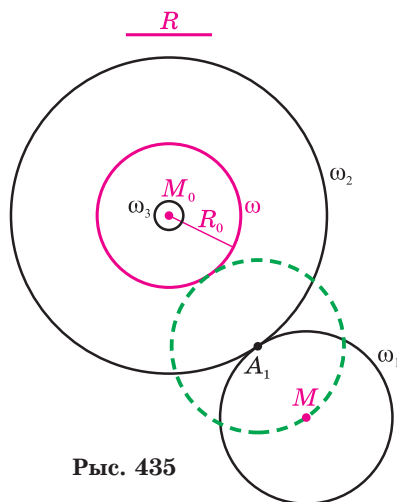
Рыс. 433

Таму пункт O павінен належаць акружнасці, канцэнтрычнай з акружнасцю ω і з радыусам, які на R адрозніваецца ад радыуса акружнасці ω . Гэтую ўмову праўдзяць усе пункты дзвюх акружнасцей $\omega_2(M_0, R_0 + R)$ і $\omega_3(M_0, |R_0 - R|)$ (рыс. 433).

Паколькі патрэбны пункт належыць як акружнасці ω_1 , так і адной з акружнасцей ω_2 або ω_3 , то колькасць рашэнняў залежыць ад таго,



Рыс. 434



Рыс. 435

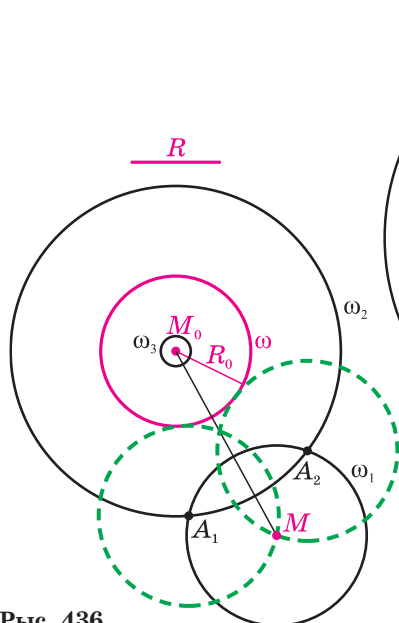
у колькіх пунктах акружнасць ω_1 перасякае акружнасці ω_2 і ω_3 . Пры такіх звестках, як на рыс. 431, шуканых пунктаў аказалася чатыры — пункты A_1, A_2, A_3, A_4 , г. зн. задача мае чатыры рашэнні.

Калі пунктаў перасячэння няма, то задача рашэнняў не мае (рыс. 434).

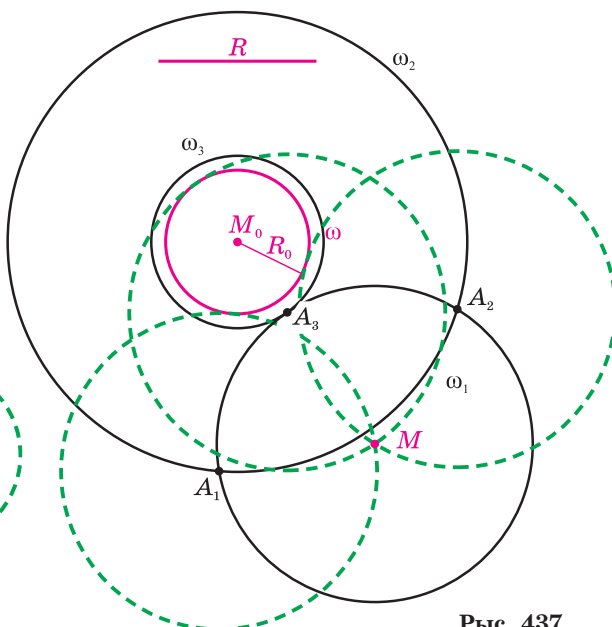
Калі ёсць адзіны агульны пункт, то задача мае адзінае рашэнне (рыс. 435).

Калі агульных пунктаў два, то задача мае два рашэнні (рыс. 436).

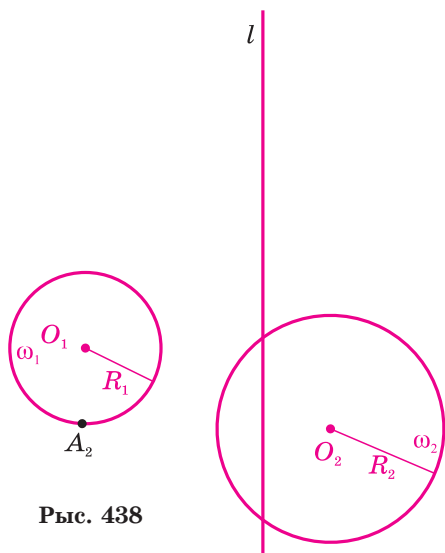
Калі агульных пунктаў тры, то задача мае тры рашэнні (рыс. 437).



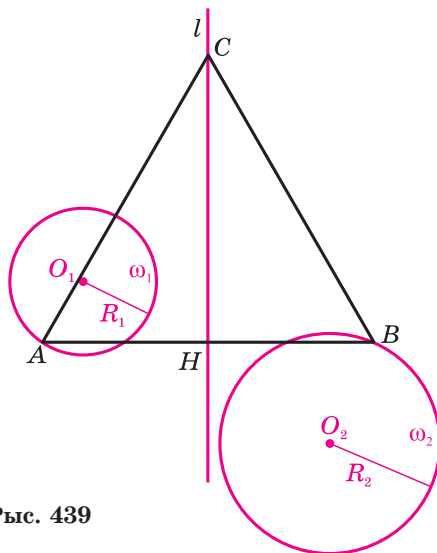
Рыс. 436



Рыс. 437



Рыс. 438



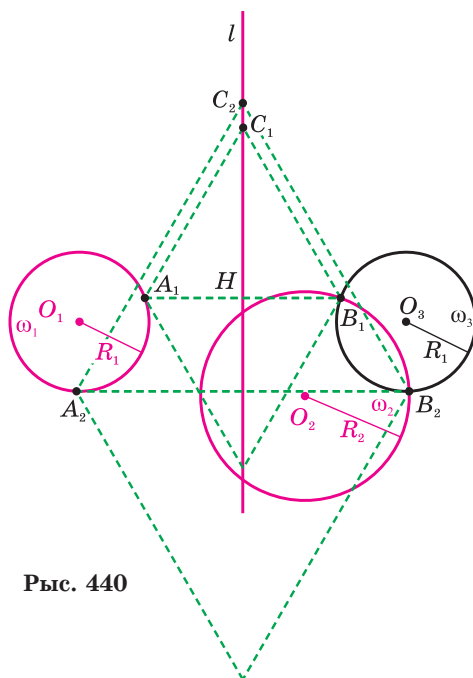
Рыс. 439

Задача 2. Пабудуйце роўнастаронні трохвугольнік, дзве вяршыні якога ляжаць на дадзеных акружнасцях ω_1 і ω_2 , а вышыня — на дадзенай прамой l .

Няхай дадзены акружнасці $\omega_1 (O_1, R_1)$ і $\omega_2 (O_2, R_2)$ і прамая l (рыс. 438).

Дапусцім, што патрэбны роўнастаронні трохвугольнік ABC пабудаваны: вяршыні A і B ляжаць на дадзеных акружнасцях ω_1 і ω_2 , а вышыня CH — на дадзенай прамой l (рыс. 439).

Паколькі вышыня роўнастаронняга трохвугольніка з'яўляецца яго воссю сіметрыі, то пункты A і B сіметрычныя адносна прамой l . Але пункт A належыць і акружнасці ω_1 , а яго вобраз пры сіметрыі адносна прамой l — пункт B — належыць акружнасці ω_2 , гэта азначае, што пункт B ёсць пункт перасячэння акружнасці ω_2 і вобраза акружнасці ω_1 пры сіметрыі адносна прамой l . Гэты факт дазваляе выканаць патрэбнае пабудаванне.



Рыс. 440

1. $\omega_3(O_3, R_1) = S_l(\omega_1(O_1, R_1))$.
2. $\{B_1, B_2\} = \omega_2 \cap \omega_3$ (рыс. 440).
3. $\{A_1, A_2\} = S_l(\{B_1, B_2\})$.
4. $C_1 = R_{A_1}^{60^\circ}(B_1)$.
5. $C_2 = R_{A_2}^{60^\circ}(B_2)$.

Трохвугольнік $A_1B_1C_1$ — шуканы. Сапраўды, вяршыні A_1 і B_1 ляжаць на акружнасцях ω_1 і ω_2 адпаведна. Сам трохвугольнік $A_1B_1C_1$ — роўнастаронні, вышыня C_1H гэтага трохвугольніка ляжыць на прамой l , паколькі па пабудаванні пункты A_1 і B_1 сіметрычныя адносна прамой l .

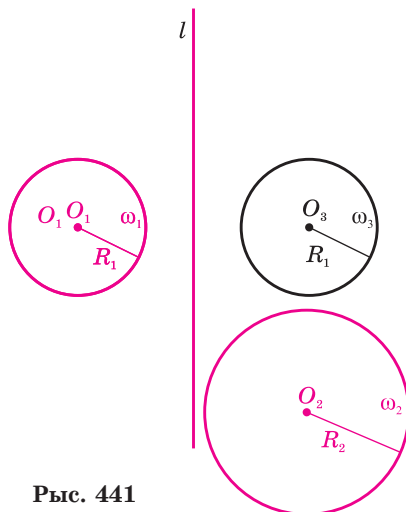
Аналагічна абгрунтоўваецца, што трохвугольнікі $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ таксама з'яўляюцца рашэннямі задачы.

Пры такім размяшчэнні дадзеных па ўмове фігур, як на рыс. 440, г. зн. калі $l \nparallel B_1B_2$, задача мае чатыры рашэнні.

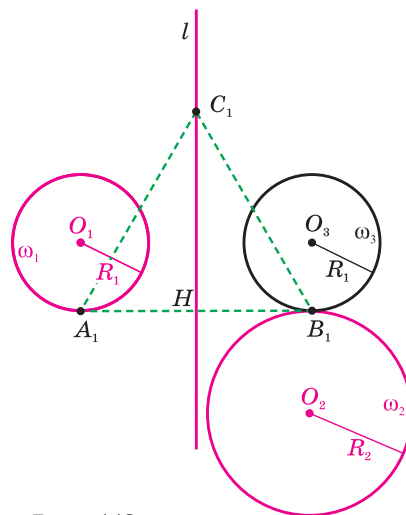
Колькасць рашэнняў залежыць ад колькасці агульных пунктаў акружнасцей ω_3 і ω_2 (крок 2).

Калі агульных пунктаў няма, то патрэбнага трохвугольніка не існуе (рыс. 441).

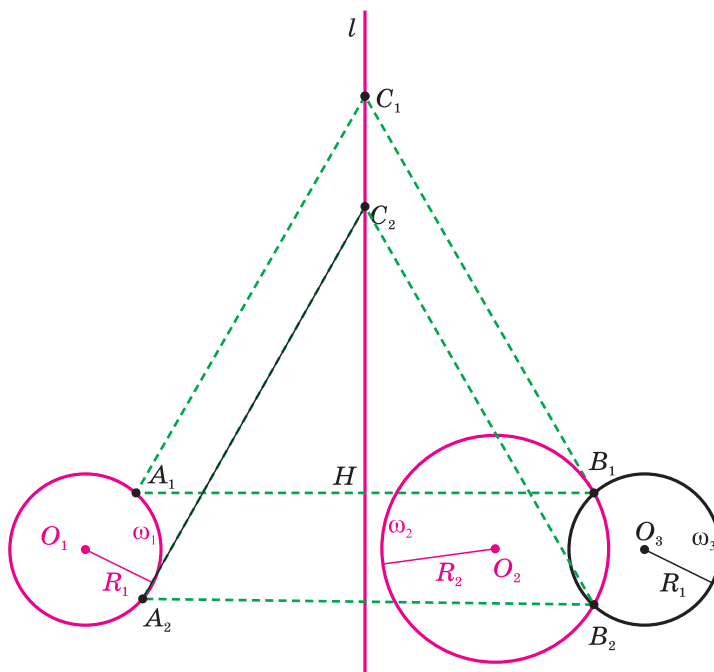
Калі акружнасці ω_3 і ω_2 датыкаюцца, то задача мае адзінае рашэнне (рыс. 442).



Рыс. 441



Рыс. 442



Рыс. 443

Два рашэнні задача мае тады, калі $\omega_2 \cap \omega_3 = \{B_1, B_2\}$ і $B_1B_2 \parallel l$ (рыс. 443).

Задача 3. Пабудуйце акружнасць, якая праходзіла б праз дадзеныя пункты A і B , а датычная да яе, праведзеная з дадзенага пункта C , мела б дадзеную даўжыню a .

Няхай дадзены пункты A, B, C і адрэзак даўжынёй a (рыс. 444), трэба пабудаваць акружнасць, якой належаць пункты A і B , а датычная да яе, праведзеная з пункта C , мае даўжыню a .

Дапусцім, што шуканая акружнасць пабудавана (рыс. 445).

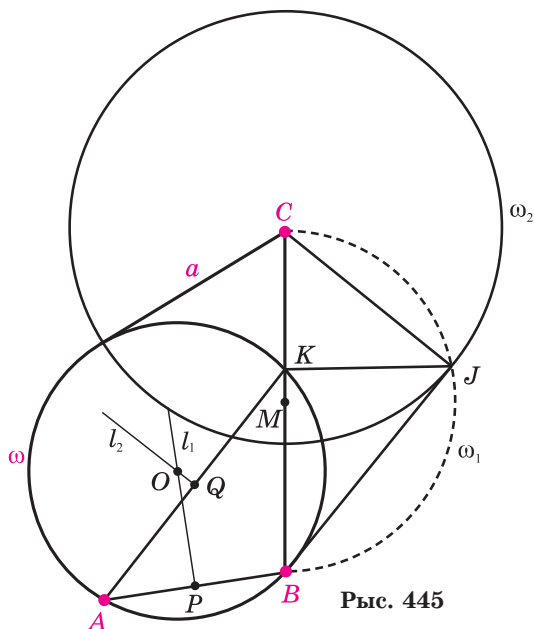
Няхай прмая CB перасякае акружнасць ω у пункце K . Паколькі праз тры пункты, што не ляжаць на адной прамой, праходзіць адзіная акружнасць, то для пабудавання акружнасці ω дастаткова вызначыць становішча пункта K .

Няхай $CK = x$ і $CB = b$. Тады, па ўласцівасці датычнай, $bx = a^2$. Гэтая роўнасць азначае, што адрэзак даўжынёй x можна знайсці як праекцыю катэта даўжынёй a у прамавугольным трохвугольніку на гіпатэнузу даўжынёй b (рыс. 446).

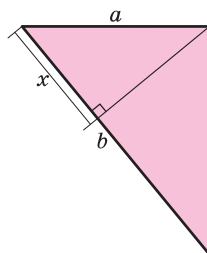
Выканаем наступныя пабудаванні.



Рыс. 444

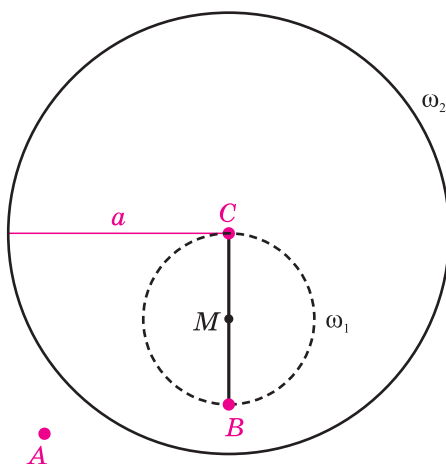


Рыс. 445



Рыс. 446

1. M — сярэдзіна адрэзка CB .
2. $J = \omega_1(M, MB) \cap \omega_2(C, a)$.
3. $JK \perp CB$ і $K \in CB$.
4. P — сярэдзіна адрэзка AB .
5. Q — сярэдзіна адрэзка AK .
6. $l_1 \perp AB$ і $P \in l_1$.
7. $l_2 \perp AK$ і $Q \in l_2$.
8. $O = l_1 \cap l_2$.
9. $\omega = \omega(O, OB)$.



Рыс. 447

Акружнасць ω — шуканая, паколькі яна праходзіць праз пункты A і B , а датычная CT да яе з пункта C мае даўжыню, роўную $\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b}$, г. зн. a .

Колькасць рашэнняў залежыць ад колькасці агульных пунктаў акружнасцей ω_1 і ω_2 (крок 2).

Калі агульных пунктаў няма ($a > b$), то патрэбнай акружнасці не існуе (рыс. 447).

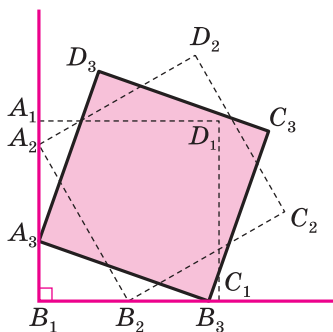
Калі акружнасці ω_1 і ω_2 перасякаюцца або датыкаюцца ($a \leq b$), то задача мае адзінае рашэнне.



697. Дакажыце, што:
- калі $ABCD$ — прамавугольнік, то для любога пункта X плоскасці праўдзіцца роўнасць $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$;
 - калі для чатырох дадзеных пунктаў A, B, C, D плоскасці і яе адвольнага пункта X праўдзіцца ўмова $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, то $ABCD$ — прамавугольнік.
698. Ёсць прамавугольны трохвугольнік KLM , катэты якога MK і ML адпаведна роўныя 1 і 3. Знайдзіце геаметрычнае месца такіх пунктаў Z гэтай плоскасці, што $PK^2 + QL^2 = 2QM^2$.
699. Напішыце ўраўненне лініі, па якой рухаецца пункт M , улічыўшы, што $MC = 2MF$ і:
- $C(0; 0)$ і $F(6; 0)$;
 - $C(-2; 0)$ і $F(1; 0)$;
 - $C(1; -2)$ і $F(-2; 1)$;
 - $C(-5; -2)$ і $F(4; 4)$.
700. Знайдзіце геаметрычнае месца:
- вяршынь C трохвугольнікаў, якія маюць агульную аснову AB , а іх старана AC роўная дадзенаму адрэзку;
 - сярэдзін хордаў дадзенай акружнасці, якія роўныя дадзенаму адрэзку;
 - вяршынь раўнабедраных трохвугольнікаў з агульнай дадзенай асновай;
 - сярэдзін адрэзкаў даўжынёй a , канцы якіх належаць дзвюм узамежна перпендыкулярным прамым;
 - пунктаў, датычныя з якіх да дадзенай акружнасці маюць дадзёную даўжыню.
701. Знайдзіце геаметрычнае месца цэнтраў акружнасцей, якія:
- праходзяць праз два дадзеныя пункты;
 - датыкаюцца да дадзенай прамой у дадзеным яе пункце;
 - датыкаюцца да дадзенай акружнасці з радыусам R ;
 - праходзяць праз дадзены пункт;
 - раздзяляюць папалам дадзеную акружнасць з радыусам R ;
 - маюць агульную хорду даўжыні l з дадзенай акружнасцю з радыусам R ;
 - высякаюць на дадзенай прамой хорды даўжыні a ;
 - высякаюць на дзвюх дадзеных прамых хорды, роўныя дадзенаму адрэзку;
 - маюць радыусы даўжынямі a і датыкаюцца да дадзенай прамой.
702. Дадзена акружнасць з цэнтрам O і дыяметрам AB . На кожным радыусе OC адкладваецца адрэзак OM , роўны праекцыі гэтага радыуса на дыяметр AB . Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў M .
703. Знайдзіце пункт, які належыць:
- дадзенай прамой і роўнаадлеглы ад дзвюх дадзеных прамых;
 - старане трохвугольніка і роўнаадлеглы ад дзвюх іншых яго старон.

- 704.** Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў, якія заканчваюцца на дадзенай прамой і маюць дадзеную сярэдзіну.
- 705.** Знайдзіце геаметрычнае месца вяршынь трохвугольнікаў, якія маюць дадзеную аснову і дадзеную плошчу.
- 706.** Знайдзіце геаметрычнае месца:
- пунктаў, сума адлегласцей якіх да дзвюх дадзеных паралельных прамых роўная дадзенаму адрэзку;
 - пунктаў, рознасць адлегласцей якіх да дзвюх дадзеных паралельных прамых роўная дадзенаму адрэзку;
 - канцоў адрэзкаў, якія выходзяць з дадзенага пункта і дзеляцца дадзенай прамой папалам;
 - сярэдзін адрэзкаў, якія злучаюць дадзены пункт з дадзенай прамой;
 - сярэдзін хордаў, якія высякаюцца дадзенай акружнасцю на прамых, што праходзяць праз дадзены пункт;
 - пунктаў, якія з'яўляюцца асновамі перпендыкуляраў, што праходзяць праз дадзены пункт, да прамых, якія праходзяць праз іншы дадзены пункт;
 - пунктаў, у якіх перасякаюцца прамыя, што праходзяць праз два дадзеныя пункты і перасякаюцца пад дадзеным вуглом;
 - канцоў адрэзкаў, якія пачынаюцца на дадзенай акружнасці, паралельныя і роўныя адрэзку даўжынёй a .

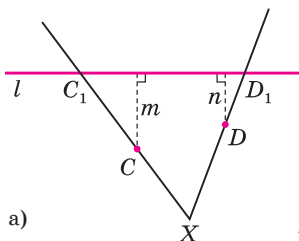
- 707*.** Квадрат з адзінкавай стараной рухаецца ўнутры прамога вугла так, што дзве яго суседнія вяршыні знаходзяцца на старанах вугла (рыс. 448). Вызначце, па якой лініі рухаецца яго цэнтр.



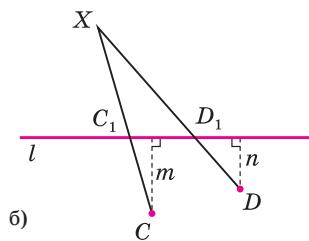
Рыс. 448

- 708.** Ёсць прамая l і пункты C і D па адзін бок ад яе на адлегласцях m і n адпаведна. Пункт X плоскасці выбіраецца так, што прамыя XC і XD перасякаюць прамую l у пунктах C_1 і D_1 адпаведна і $\frac{XC}{XC_1} + \frac{XD}{XD_1} = k$ (рыс. 449; а, б). Знайдзіце геаметрычнае месца такіх пунктаў X , улічыўшы, што:

- а) $m = 3, n = 1, k = 2$; б) $m = 5, n = 1, k = \frac{3}{2}$; в) $m = 5, n = 1, k = 3$.



а)



б)

Рыс. 449

709. Ёсць два пункты P і Q . Знайдзіце геаметрычнае месца такіх пунктаў Y , што медыяна:
- а) QQ_1 трохвугольніка YPQ роўная старане PY ;
 - б) PP_1 трохвугольніка YPQ роўная вышыні да стараны PQ .
710. Ёсць два пункты A і B , адлегласць паміж якімі роўная 2. Знайдзіце геаметрычнае месца такіх пунктаў X , што:
- а) $AX^2 - BX^2 = 1$; б) $AX^2 + BX^2 = 10$.
711. Ёсць прамы вугал A і прамая l , праведзеная праз вяршыню A . Пункты U і V знаходзяцца на розных старанах вугла A і адлеглыя ад яго вяршыні на адзінку. Пункты U_1 і V_1 ёсць вобразы пунктаў U і V пры сіметрыі адносна прамой l . Прамая, праведзеная праз пункт U_1 паралельна прамой AV , перасякае прамую, праведзеную праз пункт V_1 паралельна прамой AU , у пункце Y . Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў Y .
712. Ёсць пункт M на адной з дзвюх прамых a і b , якія перасякаюцца пад вуглом 45° . Пункт X выбіраецца так, што пункт M належыць прамой X_1X_2 , дзе X_1 і X_2 — вобразы пункта X пры сіметрыі адносна прамых a і b . Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў X .
713. Ёсць два пункты I і J . На прамой IJ выбіраецца пункт X і будуюцца квадраты са старанамі IX і JX па адзін бок ад прамой IJ . Знайдзіце геаметрычнае месца сярэдзін адрэзкаў, што злучаюць пункты перасячэння дыяганалей пабудаваных квадратаў.
714. Ёсць квадрат $PQRS$. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў Z плоскасці, для якіх $ZP + ZR = ZQ + ZS$.
715. Знайдзіце геаметрычнае месца цэнтраў паралелаграмаў, стораны якіх паралельныя дыяганалям дадзенага чатырохвугольніка, а вяршыні ляжаць на яго старанах.
716. Знайдзіце суму квадратаў адлегласцей ад адвольнага пункта адзінкавай акружнасці да вяршынь квадрата, апісанага каля гэтай акружнасці.
717. Праз артацэнтр H роўнастаронняга трохвугольніка ABC праведзена прамая m , і на яе з вяршынь A , B , C апущаны перпендыкуляры AA_1 , BB_1 , CC_1 . Знайдзіце HC_1 , улічыўшы, што $HA_1 = 6$ і $HB_1 = 1$.
718. Прамая, якая праходзіць праз сярэдзінку дыяганалі MO чатырохвугольніка $MNOP$ паралельна прамой NP , перасякае прамую NO у пункце A , а прамая, якая праходзіць праз сярэдзінку дыяганалі NP паралельна прамой MO , перасякае прамую MP у пункце B . Дакажыце, што прамая AB паралельная прамой OP .
719. Раздзяліце прамы вугал на тры долі.

- 720.** Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па яго:
- а) вышыні, праведзенай да асновы, і вугле пры вяршыні;
 - б) аснове і вышыні, праведзенай да бакавой стараны.
- 721.** Пабудуйце трохвугольнік па яго:
- а) дзвюх старанах і вышыні, праведзенай да адной з іх;
 - б) дзвюх старанах і вышыні, праведзенай да трэцяй стараны;
 - в) старане, вышыні і бісектрысе, праведзеных з вяршынь гэтай стараны;
 - г) старане, прылеглым да яе вугле і рознасці дзвюх іншых старон;
 - д) старане, прылеглым да яе вугле і суме дзвюх іншых старон;
 - е) старане, медыяне і вышыні, праведзеных да іншай стараны;
 - ж) дзвюх медыянах і вугле паміж імі;
 - з) трох медыянах;
 - і) дзвюх медыянах і вышыні, праведзеных да розных старон;
 - к) старане і дзвюх медыянах, праведзеных да іншых старон;
 - л) старане, праведзенай да яе вышыні і супрацьлеглым вугле;
 - м) старане, супрацьлеглым вугле і суме (рознасці) дзвюх іншых старон.
- 722.** Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік па яго:
- а) гіпатэнузе і суме катэтаў;
 - б) гіпатэнузе і рознасці катэтаў;
 - в) вострым вугле і суме катэтаў;
 - г) вострым вугле і рознасці катэтаў;
 - д) катэце і рознасці гіпатэнузы і другога катэта;
 - е) вострым вугле і суме прылеглага катэта і гіпатэнузы;
 - ж) вострым вугле і перыметры.
- 723.** Пабудуйце трохвугольнік па яго:
- а) вострым вугле, прылеглай да яго старане і суме дзвюх іншых старон;
 - б) вугле, прылеглай да яго старане і рознасці дзвюх іншых старон;
 - в) двух вуглах і суме супрацьлеглых старон;
 - г) двух вуглах і рознасці супрацьлеглых старон;
 - д) двух вуглах і перыметры;
 - е) вышыні, медыяне і бісектрысе, праведзеных з адной вяршыні.
- 724.** Пабудуйце акружнасць дадзенага радыуса, якая:
- а) праходзіць праз два дадзеныя пункты;
 - б) праходзіць праз дадзены пункт і датыкаецца да дадзенай акружнасці;
 - в) праходзіць праз дадзены пункт і адсякае на дадзеных перасякальных прамых роўныя адрэзкі;
 - г) датыкаецца да дадзенай акружнасці і адсякае на дадзеных перасякальных прамых роўныя адрэзкі;
 - д) датыкаецца да дзвюх дадзеных акружнасцей.

725. Пабудуйце акружнасць, якая:

- а) датыкаецца да трох дадзеных роўных акружнасцей;
- б) датыкаецца да трох дадзеных прамых;
- в) датыкаецца да дзвюх дадзеных прамых і праходзіць праз дадзены пункт;
- г) датыкаецца да дзвюх дадзеных паралельных прамых і дадзенай акружнасці;
- д) датыкаецца да дзвюх дадзеных паралельных прамых і трэцяй прамой, што перасякае першыя дзве;
- е) апісана каля дадзенай раўнабедранай трапецыі.

726. Ёсць акружнасць. Пабудуйце:

- а) хорду, якая мае дадзеную даўжыню і праходзіць праз дадзены пункт;
- б) сечную, якая праходзіць праз дадзены пункт па-за кругам і з яе высякаецца хорда дадзенай даўжыні;
- в) такі пункт дадзенай прамой, што адлегласці ад яго да пунктаў дотыку праведзеных з яго датычных роўныя дадзенаму адрэзку.

727. Пабудуйце прамую, якая праходзіць праз дадзены:

- а) унутраны пункт вугла і адсякае на яго старанах роўныя адрэзкі;
- б) пункт, а дзве дадзеныя паралельныя прамыя высякаюць з яе адрэзак, роўны дадзенаму адрэзку;
- в) пункт і ад яе роўнаадлеглыя два дадзеныя пункты.

728. Пабудуйце прамую, якая:

- а) утварае з адной стараной дадзенага вугла вугал дадзенай велічыні, а сам вугал высякае з прамой адрэзак дадзенай даўжыні;
- б) паралельная аснове дадзенага трохвугольніка, а яе адрэзак унутры трохвугольніка роўны суме адрэзкаў бакавых старон, заключаных паміж прамой і асновай;
- в) паралельная старане AC дадзенага трохвугольніка ABC і перасякае стораны AB і BC у такіх пунктах X і Y адпаведна, што $AX = BY$;
- г) праходзіць праз дадзены пункт, а адлегласць паміж перпендыкулярамі, апушчанымі на гэтую прамую з двух дадзеных пунктаў, роўная даўжыні дадзенага адрэзка;
- д) праходзіць праз пункт перасячэння дзвюх дадзеных акружнасцей, прычым яны высякаюць на прамой роўныя хорды.

729. Пабудуйце трохвугольнік па:

- а) яго дзвюх старанах і вышыні, праведзенай да адной з іх;
- б) яго старане і праведзеных да яе медыяне і вышыні;
- в) яго старане, прылеглым вугле і вышыні, праведзенай да яе;
- г) яго старане, супрацьлеглым вугле і вышыні, праведзенай да іншай стараны;

- д) яго двух вуглах і вышыні, праведзенай да адной з супрацьлеглых старон;
- е) яго вугле і праведзеных з іншай вяршыні вышыні і бісектрысе;
- ж) яго старане, праведзенай да яе медыяне і вугле паміж гэтай медыянай і вышынёй, што выходзіць з той самай вяршыні;
- з) суме і рознасці дзвюх яго старон і вышыні, праведзенай да трэцяй стараны;
- і) яго вугле і дзвюх вышынях да старон гэтага вугла;
- к) яго вугле, вышыні, праведзенай з іншай вяршыні, і перыметры;
- л) дзвюх яго старанах і рознасці супрацьлеглых ім вуглоў.

730. Пабудуйце акружнасць дадзенага радыуса, якая:

- а) праходзіць праз дадзены пункт і датыкаецца да дадзенай прамой;
- б) датыкаецца да дадзенай акружнасці і дадзенай прамой;
- в) праходзіць праз дадзены пункт і высякае з дадзенай прамой хорду дадзенай даўжыні;
- г) датыкаецца да дадзенай акружнасці і высякае з дадзенай прамой хорду дадзенай даўжыні;
- д) датыкаецца да дзвюх дадзеных перасякальных прамых;
- е) датыкаецца да адной з дадзеных перасякальных прамых і высякае на другой хорду дадзенай даўжыні;
- ж) высякае з дадзеных перасякальных прамых хорды дадзенай даўжыні.

731. Пабудуйце пункт, які:

- а) знаходзіцца на дадзенай адлегласці ад дадзенай прамой і роўнаадлеглы ад двух дадзеных пунктаў;
- б) знаходзіцца на дадзенай адлегласці ад дадзенай прамой і роўнаадлеглы ад дзвюх перасякальных прамых;
- в) знаходзіцца ў плоскасці дадзенага трохвугольніка, адлеглы ад адной прамой на дадзены адрэзак далей, чым ад другой, і на дадзены адрэзак бліжэй, чым да трэцяй;
- г) знаходзіцца на дадзенай прамой і роўнаадлеглы ад дадзенага пункта гэтай прамой і ад іншай дадзенай прамой;
- д) знаходзіцца на дадзенай прамой і рознасць адлегласцей яго да дзвюх дадзеных перасякальных прамых роўная дадзенаму адрэзку;
- е) знаходзіцца на дадзенай прамой і рознасць адлегласцей ад яго да двух дадзеных пунктаў найбольшая.

732. Пабудуйце пункт, з якога:

- а) адзін з дадзеных адрэзкаў бачны пад адным дадзеным вуглом, а другі — пад другім;
- б) стораны дадзенага трохвугольніка бачныя пад роўнымі вугламі.

733. Пабудуйце датычную да дадзенай акружнасці, якая ўтварае дадзены вугал з дадзенай прамой.

- 734.** Прамая, праведзеная праз вяршыню M прамавугольніка $MNKP$, перасякае дыяганаль NP і прамыя KP і NK у пунктах A , B і C адпаведна. Знайдзіце адрэзак MA , улічыўшы, што адрэзкі MC і MB адпаведна роўныя p і q .
- 735.** Пабудуйце паралелаграм па яго:
- а) дзвюх сумежных старанах і дыяганалі;
 - б) старане і дзвюх дыяганалях;
 - в) дыяганалях і вугле паміж імі;
 - г) старане, вышыні, праведзенай да гэтай стараны, і дыяганалі;
 - д) старанах і адным з вуглоў;
 - е) старанах і вышыні;
 - ж) дыяганалях і вышыні;
 - з) старане, суме дыяганаляў і вугле паміж імі;
 - і) старане, рознасці дыяганаляў і вугле паміж імі;
 - к) старане, вугле і суме дыяганалі з іншай стараной;
 - л) старане, рознасці дыяганалі з іншай стараной і адным з вуглоў;
 - м) перыметры, дыяганалі і вугле паміж гэтай дыяганаллю і стараной;
 - н) адным з яго вуглоў і дзвюх вышынях;
 - о) старанах і вугле паміж дыяганалямі;
 - п) вугле і дзвюх дыяганалях.
- 736.** Пабудуйце прамавугольнік па яго:
- а) дыяганалі і вугле паміж дыяганалямі;
 - б) старане і суме дыяганаляў;
 - в) дыяганалі і суме сумежных старон;
 - г) дыяганалі і рознасці сумежных старон;
 - д) старане і вугле паміж дыяганалямі;
 - е) старане і суме дыяганалі з іншай стараной;
 - ж) старане і рознасці дыяганалі з іншай стараной.
- 737.** Пабудуйце ромб па:
- а) яго старане і адным з вуглоў;
 - б) яго дыяганалі і адным з вуглоў;
 - в) яго старане і дыяганалі;
 - г) яго дыяганалях;
 - д) яго дыяганалі і вышыні;
 - е) яго вугле і дыяганалі, што выходзіць з вяршыні гэтага вугла;
 - ж) яго вугле і вышыні;
 - з) суме яго дыяганаляў і вугле паміж дыяганаллю і стараной;
 - і) адным з яго вуглоў і суме дыяганалі са стараной;
 - к) адным з яго вуглоў і рознасці дыяганалі са стараной;
 - л) яго старане і суме дыяганаляў;
 - м) яго старане і рознасці дыяганаляў;
 - н) суме яго дыяганаляў і вугле паміж дыяганаллю і стараной;
 - о) яго старане і радыусе ўмежанай акружнасці.

- 738.** Пабудуйце квадрат па яго дыяганалі.
- 739.** Праз вяршыню паралелаграма правядзіце прамую так, каб адлегласць да яе ад супрацьлеглай вяршыні была роўная суме або рознасці адлегласцей да гэтай прамой ад дзвюх іншых вяршынь паралелаграма, улічыўшы, што прамая праз унутраны пункт паралелаграма:
а) праходзіць; б) не праходзіць.
- 740.** Пабудуйце трапецыю па яе:
а) аснове, прылеглым вугле і дзвюх бакавых старанах;
б) рознасці яе асноў, дзвюх бакавых старанах і адной дыяганалі;
в) чатырох старанах;
г) асновах, дзвюх дыяганалях і вышыні;
д) дзвюх асновах і дзвюх дыяганалях;
е) трох старанах і дыяганалі;
ж) трох старанах і вышыні;
з) старане, вышыні і дыяганалі;
і) аснове, прылеглых вуглах і вышыні;
к) аснове, дыяганалях і вугле паміж імі;
л) бакавой старане, дыяганалі і вугле паміж дыяганалямі;
м) асновах і дзвюх дыяганалях;
н) дыяганалях, сярэдняй лініі і вугле;
о) дыяганалях, вугле паміж імі і суме (рознасці) дзвюх суседніх старон.
- 741.** Пабудуйце чатырохвугольнік па яго:
а) трох старанах і дзвюх дыяганалях;
б) чатырох старанах і вугле;
в) трох старанах, дыяганалі і вугле;
г) дзвюх сумежных старанах, дыяганалях і вугле паміж імі;
д) дзвюх супрацьлеглых старанах, вугле і дыяганалях;
е) трох старанах і двух суседніх вуглах;
ж) дзвюх сумежных старанах, двух суседніх вуглах і вугле паміж дыяганалямі;
з) дзвюх супрацьлеглых старанах і трох вуглах;
і) трох старанах і вуглах, прылеглых да чацвёртай стараны;
к) дзвюх супрацьлеглых старанах і вугле паміж імі;
л) старанах і вугле паміж дзвюма супрацьлеглымі старанамі;
м) дыяганалях, вугле паміж імі і двух супрацьлеглых вуглах;
н) старанах і адрэзку, што злучае сярэдзіны дыяганаляў.
- 742.** Умежце ў:
а) дадзены прамавугольны трохвугольнік такі квадрат, які меў бы з трохвугольнікам агульны вугал;
б) дадзены трохвугольнік такі ромб, які меў бы з трохвугольнікам агульны вугал;

- в) дадзены трохвугольнік такі квадрат, адна старана якога ляжала бы на старане трохвугольніка;
- г) дадзеную акружнасць трохвугольнік з двума дадзенымі вугламі.

743. Пабудуйце пяцівугольнік па сярэдзінах яго старон.

744. Пабудуйце вугал, які:

- а) роўны дадзенаму вуглу, умежаны ў адну з дадзеных акружнасцей і апісаны каля другой;
- б) умежаны ў дадзеную акружнасць, абাপіраецца на дадзеную дугу і высякае на дадзенай прамой адрэзак дадзенай даўжыні.

745. Пабудуйце адрэзак, які:

- а) роўны і паралельны дадзенаму адрэзку і канцы якога належаць розным перасякальным прамым;
- б) роўны і паралельны дадзенаму адрэзку і канцы якога належаць дадзеным акружнасцям;
- в) дзеліцца папалам дадзеным пунктам і канцы якога належаць дадзеным акружнасцям;
- г) з'яўляецца найкарацейшым з адрэзкаў, што праходзяць праз дадзены пункт і маюць канцамі пункты на дзвюх дадзеных прамых.

746. Пабудуйце трохвугольнік па яго:

- а) дзвюх старанах і радыусе апісанай акружнасці;
- б) старане, праведзенай да яе вышыні і радыусе апісанай акружнасці;
- в) старане, прылеглым да яе вугле і радыусе апісанай акружнасці;
- г) двух вуглах і радыусе апісанай акружнасці;
- д) старане, праведзенай да яе медыяне і радыусе апісанай акружнасці;
- е) вышыні, вугле і радыусе апісанай акружнасці;
- ж) старане, вышыні, праведзенай да іншай стараны, і радыусе апісанай акружнасці;
- з) вышыні і бісектрысе, праведзеных з адной вяршыні, і радыусе апісанай акружнасці;
- і) двух вуглах і радыусе ўмежанай акружнасці;
- к) старане, прылеглым да яе вугле і радыусе ўмежанай акружнасці;
- л) старане, вышыні, праведзенай да іншай стараны, і радыусе ўмежанай акружнасці;
- м) вышыні, вугле, з якога яна праведзена, і радыусе ўмежанай акружнасці;
- н) старане, супрацьлеглым вугле і радыусе ўмежанай акружнасці;
- о) вугле і радыусах апісанай і ўмежанай акружнасцей;
- п) двух вуглах і радыусе пазаўмежанай акружнасці, размешчанай насупраць трэцяга вугла;
- р) вугле, радыусе пазаўмежанай акружнасці, размешчанай насупраць гэтага вугла, і вышыні, праведзенай з іншага вугла;

с) вугле, радыгусе апісанай акружнасці і суме (рознасці) дзвюх старон, з якіх адна размешчана супраць дадзенага вугла;
т) радыгусе ўмежанай акружнасці, вугле і адрэзку, які роўны суме стараны супраць гэтага вугла і яшчэ адной стараны, паменшанай на трэцюю старану.

747. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік па яго:

- а) катэце і радыгусе ўмежанай акружнасці;
- б) гіпатэнузе і радыгусе ўмежанай акружнасці;
- в) вострым вугле і радыгусе апісанай акружнасці;
- г) радыгусах апісанай і ўмежанай акружнасцей.

748. Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па яго:

- а) бакавой старане і радыгусе апісанай акружнасці;
- б) аснове і радыгусе апісанай акружнасці;
- в) вугле, прылеглым да асновы, і радыгусе апісанай акружнасці;
- г) вышыні, праведзенай да асновы, і радыгусе апісанай акружнасці;
- д) вышыні, праведзенай да асновы, і радыгусе ўмежанай акружнасці;
- е) аснове і радыгусе ўмежанай акружнасці;
- ж) вугле пры вяршыні і радыгусе ўмежанай акружнасці.

749. Пабудуйце чатырохвугольнік па яго:

- а) трох старанах і радыгусе апісанай акружнасці;
- б) дзвюх супрацьлеглых старанах, вугле і радыгусе апісанай акружнасці;
- в) дзвюх сумежных старанах, вугле, прылеглым да адной з іх, і радыгусе апісанай акружнасці;
- г) двух суседніх вуглах, старане, прылеглай да аднаго з іх, і радыгусе апісанай акружнасці;
- д) дзвюх супрацьлеглых старанах, дыяганалі і радыгусе апісанай акружнасці;
- е) дзвюх дыяганалях, старане і радыгусе апісанай акружнасці;
- ж) дзвюх сумежных старанах, вугле, прылеглым да адной з іх, і радыгусе ўмежанай акружнасці;
- з) двух супрацьлеглых вуглах, старане і радыгусе ўмежанай акружнасці;
- і) трох вуглах і радыгусе ўмежанай акружнасці.



Адказы

$$\frac{8\sqrt{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg} \alpha + 4 \operatorname{ctg} \alpha)^3}$$

Раздзел 1

9. $\sqrt{386}$ см. 10. б) 21 см. 11. 12 см. 12. $25\frac{2}{3}$ см. 13. 26 см. 14. 15 см. 15. 2 см.
16. 45° і 135° . 18. $128\sqrt{21}$ см². 19. а) $16\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{19}$ см². 20. $80\sqrt{2}$ см². 21. 556 см².
22. 4 см. 23. а) $3al + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $4al + 2a^2$; в) $3a^2\sqrt{3} + 6al$. 24. 960 см². 25. 3 см.
26. 18 144 см². 27. 1,5 см. 28. а) 4464 см², 9828 см³; б) $32\sqrt{3} + 24\sqrt{11} + 8\sqrt{33}$ см², $48\sqrt{11}$ см³; в) $72(1 + 2\sqrt{2})$ см², $216\sqrt{2}$ см³; г) $2a^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$, $a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$;
- д) $\frac{l^2}{2}(1 + 2\sqrt{2})$, $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. 29. 90 см², $35\sqrt{3}$ см³. 30. $3\sqrt{30}$ м, $6\sqrt{5}$ м, $72\sqrt{15}$ м², $13,5\sqrt{165}$ м³. 31. а) 400 см², $500\sqrt{3}$ см³; б) $300\sqrt{3}$ см², $500\sqrt{2}$ см³.
32. $2d^2 \cdot \sin \varphi \cdot \left(\sin \varphi + \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi} \right)$. 33. $\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2(1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \beta)}$. 34. а) 15 840; б) 8100 см; в) $74 800\sqrt{3}$; г) $3,2\sqrt{5}$. 35. $\approx 3,7$ кг. 36. $12\sqrt{6}$ см². 37. 2310 см³.
38. 300 см³. 39. $240\sqrt{2}$ см³. 40. а) $729\sqrt{2}$ см³; б) $\frac{h^3 \sin \alpha}{\sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$. 41. $432\sqrt{3}$ см³.
42. а) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ м³; б) $1728\sqrt{2}$ см³. 43. а) $18,75\sqrt{3}$ см³; б) $96\sqrt{2}$. 46. $\frac{a^3}{4}$.
47. $\left(\frac{l^3 \sin \beta \cdot \cos^2 \beta}{4} \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. 48. $\frac{Q^2 \sin 2\beta}{2a}$. 49. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. 50. 72 см³. 51. $192\sqrt{3}$ см³.
52. а) 45 см², $\frac{15\sqrt{15}}{4}$ см³; б) $2a^2\sqrt{3}$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. 53. $16\sqrt{3}$ см³. 54. $\frac{l^3 \operatorname{tg} \varphi}{4}$.
55. а) $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$; б) $18\sqrt{39}$ см³. 56. $\frac{ab}{8}\sqrt{3(4a^2 - b^2)}$. 58. 1080 см³. 59. $\frac{S_{\text{перп}} \cdot S_{\text{бак}}}{P}$.
60. $1296\sqrt{11}$ см³. 61. 105 см³. 62. $16\sqrt{11}$ см³. 63. 1 м, 2 м, $\sqrt{5}$ м, 3 м. 66. 6,12 дм³.
67. 37 дм², 6,5 дм³. 68. 1050 см³. 69. $2\sqrt{3} + \sqrt{39}$ см², 2,25 см³. 70. $\sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2 \cdot S_0}{2}}$ см³.
74. $\sqrt{3}$; 2. 75. а) 5 м; б) 29 см; в) 125. 76. а) 12 см; б) $6\sqrt{3}$ см; в) $144\sqrt{3}$ см². 77. а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$, $4\pi a^2$. 78. а) $20\sqrt{2}$ см; б) 200π см²; в) 800π см²; г) 1200π см². 80. $2\sqrt{10\pi}$ м.
81. 256 см². 82. 8 см. 83. rh. 84. а) 5 дм; б) 6 см. 85. $\cos \varphi$. 86. $\sqrt{S^2 - 4h^2 a^2}$. 87. $S\sqrt{2}$.
88. $\frac{S}{\pi}$. 89. 6 см, 18 см. 90. $\approx 3,3$ м². 91. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. 92. 300π дм². 93. 20 см або 100 см. 94. $\frac{1}{2}d^2 \sin \varphi$, $\frac{d^2}{4\pi}(2\pi \sin \varphi + \cos \varphi + 1)$. 96. $\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)}}$. 97. $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

98. $\frac{p}{2}, \frac{p}{4}$. 99. $\frac{2\pi a^2}{3}(1+\sqrt{2})$. 100. h^2 . 104. $128\pi(2-\sqrt{3})\text{ см}^2$. 106. 45° . 107. $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$.

113. а) $108\pi\text{ см}^3$; б) $\frac{10\sqrt{3}\pi}{3\pi}\text{ см}$; в) 3 см . 115. $\approx 208\text{ м}$. 116. $\approx 1513\text{ т}$. 117. $\pi^2\text{ м}^2, \frac{\pi^2}{4}\text{ м}^3$.

118. $\frac{S}{2}\sqrt{\pi Q}$. 119. $\approx 106,8\text{ кг}$. 122. $\frac{\pi a^2 h}{4 \cos^2 \alpha}$. 123. $\frac{\pi m^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{8}$. 124. $4:1$.

125. $\frac{3\pi a^3}{4}$. 126. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; д) $\frac{n \sin \frac{360^\circ}{n}}{2\pi}$.

127. $\frac{\pi m^3}{8} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Раздел 2

134. а) $4\sqrt{6}\text{ см}$; б) 45° . 135. а) $b^2 \sin \alpha \cos \alpha$; б) $\frac{a^2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{4}$. 136. а) 60° ; б) $a^2 \sqrt{3}$, $\frac{a^2 \sqrt{39}}{4}$. 138. 37 см , $25\sqrt{2}\text{ см}$. 139. 10 см , 12 см . 140. 26 см . 141. $64\sqrt{3}\text{ см}^2$.

142. 12 см . 144. $72(\sqrt{7}+1)\text{ см}^2$. 145. 189 см^2 . 146. а) $\frac{65}{8} \operatorname{tg} \alpha$; б) $4 \operatorname{tg} \beta$. 147. 790 см^2 .

148. 6912 см^2 . 149. а) $4\sqrt{3}\text{ см}$; б) $48(\sqrt{2}+1)\text{ см}^2$. 150. $72(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})\text{ см}^2$.

151. $192\sqrt{2}\text{ см}^2$. 152. а) $\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}$; б) $\arccos \frac{6H^2 - a^2}{6H^2 + 2a^2}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{H\sqrt{3}}{a}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{2H\sqrt{3}}{a}$; д) $\arccos \frac{6H^2 - a^2}{12H^2 + a^2}$. 153. а) $\frac{l\sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2-2\cos \alpha}}$; б) $\frac{l}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; г) $2\arcsin \left(\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)$. 154. $3a^2$. 158. 20 см^2 . 159. 12 см , $\sqrt{\frac{407}{3}}\text{ см}$.

160. 24 см , 56 см . 161. $\sqrt{7}\text{ дм}$. 162. 16 см^2 . 163. 24 м^2 , 30° .

164. $\frac{|a^2 - b^2|}{2} \operatorname{tg} \alpha$. 165. а) 6 дм^3 ; б) $4,95\text{ м}^3$. 166. $64(\sqrt{26}+1)\text{ см}^2$, $426\frac{2}{3}\text{ см}^3$.

167. $63\sqrt{3}\text{ см}^2$, $36\sqrt{3}\text{ см}^3$. 168. 50 см^3 . 169. $\frac{h^3}{3} \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}(1 + \cos \alpha)$, $\frac{h^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$. 170. а) $180\sqrt{3}\text{ см}^3$; б) $\frac{b^3 \sqrt{3}}{4}$;

в) $\frac{b^3}{3} \cos^2 \alpha \sqrt{1 - 2 \cos 2\alpha}$; г) $\frac{l^3 \sqrt{3}}{4} \sin \varphi \cos^2 \varphi$; д) $\frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}$;

е) $\frac{l^3}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{1 + 2 \cos \beta}$; ж) $\frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}$. **171.** $52\sqrt{419} \text{ см}^3$. **172.** $2520\sqrt{3} \text{ см}^3$,

$36\sqrt{1333} \text{ см}^2$. **173.** а) $\frac{3380\sqrt{3}}{9} \text{ см}^3$; б) $\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{12} \operatorname{tg} \varphi$; в) 360 см^3 . **174.** а) 48 см^3 ;

б) $\frac{c^3}{24} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \alpha$; в) $\frac{1}{6} abc$. **175.** $1400\sqrt{3} \text{ см}^3$. **176.** $27\sqrt{11} \text{ см}^3$. **177.** 576 см^3 .

179. 1260 дм^3 . **180.** $\approx 127 \text{ г}$. **181.** а) $\frac{4}{3} h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{6 \sin \alpha}$; в) $\frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-2 \cos \alpha}}$;

г) $\frac{4r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}}{3 \cos \alpha}$; д) $\frac{2H^3}{3} \operatorname{ctg}^2 \beta$; е) $\frac{m^3}{6} \sqrt{\frac{2 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$; ж) $\frac{l^3}{3} \cos \varphi \sin 2\varphi$.

182. $\operatorname{arctg} \frac{12V}{b^3 \sin \alpha}$. **183.** $29 : 356$. **184.** $123 : 472$. **185.** $1 : 9$. **186.** $17 : 105$. **187.** 9 см ,

11 см , $\frac{868}{3} \text{ см}^3$. **188.** $156\sqrt{2} \text{ см}^3$. **189.** а) $\frac{1}{12} |m^3 - n^3| \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$; б) $\frac{7a^3 \sqrt{47}}{192}$. **191.** 51 см .

192. а) $108\pi \text{ см}^2$; б) $72\pi \text{ см}^2$; в) $36\pi \text{ см}^2$. **194.** а) $144\pi \text{ см}^2$; б) $2\pi m^2 \sin \varphi$;

в) $\pi a^2 (3 + 2\sqrt{3})$. **195.** а) $0,9\pi \text{ м}^2$; б) $25\pi (1 + \sqrt{2}) \text{ см}^2$; в) $\frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \alpha} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right)$.

196. $16\pi\sqrt{2} \text{ см}^2$. **197.** а) $\approx 255^\circ$; б) $\approx 312^\circ$; в) $\frac{360^\circ \cdot r}{l}$. **198.** $4\pi \text{ м}^2$, $4\sqrt{2} \text{ м}$. **199.** 30° .

200. $\arccos 0,6$. **201.** $\frac{1}{\pi} \sqrt{S_0^2 - S_1^2}$. **202.** $100\sqrt{6} \text{ см}^2$. **203.** а) $\frac{r^2 \sqrt{3}}{2}$; б) $2h^2$; в) $\frac{r^2 \sqrt{3}}{2}$;

г) 2000 см^2 ; д) $\frac{\pi R^2 d^2}{H^2}$. **204.** а) m^2 ; б) $m^2 \sqrt{2}$; в) $m^2 \sqrt{3}$; г) $2m^2$. **205.** $-\frac{1}{3}$.

206. $H \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$, $H \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. **207.** $0,75l$. **208.** 3 см . **209.** 60 см^2 . **210.** а) 15 см ;

б) 16 см . **211.** $296\pi \text{ см}^2$. **213.** а) 12 ; б) 36 дм^2 . **215.** а) $\frac{2\pi \cdot 10^4}{3} \text{ см}^3$; б) $27\,000\pi \text{ см}^3$;

в) $\frac{1}{3} \cdot 85\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$; г) $24\,696 \pi \operatorname{tg} 65^\circ$; д) $\approx 1164 \text{ дм}^3$; е) $310,4 \text{ см}^3$. **216.** а) $144\pi \text{ см}^3$;

б) 9 см ; в) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. **217.** $\frac{\pi}{3} bc^2 \sin^2 \alpha$. **218.** а) $\frac{\pi H^3}{12}$; б) $100\pi \text{ см}^3$ або $120\pi \text{ см}^3$;

в) $\frac{P^2}{3\pi^2 l^3} \sqrt{\pi^2 l^4 - P^2}$; г) $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{Q(P^2 - Q^2)}{\pi}}$. **220.** а) $1404\pi \text{ см}^3$; б) $\frac{2}{3} \pi S \sqrt{S \sin 2\alpha}$; в) $\frac{\pi Q^2}{a}$.

221. 375 см^3 . 222. $1 : 7 : 19$. 223. а) $\frac{H}{2}(2 - \sqrt[3]{4})$; б) $\frac{H}{2}(2 - \sqrt[3]{3})$. 224. $12\pi \text{ м}^3$ і $84\pi \text{ м}^3$.

225. 14 см . 226. $\frac{\pi c^3}{3} \sin^2 2\alpha$. 227. $500\pi \text{ см}^3$. 228. $1 + \sqrt{3}$. 229. а) $72\sqrt{3} \text{ см}^2$;

б) $6(3 + 4\sqrt{17}) \text{ см}^2$; в) $18(3\sqrt{3} + \sqrt{43}) \text{ см}^2$; г) $\frac{15\sqrt{2}}{8}(12\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{125 - 7\sqrt{5}}) \text{ см}^2$.

230. $\frac{\pi a^3}{24} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$. 231. $\frac{\pi a^3}{24} \operatorname{tg} \beta \sin^3 \varphi$. 232. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}(29 + 7\sqrt{73}) \text{ см}^2$;

б) $(14,5 + 14\sqrt{41}) \text{ см}^2$; в) $\frac{3}{4}(7\sqrt{91 + 58\sqrt{3}}) \text{ см}^2$; г) $\frac{5\sqrt{5}}{8}(29\sqrt{2 + 2\sqrt{5}} + 14\sqrt{57\sqrt{5} - 32}) \text{ см}^2$.

233. а) $\frac{RH\sqrt{2}}{H + R\sqrt{2}}$; б) $\frac{RH\sqrt{3}}{H + R\sqrt{3}}$. 234. $\frac{l\sqrt{3}}{6}$. 237. $2 : 3 : 4$.

Раздзел 3

241. а) $160\pi \text{ см}$; б) $3\pi\sqrt{91} \text{ см}$. 242. а) $160\pi \text{ см}$; б) $24\pi \text{ см}$. 244. а) $180\pi \text{ см}^2$;

б) $3\sqrt{3} \text{ см}$. 245. а) 18 см ; б) 24 см . 246. $40\pi \text{ дм}$. 247. б) $20\sqrt{10} \text{ см}$. 248. а) $3\pi\sqrt{3} \text{ см}$;

б) $5\pi\sqrt{2} \text{ см}$. 249. а) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi R^2}{8}$. 252. $0,6R$. 253. а) 982 км ; б) 983 км ;

в) 952 км ; г) 1025 км . 254. а) $\approx 44 \text{ км}$; б) $\approx 63 \text{ км}$; в) $\approx 83 \text{ км}$. 255. 10 см . 256. $\frac{240}{13}\pi \text{ см}$.

257. $216\pi \text{ см}^2$. 258. а) $2R \sin 2\varphi$, $2R \cos \varphi$; б) $\frac{\pi R^2}{3} \sin^2 2\varphi$. 261. 3 см . 262. 8 см .

263. 12 см . 265. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 268. а) $144\pi \text{ см}^2$; б) $16\pi \text{ дм}^2$; в) $8\pi \text{ м}^2$; г) $48\pi \text{ см}^2$.

270. а) 36 м^2 ; б) $900\pi \text{ см}^2$. 271. а) 9 см ; б) 10 м . 272. $\approx 1356 \text{ см}^2$.

273. а) $\approx 127,5 \text{ млн км}^2$; б) $\approx 36\,724 \text{ км}$; в) $\approx 15\,930 \text{ км}$; г) $\approx 23\,567 \text{ км}$.

276. а) $2\pi r \sin \frac{\alpha}{2}$; б) $r\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$. 277. $r\left(\cos \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\beta}{2}\right)$. 278. 13 см .

279. а) $1820\pi \text{ см}^2$; б) $240\pi \text{ м}^2$ або $660\pi \text{ м}^2$. 280. а) $\pi r^2(2 - \sqrt{2})$; б) $\pi r^2(2 - \sqrt{3})$;

в) $4\pi h^2$. 282. а) $256\pi \text{ см}^2$, $\frac{2048\pi}{3} \text{ см}^3$; б) 3 см , $113,04 \text{ см}^2$; в) 4 см , $\frac{256\pi}{3} \text{ см}^3$. 285. 1000 .

286. а) $3\sqrt[3]{10} \text{ см}$; б) $\frac{10}{\sqrt[3]{2}} \text{ см}$. 287. 18 см . 288. $\text{На} \approx 4,3 \text{ мм павысіцца}$. 290. а) He ;

- б) будзе. **291.** Шар, конус. **292.** $\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2R}{3}$. **295.** а) $\frac{\pi R^3}{3}(2 - \sqrt{3})$; б) $\frac{2\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$. **296.** а) $27 : 5$; б) $45\pi \text{ см}^3$, $243\pi \text{ см}^3$. **297.** $\approx 23,6 \text{ м}^3$. **298.** а) $2904\pi \text{ см}^3$; б) $\frac{\pi r^3}{8}$. **299.** $5 : 16$.
- 300.** $152\,604 \text{ мм}^3$. **301.** $\approx 901 \text{ см}^3$. **302.** $\frac{\pi r^3}{3}$, $\frac{2\pi r^3}{3}$, $\frac{\pi r^3}{3}$. **303.** а) $\frac{2\pi r^3}{3}\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$; б) $\frac{2\pi h^3}{3\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}$. **304.** $3528\pi \text{ см}^3$. **310.** $8r^3$. **311.** $10,5 \text{ см}$. **312.** $\frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. **314.** $15\,552 \text{ см}^3$.
- 315.** $0,4r\sqrt{5}$. **316.** $8R^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$. **317.** $0,2r\sqrt{10}$. **318.** $16r^3$. **320.** $\frac{\pi l^3}{6 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}$.
- 321.** $2\sqrt{2} : 1$. **323.** а) $\frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{54}$; б) $\frac{4\pi a^3}{3} \cos^3 \delta \operatorname{tg}^3 \frac{\delta}{2}$. **324.** а) $R \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha}{4}$. **325.** $\frac{2\pi r(l - r)}{l}$.
- 326.** $R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $\frac{2R}{\sin \alpha}$. **327.** $\frac{l}{2 \sin \alpha}$. **329.** $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **330.** а) $\frac{a}{4} \sqrt{\frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}}$, $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\frac{5a}{4\sqrt{3}}$. **331.** 384 см^3 . **332.** а) $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{3} + 2\sqrt{b^2 - a^2}} \right)^3$; б) $\frac{\pi a^3}{6} \sin^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}$. **333.** а) $\frac{a}{2 \sin \alpha} (3 \cos^2 \alpha + 1)$; б) $13(13 - 3\sqrt{17}) \text{ см}$. **334.** $\frac{128}{9} \text{ см}^3$.
- 335.** а) $\frac{4\pi a^3 b^2}{3(\sqrt{2a^2 - b^2})^3}$; б) $\frac{\pi a^3}{48}$. **336.** $\frac{3R^2}{4} \sin \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **337.** $\frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 + \sin \beta + \cos \beta} \right)^3$.
- 338.** а) $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$, $\frac{4\pi}{3 \sin^3 2\alpha}$; б) $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$, $\frac{500\pi}{3 \sin^3 2\beta}$. **339.** а) $400\pi \text{ дм}^2$, $\frac{4000\pi}{3} \text{ дм}^3$; б) $\frac{16\pi a^2}{3 \cos^2 \alpha}$, $\frac{32\pi a^3 \sqrt{3}}{27 \cos^3 \alpha}$. **340.** $676\pi \text{ см}^2$, $\frac{8788\pi}{3} \text{ см}^3$. **341.** $\frac{2425\pi}{4} \text{ см}^2$, $\frac{12\,125\pi\sqrt{97}}{48} \text{ см}^3$. **342.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **343.** $\frac{a\sqrt{2} \sin \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}$.
- 348.** $\frac{4\pi R^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{4} \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{4} \right)$. **349.** $3V \cos^2 \frac{\alpha}{4}$. **358.** а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **360.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **361.** а) $24R^2$; б) $12R^2\sqrt{3}$; в) $24R^2\sqrt{3}$. **365.** $a^2\sqrt{2}$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **366.** $\sqrt{3} : 1$. **367.** 90° .

$$368. \text{ а) } \arccos \frac{1}{3}; \text{ б) } 2\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 369. \text{ а) } \frac{q^2\sqrt{3}}{9}; \text{ б) } \frac{q^2\sqrt{2}}{9}. \quad 371. \text{ а) } l = \frac{h\sqrt{6}}{2}; \text{ б) } k = \frac{1}{3}l.$$

$$372. \text{ а) } a\sqrt{2}; \text{ б) } \frac{a\sqrt{2}}{3}; \text{ в) } \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad 377. \frac{a\sqrt{2}}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad 378. \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Раздел 4

$$380. \text{ а) } a + b \text{ або } |a - b|; \text{ б) } \frac{a + b}{2}. \quad 381. \text{ а) } 40^\circ; \text{ б) } 118^\circ; \text{ в) } 40^\circ; \text{ г) } 88^\circ; \text{ д) } 40^\circ, 80^\circ, 240^\circ;$$

$$\text{е) } 55^\circ. \quad 383. \text{ а) } \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ або } \frac{|\alpha - \beta|}{2}; \text{ б) } \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2}, \text{ або } \frac{|\alpha - \beta + 2\gamma|}{2}, \text{ або } \frac{|-\alpha + \beta + 2\gamma|}{2}, \text{ або } \frac{|\alpha + \beta - 2\gamma|}{2}. \quad 385. \text{ а) } 8; \text{ б) } 10; \text{ в) } 12; \text{ г) } 15; \text{ д) } 7; \text{ е) } 20. \quad 386. \text{ а) } 10; \text{ б) } 15; \text{ в) } 25; \text{ г) } 54. \quad 387. 7.$$

$$388. \text{ а) } 7 \text{ або } 8; \text{ б) } 5; \text{ в) } 4\sqrt{6}. \quad 389. 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} \text{ см.} \quad 390. \sqrt{2} : 1. \quad 391. \text{ а) } \frac{10}{\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } \frac{m}{2\sin(\alpha + \beta)}; \text{ в) } \frac{ab}{2h}. \quad 393. \text{ а) } \frac{5\sqrt{13}}{4}; \text{ б) } \frac{\sqrt{130}}{3}; \text{ в) } 1, 3\sqrt{61}; \text{ г) } \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$395. \frac{a + b - c}{2}; \frac{a - b + c}{2}, \frac{-a + b + c}{2}, \frac{a + b + c}{2}.$$

$$404. \text{ г) } \left((h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})(h_a^{-1} + h_b^{-1} - h_c^{-1})(h_a^{-1} - h_b^{-1} + h_c^{-1})(-h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}) \right)^{-0.5};$$

$$\text{ж) } l_a = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right). \quad 410. \text{ а) } \frac{|\alpha - \beta|}{2}; \text{ б) } |90^\circ - 2\alpha|. \quad 413. \frac{kl}{h}, \frac{h^2 - kl}{h}.$$

$$415. \text{ а) } r_a = \frac{S}{p - a}, \text{ где } S \text{ — площадь, а } p \text{ — периметр треугольника; б) } p - a, \text{ где}$$

$$p \text{ — периметр; в) } p, \text{ где } p \text{ — периметр.} \quad 418. \text{ а) } \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}; \text{ в) } -2 - \sqrt{3}.$$

$$422. \frac{a^2}{2h}, \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \frac{4h^2 + b^2}{8h}. \quad 423. 2\sqrt{Rr}. \quad 424. \text{ а) } \sqrt{d^2 - (R - r)^2}; \text{ б) } \sqrt{d^2 - (R + r)^2}.$$

$$425. \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}. \quad 426. 6. \quad 428. 120^\circ. \quad 431. |\alpha - \beta|. \quad 434. 180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta,$$

$$2(\alpha + \beta) - 180^\circ. \quad 441. \frac{2}{3}r. \quad 442. \frac{Rr(R + r)}{R^2 + Rr + r^2}. \quad 443. \text{ а) } \frac{3r}{8}; \text{ б) } \frac{r}{6}. \quad 445. \text{ а) } R(2\sqrt{3} - 3);$$

$$\text{б) } R(\sqrt{2} + 1). \quad 448. \text{ а) } \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}; \text{ б) } \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1), \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1), 2R$. 449. а) $\frac{a|b^2+c^2-a^2|}{4S}$, где S — площадь треугольника;

б) $\frac{c|a^2+b^2-c^2|}{8S}$, где S — площадь треугольника; в) $\sqrt{\frac{p-a}{p}}bc$, где p —

полупериметр; г) $\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$, где p — полупериметр; д) $\frac{a}{p}\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$, где p — полупериметр.

$$450. 7-4\sqrt{3}:1. 451. \frac{m}{2R}\sqrt{4R^2-n^2} + \frac{n}{2R}\sqrt{4R^2-m^2},$$

$$\left| \frac{m}{2R}\sqrt{4R^2-n^2} - \frac{n}{2R}\sqrt{4R^2-m^2} \right|. 452. а) \frac{|a-b|}{2}; б) \frac{a+b}{2} \text{ або } \frac{|a-b|}{2}; в) a+b.$$

$$453. а) 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ або } \frac{\alpha+\beta}{2}; б) \frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2} - 180^\circ; в) 180^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

$$455. а) \sqrt{ab + \frac{ac^2-bd^2}{a-b}}, \sqrt{ab + \frac{ad^2-bc^2}{a-b}};$$

$$б) \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(-a+b+c+d)}.$$

$$457. а) 2(a^2-b^2+c^2-d^2); б) 4\sqrt{m^2n^2-S^2}.$$

$$458. 0,5 \left(\sqrt{2a^2b^2+2(a^2+b^2)m^2-a^4-b^4-m^4} + \sqrt{2c^2d^2+2(c^2+d^2)m^2-c^4-d^4-m^4} \right).$$

$$459. \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{2a^2b^2+2(a^2+b^2)k^2-a^4-b^4-k^4} + \sqrt{2c^2d^2+2(c^2+d^2)k^2-c^4-d^4-k^4} + \right. \\ \left. + \sqrt{2a^2d^2+2(a^2+d^2)l^2-a^4-d^4-l^4} + \sqrt{2b^2c^2+2(b^2+c^2)l^2-b^4-c^4-l^4} \right).$$

$$462. а) \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}; б) \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ где}$$

$$p \text{ — полупериметр. } 481. 2,5a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}. 482. а) R\sqrt{2-\sqrt{3}}; б) \frac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$

$$484. а) 52^\circ \text{ и } 88^\circ; б) 10^\circ. 485. а) 40^\circ; б) 80^\circ. 486. 99^\circ 30'. 487. 110^\circ. 488. а) 81^\circ \text{ або } 52^\circ;$$

$$б) 76^\circ 30'. 489. а) 128\frac{4}{7}; б) 22. 491. 37 \text{ см. } 492. 50 \text{ см, } 72 \text{ см. } 493. 18,5 \text{ см. } 494. 84 \text{ см.}$$

$$495. 4:25. 496. 12 \text{ см. } 497. 13 \text{ см. } 498. а) 7,5 \text{ см; б) } 40\frac{1}{12} \text{ см. } 500. 35 \text{ см.}$$

$$501. 2\sqrt{15} \text{ см. } 502. 1:3. 503. 4 \text{ см. } 504. 12 \text{ см, } 27 \text{ см. } 505. 2\sqrt{3} \text{ см, } 4\sqrt{3} \text{ см, } 6\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$506. а) 5 \text{ см; б) } 9 \text{ м або } 21 \text{ м. } 507. а) 3 \text{ см; б) } 9 \text{ см, } 12 \text{ см, } 15 \text{ см. } 508. а) a \pm r \text{ при}$$

$$a \geq r \text{ и } 0, a+r \text{ при } a < r; б) d \pm (r_1+r_2) \text{ при } d \geq r_1+r_2 \text{ и } 0, r_1+r_2-d \text{ при } d < r_1+r_2;$$

в) найменшая адлегласць $d - r$ пры $d \geq r$ і 0 пры $d < r$, найбольшай адлегласці не

існуе. **510.** $3 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$; $\frac{3}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. **512.** а) $H \sqrt{\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{4}}$; г) $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ(n-2)}{n}$;

д) $\frac{a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{180^\circ(n-2)}{n}}$; е) $4 \operatorname{tg} 7^\circ 30'$; ж) $2\sqrt{2}$ см. **513.** 5 см, 4 см. **514.** $\frac{R}{3}$. **516.** а) 4 м;

б) 60° . **518.** а) $\frac{4(3\sqrt{3}-2)}{\sqrt{69}}$ см; б) 10,5 см; в) $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. **519.** а) $\frac{b}{2 \sin \alpha}$; б) $\frac{l^2}{2h}$.

520. а) $\frac{r^2 + h^2}{2h}$. **522.** а) $2\sqrt{6}$ см; б) $\frac{5a}{2\sqrt{3}}$. **523.** $2R \sin \alpha$. **524.** а) $\frac{2a^2}{3}$; б) $\frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$;

в) $\frac{5}{\sin 2\delta}$; г) $0,75a$; д) $\frac{a}{\sin 2\beta}$; е) $\frac{a^2}{4h} + \frac{h}{2}$. **525.** $\frac{a}{2 \sin \alpha \sin 2\beta}$. **527.** а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см;

б) $\frac{ah}{1 + \sqrt{1 + \frac{12h^2}{a^2}}}$; в) $a(\sqrt{13} - 2\sqrt{3})$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5 + \cos \alpha}}{\sqrt{3} + \sin \frac{\alpha}{2}}$. **528.** а) 2 см; б) 3 см; в) $\frac{l}{6}$.

529. а) $\frac{h}{3}$; б) $\frac{h \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$. **530.** а) $\frac{a\sqrt{37}}{42}$, $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$. **531.** $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{4} + 45^\circ \right)$.

532. а) $\frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$; б) $\frac{3}{4}(\sqrt{5} - 1)$ см; в) $4(2\sqrt{3} - 3)$ см; г) $\frac{\sqrt{10}}{8}(\sqrt{5} - 1)$ см;

д) $\frac{9}{8}(\sqrt{41} - 3)$ см. **533.** $8\sqrt{3}$ см і 12 см або $8\sqrt{2}$ см і 16 см.

534. $\frac{a \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 2\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \alpha}}$. **536.** 10 см, 26 см. **537.** 1 : 3.

538. 4 м², 16 м². **539.** $\frac{\sqrt{S(m^2 + n^2)}}{2mn}$. **541.** $\frac{kl(k + l + 2)}{2(k + 1)(l + 1)(k + l + 2)}$. **542.** б) 42 см²,

12 см², 30 см². **543.** $\frac{1}{mn + 1}$. **544.** $\frac{1}{6}$. **545.** а) 18 см²; б) 10,5 см², або 14 см², або

$\frac{5}{4}(5 + \sqrt{73})$ см²; в) 270 см²; г) 756 см²; д) 72 см². **546.** 1 см. **547.** 8 см, 26 см, 30 см.

549. $2(a^2 + b^2 + ab)$. **551.** $4\sqrt{\frac{m}{m + n}}$ см. **552.** $\frac{n - 1}{n}$ S. **553.** 1 : $(\sqrt{2} - 1)$: $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

$$554. \frac{m^2 + n^2 + 4mn}{(2m + n)^2} Q. 555. in : jn : (i + j) m + (m + n)k. 556. 4 \text{ см. } 557. \frac{1}{6}.$$

$$559. 1 : (\sqrt{2} - 1). 560. 2\sqrt{SQ}. 563. \text{ а) } 8316 \text{ см}^2; \text{ б) } 150 \text{ см}^2 \text{ або } 42 \text{ см}^2; \text{ в) } 156 \text{ см}^2.$$

$$564. 3 \text{ см. } 565. \text{ а) } 8 \text{ см, } 12 \text{ см або } 2 \text{ см, } 6 \text{ см; б) } 8 \text{ см або } 11,25 \text{ см. } 566. 4\sqrt{2(\sqrt{3} + 1)} \text{ см.}$$

$$568. \text{ а) } 24; \text{ б) } \sqrt{\frac{m+n+2l}{2} \cdot \frac{m+n-2l}{2} \cdot \frac{m-n+2l}{2} \cdot \frac{-m+n+2l}{2}}. 570. m^2 : mn : n^2 :$$

$$mn. 571. 4,8 + 1,2\sqrt{31}. 574. 8 \text{ м}^2, 10 \text{ м}^2, 15 \text{ м}^2, 12 \text{ м}^2. 577. 546 \text{ см}^2, \sqrt{1621} \text{ см або } 126 \text{ см}^2, \sqrt{181} \text{ см. } 578. 2\pi R^2(18\sqrt{3} - 31). 579. 15 \text{ см}^2. 580. \text{ а) } 12r^2\sqrt{3}; \text{ б) } 18r^2\sqrt{3}.$$

$$581. 1 : 2. 582. 0,6\pi r^2. 583. \pi S. 584. \text{ а) } 36\pi(1 + \sqrt{2}) \text{ см}^2; \text{ б) } \pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right);$$

$$\text{ в) } \approx 208 \text{ см}^2. 585. 36\sqrt{15} \text{ см}^2. 586. \frac{4(2 + \sqrt{10} + \sqrt{17})}{15\pi}. 587. \text{ а) } \frac{29\sqrt{3} + 18\sqrt{73}}{4} \text{ см}^2;$$

$$\text{ б) } 58 + 7\sqrt{81} \text{ см}^2; \text{ в) } 1,5(29\sqrt{3} + 7\sqrt{91}) 9 \text{ см}^2. 588. \text{ а) } 120 \text{ см}^2; \text{ б) } 1536 \text{ см}^2; \text{ в) } 4R^2 \sin 2\alpha;$$

$$\text{ г) } \frac{16R^2}{\sin^2 \alpha}. 589. \text{ а) } 3 : 4; \text{ б) } 3 : 2. 592. 3 : 4. 593. \text{ а) } 3500\pi \text{ см}^2; \text{ б) } 0; \text{ в) } 588\pi \text{ см}^2; \text{ г) } \frac{\pi R^2}{4}.$$

$$595. \pi(3r^2 - d^2). 596. \pi d^2, 1,5\pi d^2. 597. \text{ а) } 36\pi \text{ см}^2; \text{ б) } 194\pi \text{ см}^2; \text{ в) } 34\pi \text{ см}^2;$$

$$\text{ г) } r(3 - 2\sqrt{2}); \text{ д) } 32\pi \text{ см}^2; \text{ е) } 16\pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}; \text{ ж) } \frac{\pi a^2}{3}; \text{ з) } \frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}; \text{ и) } \frac{\pi l^3}{3}. 598. \text{ а) } \frac{25\pi}{3} \text{ см}^2;$$

$$\text{ б) } \frac{8\pi a^2}{3}; \text{ в) } 37,5\pi \text{ см}^2; \text{ г) } \frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}. 603. 259,2\pi \text{ см}^2. 604. \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2m}}{2}, \frac{\pi R^2}{2}.$$

$$605. \text{ а) } 2r^3\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha; \text{ б) } \frac{h^3\sqrt{2(\cos \beta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}. 606. 8r^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha. 607. \frac{8r^3\sqrt{3}}{\sin \alpha}.$$

$$608. 6r^3\sqrt{3}. 610. \text{ а) } 2R^3 \sin \alpha \cdot \sqrt{3(4\cos^2 \alpha - 3)}; \text{ б) } 2R^3\sqrt{3} \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$611. \text{ а) } 224 \text{ см}^3; \text{ б) } \frac{3\sqrt{3}H}{8}(4R^2 - H^2); \text{ в) } \frac{8R^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{(2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}}. 612. \text{ а) } \frac{\pi a^3}{4}; \text{ б) } 1,5\pi a^3\sqrt{3};$$

$$\text{ в) } \frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}; \text{ г) } \pi R^3 \cos \alpha \sin 2\alpha. 613. r^2 h \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right). 614. \text{ а) } 480,2 \text{ см}^3; \text{ б) } \frac{4}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{ в) } 16 \text{ см}^3. 615. \text{ а) } \frac{9V\sqrt{3}}{16\pi} \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha; \text{ б) } \frac{128}{3} R^3 \sin^6 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{3} \right);$$

- в) $2R^3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$; г) $\frac{8\sqrt{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg} \alpha + 4 \operatorname{ctg} \alpha)^3}$; д) $\frac{H^2 \sqrt{3}}{4} (2r - H)$. **616.** а) $9000\sqrt{3} \text{ см}^3$;
- б) $\frac{H^2 \sqrt{3} (2R - H)}{4}$. **617.** а) $6000\sqrt{3} \text{ см}^3$; б) $\frac{H^2 \sqrt{3} (2R - H)}{12}$. **618.** а) $\frac{\pi a^3}{24} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}$;
- б) $\frac{\pi a^3}{24} \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \theta$. **619.** 32 см^2 . **620.** $\frac{r^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{4}$. **621.** $l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin 2\beta$.
- 622.** $2592\pi \text{ дм}^3$. **623.** а) $3\pi r^3$; б) $\frac{8\pi r^3}{3}$; в) $\frac{\pi r^3}{3} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}$. **624.** $\frac{\pi a^3}{12} \left(2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right)$.
- 625.** $S_{\text{ш}} = \frac{6}{7} S_{\text{н}}$. **627.** а) $4 : 1$; б) $\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r} + 1 \right)$. **628.** а) $\frac{\pi D^3}{6}$; б) 972 см^3 ;
- в) $504\pi\sqrt{14} \text{ см}^3$. **629.** $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$. **630.** а) $11,7\sqrt{3} \text{ см}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **631.** 216.
- 633.** $\approx 2,5 \text{ т}$. **635.** б) 167. **636.** $\approx 5,9 \text{ дм}^3$. **637.** а) $\approx 340 \text{ г}$; б) $\approx 29 \text{ кг}$. **638.** $\approx 422 \text{ г}$.
- 639.** $\frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{3}) \text{ м}^3$. **640.** $\frac{7}{250}$. **641.** а) $3744\pi \text{ см}^3$; б) $\frac{125\,000\pi}{3} \text{ см}^3$. **642.** а) $\frac{419\pi R^3}{1296}$;
- б) $\frac{\pi}{6} \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{7}{4} r^2 \right)$ або $\frac{\pi}{6} \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right) \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{7}{4} r^2 \right)$.
- 643.** $\frac{100\pi}{3} \text{ см}^3$, $\frac{400\pi}{3} \text{ см}^3$. **644.** $\frac{117\pi}{8} \text{ см}^3$. **645.** а) $\frac{\pi R^3}{3}$; б) $2943,5 \text{ см}^3$;
- в) $\approx 1\,635\,417 \text{ см}^3$. **647.** а) 410 м^3 ; б) 6,1. **650.** 6,56 м. **651.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. **652.** $936\pi \text{ см}^3$.
- 655.** а) $(5 \pm 5\sqrt{3}; 0; 0)$, $(0; 4 \pm \sqrt{66}; 0)$, $(0; 0; -3 \pm \sqrt{59})$. **656.** $(1 + 2y; y; y - 0,4)$, дзе y — любы лік. **657.** $\frac{\sqrt{94}}{2}$. **658.** а) $2 : 27$; б) $7 : 9$. **659.** Сфера з цэнтрам $Q(2; 3; 1)$ і радыусам 4. **660.** Сфера з цэнтрам $Q(2; -1; 3)$ і радыусам 5.
- 681.** Сфера з цэнтрам $O(0; 0; 0)$ і радыусам $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **682.** Сфера з цэнтрам $O(0; 0; 0)$ і радыусам a . **683.** $3x + y = 0$. **684.** а) Перасякаюцца; б) скрыжоўваюцца; в) паралельныя; г) супадаюць. **685.** а) Перасякаюцца; б) не маюць агульных пунктаў; в) датыкаюцца. **686.** а) $9\sqrt{2}$; б) $\sqrt{34}$. **687.** а) $2x - 4y - 4z - 1 = 0$; б) $2x - 9z + 84 = 0$.
- 688.** а) $\frac{2\sqrt{70}}{7}$; б) $\frac{11\sqrt{10}}{10}$. **689.** а) $(3; 0; -1)$, $(1; -4; 3)$; б) $(-3; 3; 2)$, $(-1; -1; -2)$.
- 690.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{19}{5}}$; в) $\sqrt{\frac{19}{5}}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{\frac{19}{20}}$; е) $\sqrt{\frac{51}{20}}$. **691.** а) 1; б) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{7}}$;

- р) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{5}{\sqrt{7}}$; е) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **692.** а) $\frac{2\sqrt{57}}{19}$; б) $\frac{2\sqrt{57}}{19}$; в) $\frac{2\sqrt{93}}{31}$; г) $\frac{\sqrt{345}}{115}$; д) $\frac{2}{\sqrt{153}}$;
- е) $\frac{\sqrt{30}}{20}$. **693.** а) $\arccos 0,7$; б) $\arccos \frac{4}{\sqrt{35}}$; в) $\arccos \sqrt{\frac{5}{8}}$; г) $\arccos \frac{11}{2\sqrt{35}}$;
- д) $\arccos \frac{5}{14}$; е) $\arccos \frac{2}{\sqrt{14}}$. **694.** а) $\arcsin 0,6$; б) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{35}}$; в) $\arcsin 0,2$;
- г) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$; д) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{35}}$; е) $\arcsin 0,2$; ж) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{35}}$; з) $\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$.
- 695.** а) $\arccos \frac{9}{17}$; б) $\arccos \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{323}}$; в) $\arccos \frac{3}{\sqrt{85}}$; г) $\arccos \sqrt{\frac{3}{323}}$; д) $\arccos \frac{11}{5\sqrt{5}}$;
- е) $\arccos \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{7}}$. **696.** а) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{17}}$; г) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$; д) 0; е) 1,6; ж) 1,2; з) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча вучня	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака вучню за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Латоцін Леанід Аляксандравіч
Чабатарэўскі Барыс Дзмітрыевіч
Гарбунова Ірына Уладзіміраўна
Цыбулька Аксана Яўгенаўна

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Рэдактары: Т. І. Жукоўская, В. І. Орсіч
Мастацкія рэдактары: П. В. Баранаў, І. А. Грынё
Камп'ютарная вёрстка: П. В. Баранаў
Карэктары: Т. В. Басалыга, Т. Б. Міхайлава

Падпісана ў друк 09.10.2020. Фармат 70×100 ¹/₁₆.
Папера афсетная. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 18,7. Ул.-выд. арк. 13,00.
Тыраж 11 064 экз. Заказ

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Выдавецтва «Беларуская Энцыклапедыя імя Петруся Броўкі».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/1 ад 08.07.2013.
Зав. Калініна, 16, 220012, г. Мінск.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, г. Мінск.